4

Técnica do Furo Elíptico

Neste capítulo mostra-se o desenvolvimento de uma nova técnica de medição de tensões residuais. Ela se baseia nas técnicas de seccionamento, de remoção de camadas e na própria técnica do furo cego. É uma técnica destrutiva, proposta para uso em medições para avaliar tensões residuais, inclusive aquelas geradas nos processos de fabricação de equipamentos.

4.1. Princípios Fundamentais

A técnica consiste na usinagem de cortes longos na superfície da peça. Os cortes aliviam as tensões existentes no material retirado e provocam variações nas deformações existentes na vizinhança do corte. Tais variações nas deformações são medidas por extensômetros de resistência elétrica, colados o mais próximo possível da região frontal do corte, tal como apresentado na figura 4.1.

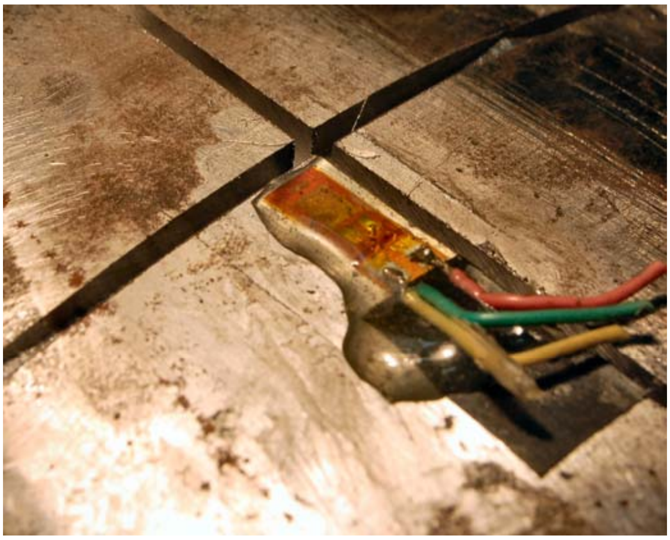


Figura 4.1. Foto do experimento com a técnica do furo elíptico: cortes perpendicular e paralelo ao extensômetro.

4.2. Problema da Concentração de Tensões

Para modelar o campo de tensões gerado por um corte foi necessário tratá-lo como uma elipse muito longa. As equações de distribuição das tensões na vizinhança de uma elipse foram descritas por Inglis [27] em 1913.

Para o entendimento das equações propostas por Inglis, é importante que se conheça o comportamento das coordenadas elípticas e hiperbólicas, as quais foram utilizadas em seu estudo. A equação da elipse pode ser escrita como

$$\frac{x^2}{c^2\cosh^2(\alpha)}+\frac{y^2}{c^2\sinh^2(\alpha)}=1 \tag{4.1}$$

Se α for constante, esta equação representará uma elipse de semi-eixos $c\sinh(\alpha)$ e $c\cosh(\alpha)$ cujos focos se situam em $x=\pm c$. Para diferentes valores de α obtêm-se diferentes elipses com os mesmos focos, isto é, uma família de elipses homofocais.

Já as hipérboles são descritas por

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2(\beta)}+\frac{y^2}{c^2\sin^2(\beta)}=1 \tag{4.2}$$

Para um valor constante de β, esta equação representa uma hipérbole, cujos focos são os mesmos das elipses. Assim, variando-se β, a equação 4.2 gera uma família de hipérboles homofocais.

A figura 4.2 mostra um gráfico com algumas elipses e hipérboles homofocais, sendo $\alpha_0=\tanh^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$, onde a e b são, respectivamente, os semi-eixos maior e menor da elipse que representa o corte.

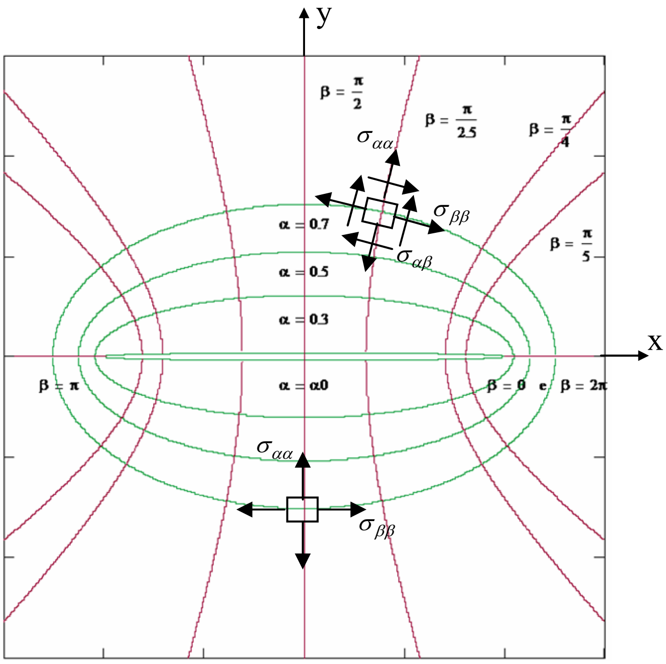


Figura 4.2. Variação das elipses e das hipérboles, com as coordenadas α e β

4.2.1. Equações de Inglis

Para um furo elíptico localizado em uma placa de dimensões infinitas e submetida a um estado de tensões biaxial, Inglis [27] denominou u_α e u_β como os deslocamentos normais às direções α e β (da figura 4.2) e relacionou as deformações $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ e $\varepsilon_{\beta\beta}$ com estes deslocamentos, através das seguintes equações[1]:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = h_1 \frac{\delta u_\alpha}{\delta \alpha} + h_1 h_2 u_\beta \frac{\delta}{\delta \beta}\left(\frac{1}{h_1}\right)$$

$$\varepsilon_{\beta\beta} = h_1 \frac{\delta u_\beta}{\delta \beta} + h_1 h_2 u_\alpha \frac{\delta}{\delta \alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right) \qquad (4.3)\text{ a-b}$$

onde:

---

[1] As equações para cisalhamento não serão apresentadas, pois não serão úteis neste trabalho. Porém, também são usadas nas condições de contorno necessárias para determinação das constantes das séries infinitas que serão apresentadas adiante.

$$h_1^2 = \left(\frac{\delta\alpha}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\alpha}{\delta y}\right)^2$$

(4.4) a-b

$$h_2^2 = \left(\frac{\delta\beta}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\beta}{\delta y}\right)^2$$

A partir destas equações e da utilização de artifícios matemáticos nada triviais, cujas demonstrações estão fora do escopo deste trabalho, Inglis [27] chegou às seguintes séries infinitas para representar as tensões atuantes em pontos de uma placa contendo um furo elíptico perpendiculares às direções *α* e *β*, respectivamente (ver figura 4.2, para esclarecimento das notações):

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\left\{\begin{aligned} &\{(n+1)e^{-(n-1)\alpha}\cos(n+3)\beta + (n-1)e^{-(n+1)\alpha}\cos(n-3)\beta \\ &-[4e^{-(n+1)\alpha} + (n+3)e^{-(n-3)\alpha}]\cos(n+1)\beta \\ &+[4e^{-(n-1)\alpha} - (n-3)e^{-(n+3)\alpha}]\cos(n+1)\beta\}A_n \\ &+\{ne^{-(n+1)\alpha}\cos(n+3)\beta + (n+2)e^{-(n+1)\alpha}\cos(n-1)\beta \\ &-[(n+2)e^{-(n-1)\alpha} + ne^{-(n+3)\alpha}]\cos(n+1)\beta\}B_n \end{aligned}\right\}}{[\cosh(2\alpha) - \cos(2\beta)]^2}$$

(4.5) a-b

$$\sigma_{\beta\beta} = \frac{\left\{\begin{aligned} &\{(n+1)e^{-(n-1)\alpha}\cos(n+3)\beta - (n+3)e^{-(n+1)\alpha}\cos(n-3)\beta \\ &-[(n-1)e^{-(n-3)\alpha} + 4e^{-(n+1)\alpha}]\cos(n+1)\beta \\ &+[(n-1)e^{-(n-3)\alpha} + 4e^{-(n-1)\alpha}]\cos(n+1)\beta\}A_n \\ &+\{ne^{-(n+1)\alpha}\cos(n+3)\beta + (n+2)e^{-(n+1)\alpha}\cos(n-1)\beta \\ &-[(n+2)e^{-(n-1)\alpha} + ne^{-(n+3)\alpha}]\cos(n+1)\beta\}B_n \end{aligned}\right\}}{[\cosh(2\alpha) - \cos(2\beta)]^2}$$

Nestas formulações, *n* pode assumir qualquer valor inteiro negativo ou positivo. O número de constantes A_n e B_n envolvidas é arbitrário e elas devem ser determinadas pelas condições de contorno dos casos avaliados. A definição dessas constantes e a formulação específica para determinação das tensões nos casos de interesse deste trabalho estão apresentadas a seguir.

Caso 1: carregamento perpendicular ao maior semi-eixo da elipse, apresentado na figura 4.3.

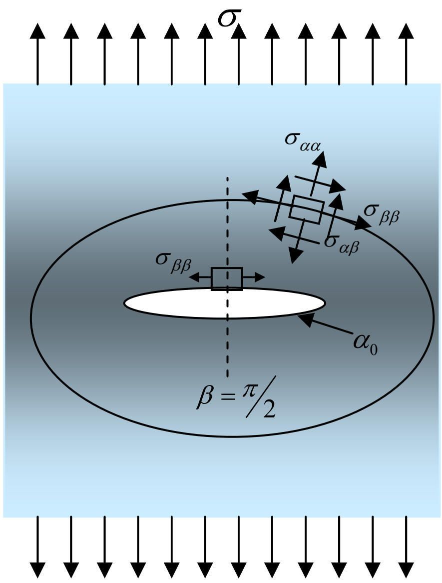


Figura 4.3. Carregamento perpendicular ao maior semi-eixo da elipse

Para este caso, definindo o furo como uma elipse de $\alpha = \alpha_0$ tem-se as seguintes condições de contorno:

1) Quando $\alpha = \alpha_0$: $\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} = 0$

2) Quando α é muito grande:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\sigma}{2}(1-\cos(2\beta)),\ \sigma_{\beta\beta} = \frac{\sigma}{2}(1+\cos(2\beta)) \text{ e } \sigma_{\alpha\beta} = -\frac{\sigma}{2}(\text{sen}(2\beta))$$

Para que tais condições fossem satisfeitas pelas equações 4.5, Inglis chegou às seguintes constantes:

$$\text{A}_{-1} = -\frac{\sigma}{16};\ \text{B}_{-1} = \frac{\sigma}{4}(1+\cosh(2\alpha_0));\ \text{A}_{+1} = -\frac{\sigma}{16} - \frac{\sigma.\text{e}^{4\alpha_0}}{8};\ \text{B}_{+1} = \frac{\sigma.\text{e}^{4\alpha_0}}{8} \text{ e } \text{B}_{-3} = -\frac{\sigma}{8}$$

Substituindo-se estas constantes simultaneamente nas equações 4.5, chega-se às seguintes expressões:

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{1}{16}\right)[4e^{2\alpha_y}\cos(2\beta)-2\cos(4\beta)+(-2e^{4\alpha_y}-4)+4e^{2\alpha_y}\cos(2\beta)]+\left(-\frac{1}{8}\right)[-3e^{2\alpha_y}-e^{2\alpha_y}\cos(4\beta)\\ -(-e^{4\alpha_y}-3)\cos(2\beta)+\left(-\frac{1}{16}-\frac{e^{2\alpha_0}}{8}\right)[2\cos(4\beta)-4e^{-2\alpha_y}\cos(2\beta)-4e^{-2\alpha_y}\cos(2\beta)+2e^{-4\alpha_y}+4]\\ +\left(\frac{1+\cosh(2\alpha_0)}{4}\right)[-\cos(2\beta)+\cos(2\beta)-(e^{2\alpha_y}-e^{-2\alpha_y})]+\left(\frac{e^{4\alpha_0}}{8}\right)[e^{-2\alpha_y}\cos(4\beta)+3e^{-2\alpha_y}]\\ -(3+e^{-4\alpha_y})\cos(2\beta)\end{array}\right\}}{[\cosh(2\alpha_y)-\cos(2\beta)]^2}$$

$$\sigma_{\beta\beta}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{1}{16}\right)[4e^{2\alpha_y}\cos(2\beta)-2e^{4\alpha_y}-4+4e^{2\alpha_y}\cos(2\beta)]+\left(-\frac{1}{8}\right)[-3e^{2\alpha_y}-e^{2\alpha_y}\cos(4\beta)\\ -(-e^{4\alpha_y}-3)\cos(2\beta)]+\left(-\frac{1}{16}-\frac{e^{2\alpha_0}}{8}\right)[2\cos(4\beta)-(4e^{-2\alpha_y}+4e^{-2\alpha_y})\cos(2\beta)+(4+2e^{-4\alpha_y})]\\ -\left(\frac{1+\cosh(2\alpha_0)}{4}\right)[-\cos(2\beta)+\cos(2\beta)-(e^{2\alpha_y}-e^{-2\alpha_y})]-\left(\frac{e^{4\alpha_0}}{8}\right)[e^{-2\alpha_y}\cos(4\beta)+3e^{-2\alpha_y}]\\ -(3+e^{-4\alpha_y})\cos(2\beta)\end{array}\right\}}{[\cosh(2\alpha_y)-\cos(2\beta)]^2}$$

(4.6) a-b

Para avaliar o estado de tensões gerado na região onde o extensômetro está colado (em $\beta=\pi/2$), é melhor trabalhar com distâncias em coordenadas cartesianas (y) e não elípticas (α), estabelecendo assim, as equações de tensão como função de y e β. Para tanto foi preciso estabelecer uma relação entre y e a coordenada α das equações de Inglis, adotando o termo α_y como o representante cartesiano de α quando $\beta=\pi/2$. A obtenção da expressão desse termo é demonstrada a seguir:

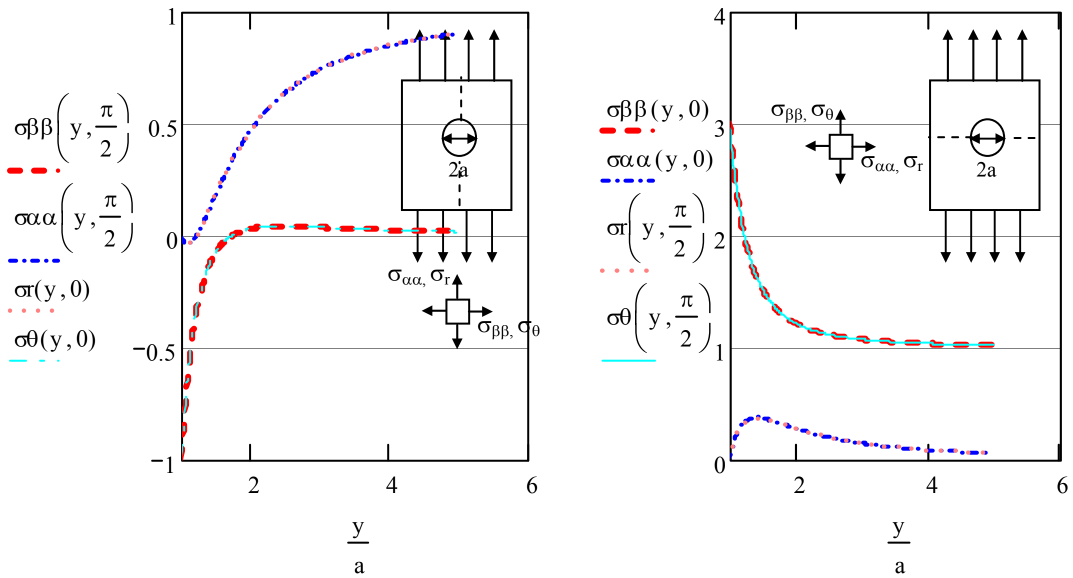
Partindo da equação da elipse 4.1, fazendo *x=0* (eixo y) e admitindo elipses homofocais, tem-se:

$$\frac{y}{\operatorname{senh}(\alpha_y)}=\frac{y'}{\operatorname{senh}(\alpha_y')}$$

Como a intenção é relacionar o furo elíptico com uma distância qualquer dele, faz-se $y' = b$ (semi-eixo menor do furo) e $\alpha_{\alpha}^{'} = \alpha_0$, assim:

$$\alpha_y = \text{arcsenh}\left(\frac{y}{b}\text{senh}(\alpha_0)\right) \tag{4.7}$$

Para verificar a acurácia das equações de Inglis e da relação entre coordenadas, estabelecida para o problema em questão, igualou-se os semi-eixos da elipse aproximando-a da geometria de um furo circular (cujas equações, formuladas por Kirsh já foram apresentadas anteriormente e são comprovadamente válidas). Os gráficos da figura 4.4 mostram os resultados obtidos com os dois equacionamentos. Estes gráficos mostram o comportamento das distribuições de tensões na placa furada, normalizadas pela tensão aplicada[2] na direção $\beta = \pi/2$ (ver figura 4.3). A defasagem de 90º entre os ângulos das equações elípticas e polares para representar a mesma região em relação ao furo, deve-se aos eixos de referência para o qual cada uma foi deduzida.



(a) (b)

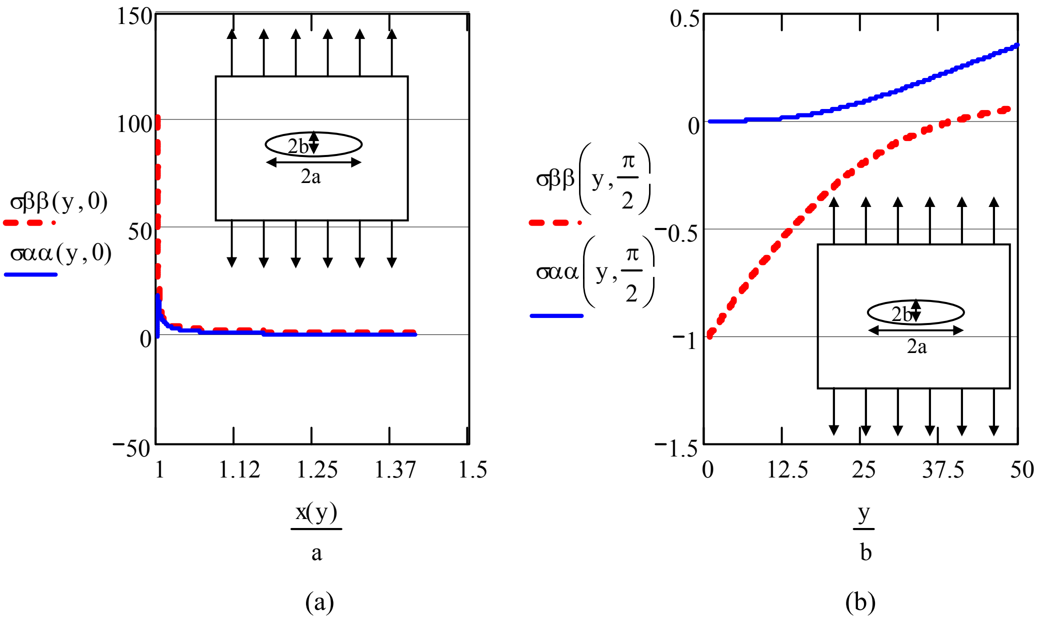
Figura 4.4. Variação das tensões com relação à distância da borda de um furo circular para (a) na direção do carregamento e (b) na direção perpendicular ao carregamento.

[2] Ou seja, são apresentados os valores das concentrações de tensões ao longo da placa.

Os gráficos da figura 4.4, nos quais as curvas dos dois métodos estão superpostas, permitem afirmar que os resultados das equações elípticas têm uma total coerência com os das equações polares, o que as torna perfeitamente aplicáveis para as análises necessárias ao modelamento da técnica do furo elíptico.

O próximo passo foi plotar os gráficos do comportamento das tensões com relação à distância da borda de um furo elíptico, conforme representado na figura 4.5. Utilizam-se as dimensões dos cortes feitos em alguns dos experimentos deste trabalho. Estes cortes que têm semi-eixos a e b respectivamente iguais a 50 e 1 milímetros. Para plotar esse gráfico corretamente, quando $\beta = 0$, fez-se uso da função x(y) para representar as distâncias cartesianas no eixo x a partir da coordenada elíptica α_y.

$$x(y) = a\cosh(\alpha_y) \tag{4.8}$$



Figuras 4.5. Variação das tensões com relação à distância da borda de um furo elíptico para (a) na direção perpendicular ao carregamento e (b) na direção do carregamento.

Pode-se perceber que as variações são muito bruscas no eixo x, mas suaves no eixo y, que é onde o extensômetro deve ser colado. Isto permite certa tolerância quanto à localização do furo elíptico em relação ao extensômetro. O mesmo não acontece com o furo circular, onde se têm variações abruptas em todas as direções, exigindo grande precisão na fabricação das rosetas utilizadas e habilidade do executor da técnica na centralização do furo.

Caso 2: carregamento biaxial (sendo Rx=Ry)

Para este caso, têm-se as seguintes condições de contorno:

1) Quando $\alpha = \alpha_0$: $R_{\alpha\alpha} = R_{\alpha\beta} = 0$
2) Quando α é muito grande: $R_{\alpha\alpha} = R_{\beta\beta}, R_{\alpha\beta} = 0$

Para estas condições Inglis determinou as constantes:

$$A_{-1} = -\frac{R}{8};\ A_{+1} = -\frac{R}{8};\ B_{-1} = \frac{R}{2}\cosh(2\alpha_0)$$

Substituindo as constantes nas equações 4.5, obtêm-se:

$$R_{\alpha\alpha} = \frac{\left\{\begin{array}{l} \left(-\frac{1}{8}\right)[-2\cos(4\beta) - 4 - 2e^{2\alpha_y} + (4e^{2\alpha_y} + 4e^{-2\alpha_y})\cos(2\beta)] \\ + \left(-\frac{1}{8}\right)[2\cos(4\beta) - (4e^{2\alpha_y} + 4e^{-2\alpha_y})\cos(2\beta) + (4 + 2e^{-4\alpha_y})] \\ + \left(\frac{\cosh(2\alpha_0)}{2}\right)[-(e^{2\alpha_y} - e^{-2\alpha_y})] \end{array}\right\}}{[\cosh(\alpha_y) - \cos(2\beta)]^2}$$

$$R_{\beta\beta} = \frac{\left\{\begin{array}{l} \left(-\frac{1}{8}\right)[4e^{2\alpha_y}\cos(2\beta) - 2\cos(4\beta) - 4 - 2e^{2\alpha_y} + 4e^{2\alpha_y}\cos(2\beta)] \\ + \left(-\frac{1}{8}\right)[2\cos(4\beta) - 8e^{-2\alpha_y})\cos(2\beta) + (4 + 2e^{-4\alpha_y})] \\ + \left(\frac{\cosh(2\alpha_0)}{2}\right)[-(e^{2\alpha_y} - e^{-2\alpha_y})] \end{array}\right\}}{[\cosh(\alpha_y) - \cos(2\beta)]^2} \quad \text{(4.9) a-b}$$

Caso 3: carregamento paralelo ao maior semi-eixo

Chega-se às equações das tensões para este caso subtraindo-se o estado de carregamento perpendicular ao maior semi-eixo da elipse (caso 1) do estado biaxial (caso 2) para carregamentos iguais, como representado na figura 4.6.

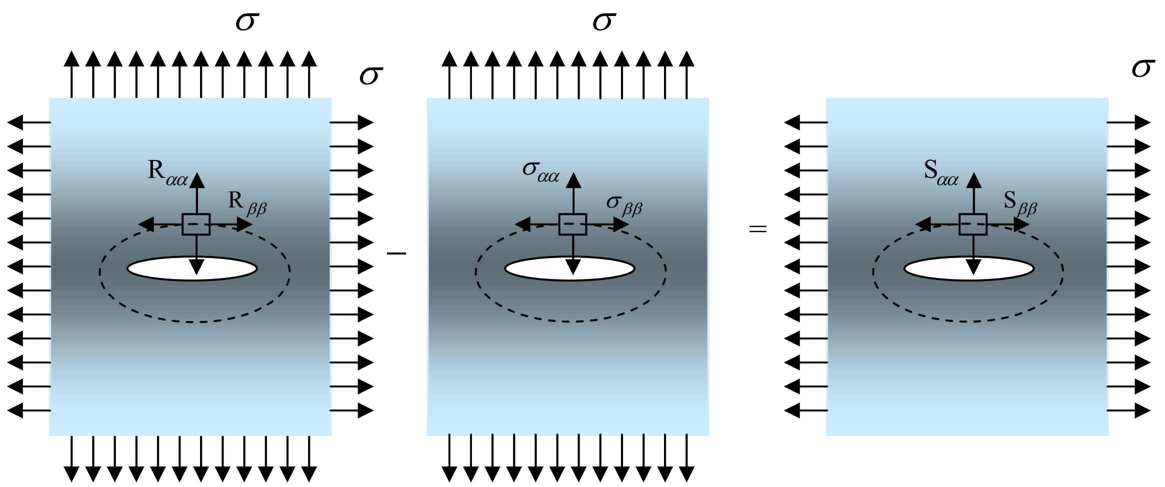
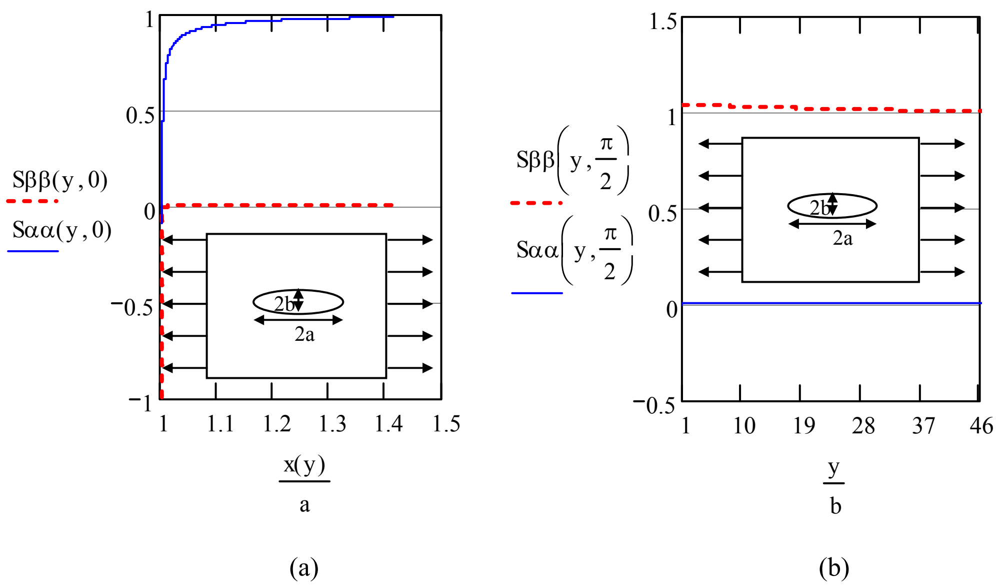


Figura 4.6. Carregamento paralelo ao semi-eixo maior da elipse como resultado da subtração do *caso 1* do *caso 2*

$$S_{\alpha\alpha} = R_{\alpha\alpha} - \sigma_{\alpha\alpha}$$
$$S_{\beta\beta} = R_{\beta\beta} - \sigma_{\beta\beta} \tag{4.10}$$

A figura 4.7 mostra o gráfico do comportamento das tensões em relação à distância do furo para este caso.



Figuras 4.7. Variação das tensões com relação à distância do furo elíptico para o (a) eixo paralelo ao carregamento e (b) eixo perpendicular ao carregamento.

O comportamento das curvas na figura 4.7 segue a tendência do apresentado no *caso 1*, mantendo uma variação quase assintótica em β = 0 e uma boa suavidade na variação na região frontal do furo.

Conhecendo o comportamento das equações para qualquer carregamento bidimensional pode-se representar o estado de tensões gerado pela concentração de tensões em torno de um furo elíptico em uma placa carregada biaxialmente, através da soma das tensões do *caso 1* e *caso 3*, como mostra a figura 4.9.

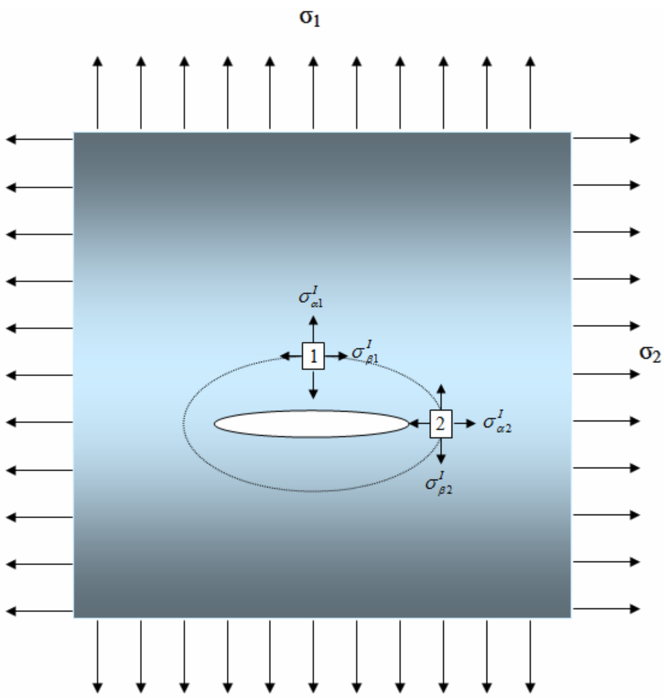


Figura 4.8. Estado de tensões originado pela concentração tensão ao redor do furo elíptico na direção dos carregamentos

Sendo:

$$\sigma^{\mathrm{I}}_{\alpha\mathrm{i}} = \sigma_1 \sigma_{\alpha\alpha}(\alpha_{\mathrm{i}}, \beta_{\mathrm{i}}) + \sigma_2 \mathrm{S}_{\alpha\alpha}(\alpha_{\mathrm{i}}, \beta_{\mathrm{i}})$$
$$\sigma^{\mathrm{I}}_{\beta\mathrm{i}} = \sigma_1 \sigma_{\beta\beta}(\alpha_{\mathrm{i}}, \beta_{\mathrm{i}}) + \sigma_2 \mathrm{S}_{\beta\beta}(\alpha_{\mathrm{i}}, \beta_{\mathrm{i}}) \tag{4.11}$$

O sobrescrito I indica que os termos usados vêm da solução de Inglis. E neste caso $\alpha_1 = \alpha_2$, pois os pontos 1 e 2 estão sobre a mesma elipse.

4.3. Problema do alívio de tensões: Coeficientes de Alívio Pontuais

Inglis estudou o problema de uma placa infinita carregada, contendo um furo elíptico. Já para a análise do problema das tensões medidas a partir das deformações lidas no extensômetro colado na frente do corte, a execução deste corte é feita com o espécime carregado. Então, usando o princípio da superposição, a solução de Inglis deve ser subtraída do estado de tensões da placa sem o furo para que se obtenham os valores de deformação a serem medidos pelo extensômetro. A figura 4.9 mostra o esquema dessa superposição de estados, que é similar à feita para o furo circular no capítulo 3.

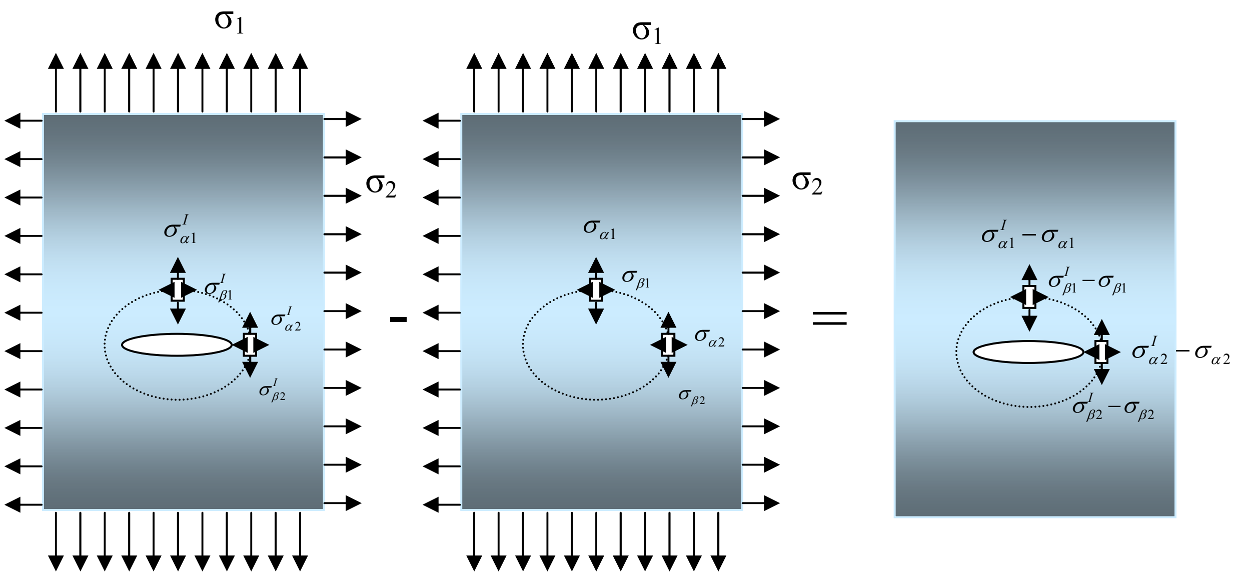


Figura 4.9. Princípio da superposição aplicado ao método do furo elíptico

O estado de tensões para o caso de carregamento biaxial da placa sem furo é semelhante ao definido para a superposição do caso do furo circular. Troca-se apenas o ângulo θ (polar) pelo β (hiperbólico) e faz-se a rotação de 90º, necessária pela defasagem do ângulo do carregamento principal $\boldsymbol{\sigma_1}$ em relação à x para o qual os estados polar e elíptico foram deduzidos. Isto muda as condições de contorno usadas para definir as equações, assim:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\beta$$

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\beta \tag{4.12}$$

4.3.1. Carregamento Perpendicular ao Maior Semi-eixo do Corte

Para o carregamento perpendicular ao maior semi-eixo da elipse que representa o corte (σ_1 da figura 4.9), as expressões gerais para os coeficientes de alívio pontuais, provocados pelo corte são:

$$\sigma_{\alpha f} = \sigma_{\alpha\alpha}\sigma_1 - \left(\frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_1}{2}\cos 2\beta\right)$$

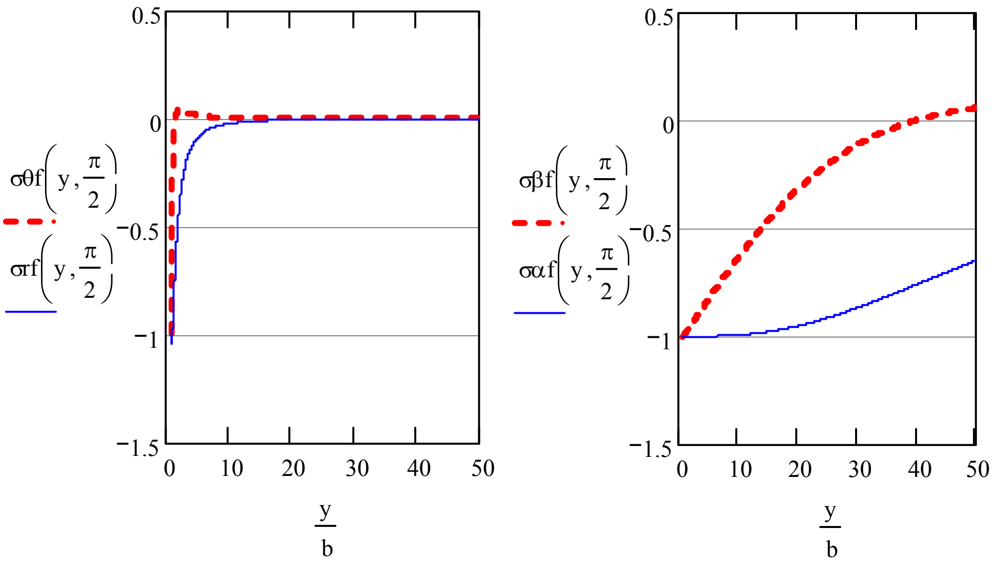
$$\sigma_{\beta f} = \sigma_{\beta\beta}\sigma_1 - \left(\frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2}\cos 2\beta\right) \tag{4.13 a-b}$$

Quando $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, que é o caso de interesse para a análise em questão, tem-se:

$$\sigma_{\alpha f} = (\sigma_{\alpha\alpha} - 1)\sigma_1$$

$$\sigma_{\beta f} = \sigma_{\beta\beta}\sigma_1 \tag{4.14 a-b}$$

A figura 4.10 mostra o gráfico que representa o comportamento dos coeficientes de alívio pontuais em relação à distância do furo com $\beta = \pi/2$ (parte frontal do furo) para o furo circular e para o furo elíptico de semi-exos *a = 50 e b = 1*, considerando o carregamento σ_1 unitário. Para as duas geometrias foram usadas as equações 4.13.



(a) (b)

Figura 4.10. Comportamento dos coeficientes de alívio pontuais com a distância normalizada (y/b) para o carregamento na direção y: (a) para o furo circular e (b) para o furo elíptico

O gráfico deixa clara a grande sensibilidade à distância do estado de tensões geradas por um furo circular, em comparação com a suavidade da variação em torno do furo elíptico na posição $\beta = \pi / 2$ (ao longo do eixo y).

4.3.2. Para o Carregamento Paralelo ao Maior Semi-eixo do Corte

As expressões gerais dos coeficientes de alívio pontuais para o carregamento paralelo ao maior semi-eixo da elipse que representa o corte são:

$$S_{\alpha f} = S_{\alpha\alpha}\sigma_2 - \left(\frac{\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2}{2}\cos(2\beta) \right)$$

$$S_{\beta f} = S_{\beta\beta}\sigma_2 - \left(\frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2}{2}\cos(2\beta) \right) \qquad (4.15)\text{ a-b}$$

Inserindo as equações 4.10 nas equações acima, chega-se a:

$$S_{\alpha f} = (R_{\alpha\alpha} - \sigma_{\alpha\alpha})\sigma_2 - \left(\frac{\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2}{2}\cos(2\beta)\right)$$

(4.16) a-b

$$S_{\beta f} = (R_{\beta\beta} - \sigma_{\beta\beta})\sigma_2 - \left(\frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2}{2}\cos(2\beta)\right)$$

A figura 4.11 mostra o gráfico que representa o comportamento de S_{af} e S_{bf} em relação à distância do furo com $b = \frac{p}{2}$ (parte frontal do furo), para o furo circular e para o furo elíptico de semi-exos $a = 50$ *e* $b = 1$, considerando o carregamento s_2 unitário.

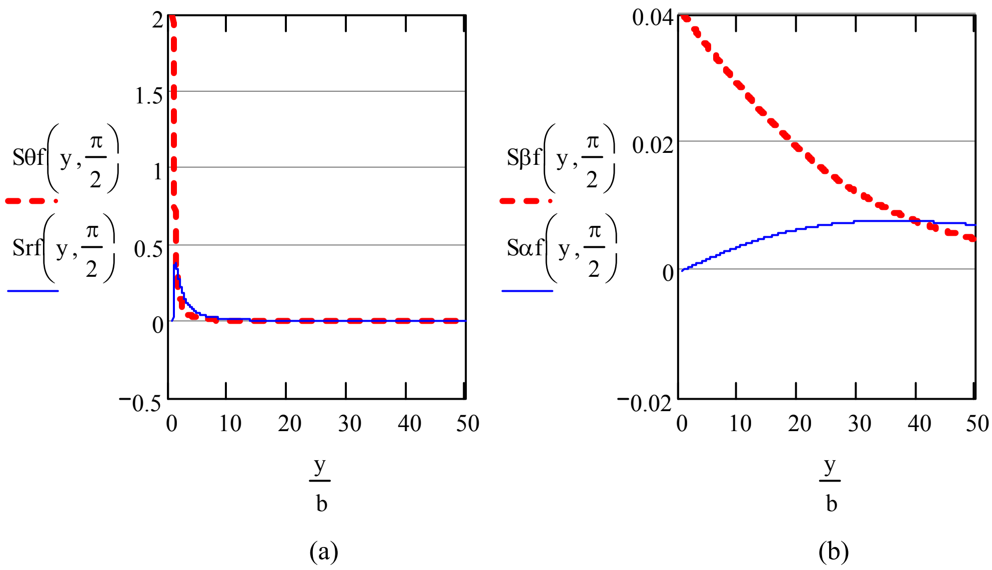


Figura 4.11. Comportamento dos coeficientes de alívio pontuais com a distância normalizada (y/b) para o carregamento na direção x: (a) para o furo circular e (b) para o furo elíptico

Na figura 4.11, nota-se novamente a suavidade de variação dos coeficientes de alívio em torno do furo elíptico na posição $\beta = \pi/2$, também para o carregamento na direção x (paralela ao corte). O mesmo não acontece para o furo circular, como se pode perceber pelo gráfico 4.11 (a).

4.4. Problema do alívio de tensões: - Coeficientes de Alívio sob a Área da *Grid* do Extensômetro

Schajer [14], em uma análise sobre o método do furo cego, modelou a deformação medida por *strain gages* pela integração das deformações ocorridas sob a área de sua *grid* de medição. Mas como as equações para o furo elíptico são bem mais complexas do que as do furo circular, seria muito dispendioso integrá-las duplamente, então se optou por integrá-las apenas ao longo da distância perpendicular ao corte, o que é bastante aceitável levando-se em consideração que o comprimento do furo elíptico é muito grande e a variação de sua curvatura até a sua ponta é muito suave quando comparado com o furo circular. Assim, não são esperadas variações consideráveis do alívio de deformações ao longo da dimensão do extensômetro paralela ao corte.

4.4.1. Carregamento Perpendicular ao Maior Semi-eixo do Corte

Os coeficientes de alívio sob a área do extensômetro para o carregamento perpendicular ao maior semi-eixo do corte são dados pelas integrações:

$$\sigma_{\alpha E} = \frac{\left(\int_{b+df}^{b+df+cg} \sigma_{\alpha f}\left(y, \frac{\pi}{2}\right)\right)}{cg}$$

$$\sigma_{\beta E} = \frac{\left(\int_{b+df}^{b+df+cg} \sigma_{\beta f}\left(y, \frac{\pi}{2}\right)\right)}{cg} \qquad (4.17)\ \text{a-b}$$

onde *df* é a distância do meio do corte à grade de medição do extensômetro e *cg* é o comprimento da grade de medição. Para o caso de cortes paralelos a integração deve ser feita ao longo da largura do gage (*lg*), que substituirá *cg* nas equações.

4.4.2. Carregamento Perpendicular ao maior semi-eixo do corte

Integrando-se as equações 4.16 ao longo da largura do gage (l_g), chega-se às expressões dos coeficientes de alívio que agem sob a área do extensômetro pela realização do corte paralelo ao maior semi-eixo do corte:

$$S_{\alpha E} = \frac{\left(\int_{b+df}^{b+df+lg} S_{\alpha f}\left(y, \frac{\pi}{2} \right) \right)}{lg}$$

$$S_{\beta E} = \frac{\left(\int_{b+df}^{b+df+lg} S_{\beta f}\left(y, \frac{\pi}{2} \right) \right)}{lg} \qquad (4.18)\ a\text{-}b$$

4.5. Outros Parâmetros de influência nas Deformações Medidas

4.5.1. Ordem de realização dos cortes

Em medições de peças sob carregamento biaxial há a necessidade da realização de dois cortes: um perpendicular e um paralelo ao extensômetro. Um fator de suma importância para o equacionamento da deformação aliviada na aplicação da técnica do furo elíptico é a ordem de realização dos cortes. As figuras 4.11(a) e (b) mostram esquemas de placas carregadas biaxialmente onde se realizam o primeiro corte de forma perpendicular ou de forma paralela ao *strain gage*, respectivamente.

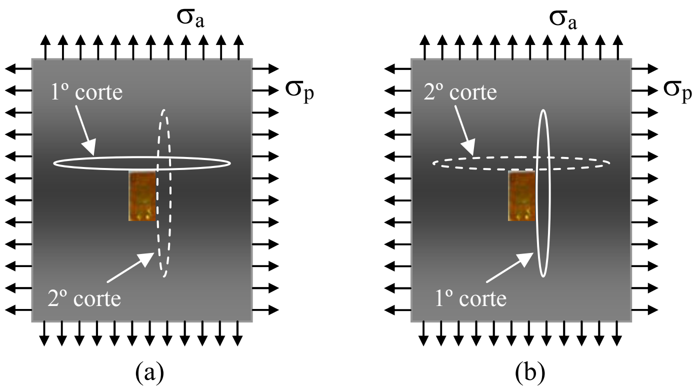


Figura 4.11. Placa carregada biaxialmente com primeiro corte: (a) perpendicular e (b) paralelo ao *strain gage.*

4.5.1.1. Primeiro Corte: perpendicular ao extensômetro

Para este caso, a deformação aliviada devido ao primeiro corte será:

$$\varepsilon_{\mathrm{a}} = \frac{1}{\mathrm{E}}\left[(\sigma_{\mathrm{a}}\sigma_{\alpha\mathrm{E}} + \sigma_{\mathrm{p}}\mathrm{S}_{\alpha\mathrm{E}}) - \upsilon(\sigma_{\mathrm{a}}\sigma_{\beta\mathrm{E}} + \sigma_{\mathrm{p}}\mathrm{S}_{\beta\mathrm{E}})\right] \qquad (4.19)$$

E a deformação gerada pelo segundo corte é:

$$\varepsilon_{\mathrm{p}\upsilon} = -\frac{\upsilon}{\mathrm{E}}\left(\sigma_{\mathrm{p}}\sigma_{\alpha\mathrm{El}}\right) \qquad (4.20)$$

As tensões existentes são obtidas invertendo-se as equações 4.20 e 4.21:

$$\sigma_{\mathrm{p}} = -\frac{\mathrm{E}\varepsilon_{\mathrm{p}\upsilon}}{\upsilon\sigma_{\alpha\mathrm{El}}}$$

$$\sigma_{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{E}\varepsilon_{\mathrm{a}} + \dfrac{\mathrm{E}\varepsilon_{\mathrm{p}\upsilon}}{\upsilon\sigma_{\alpha\mathrm{El}}}\left(\mathrm{S}_{\alpha\mathrm{E}} - \upsilon\mathrm{S}_{\beta\mathrm{E}}\right)}{\left(\sigma_{\alpha\mathrm{E}} - \upsilon\sigma_{\beta\mathrm{E}}\right)} \qquad (4.21)\ \text{a-b}$$

onde:

ε_{a} = deformação na direção axial à grade extensômetro

$\varepsilon_{\mathrm{p}\upsilon}$ = deformação por efeito de Poisson devido ao corte paralelo à grade extensômetro

E = módulo de elasticidade do material

υ = coeficiente de Poisson do material

σ_a = tensão atuante na direção da *grid* do extensômetro

σ_p = tensão perpendicular à *grid* extensômetro

$\sigma_{\alpha E}$ = coeficiente de alívio perpendicular ao corte referente à tensão perpendicular ao corte

$S_{\alpha E}$ = coeficiente de alívio perpendicular ao corte referente à tensão paralela ao corte

$\sigma_{\beta E}$ = coeficiente de alívio paralelo ao corte referente à tensão perpendicular ao corte

$S_{\beta E}$ = coeficiente de alívio paralelo ao corte referente à tensão paralela ao corte

Observação: O subscrito “l” (nas equações 4.20, 4.21a, 4.22 e 4.24b) informa que a integração para obtenção do coeficiente é feita ao longo da largura do extensômetro, ficando implícito que a integração foi ao longo do comprimento se não houver indicação.

4.5.1.2. Primeiro corte: paralelo ao extensômetro

Agora a deformação aliviada devida ao primeiro corte será:

$$\varepsilon_{p\upsilon} = \frac{1}{E}\left[(\sigma_a S_{\beta El} + \sigma_p \sigma_{\beta El}) - \upsilon(\sigma_a S_{\alpha El} + \sigma_p \sigma_{\alpha El})\right] \quad (4.22)$$

O segundo corte provoca uma deformação dada por:

$$\varepsilon_a = \frac{(\sigma_a \sigma_{\alpha E})}{E} \quad (4.23)$$

As tensões existentes são obtidas invertendo-se as equações 4.22 e 4.23:.

$$\sigma_a = \frac{E\varepsilon_a}{\sigma_{\alpha E}}$$

$$\sigma_p = \frac{E\varepsilon_{p\upsilon} + \frac{E\varepsilon_a}{\sigma_{\alpha E}}\left(S_{\alpha El} - \upsilon S_{\beta El}\right)}{\left(\sigma_{\beta E} - \upsilon\sigma_{\alpha E}\right)} \quad (4.24)\text{ a-b}$$

4.5.2. Profundidade do Corte

Toda a formulação exposta até o momento diz respeito ao caso de um furo elíptico passante. Porém, medições com a técnica do furo elíptico podem ser realizadas sem que o espécime seja atravessado em sua espessura, ficando a cargo do executor interromper o avanço quando perceber a estabilização da deformação obtida de uma profundidade a outra. Para este caso, baseando-se em observações experimentais que serão mostradas no capítulo 5, a formulação apresentada até o momento deve ser modificada para a determinação das tensões existentes. Para cortes não passantes, eliminam-se os coeficientes de alívio transversais $\sigma_{\beta E}$ e $\sigma_{\beta El}$, que só se manifestam quando a espessura do espécime é atravessada, como foi verificado nos experimentos, que serão apresentados no capítulo 5.

Com as simplificações nas equações 4.21 e 4.24, cabíveis aos casos de cortes não passantes, para o primeiro corte for transversal ao extensômetro tem-se:

$$\sigma_{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{E}\varepsilon_{\mathrm{a}} + (\mathrm{E}\varepsilon_{\upsilon \mathrm{p}} / \upsilon\sigma_{\alpha \mathrm{El}})(\mathrm{S}_{\alpha \mathrm{E}} - \upsilon \mathrm{S}_{\beta \mathrm{E}})}{\sigma_{\alpha \mathrm{E}}}$$

$$\sigma_{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{E}\varepsilon_{\upsilon \mathrm{p}}}{\upsilon\sigma_{\alpha \mathrm{El}}} \qquad (4.25)\text{ a-b}$$

e se o primeiro corte for paralelo ao extensômetro.:

$$\sigma_{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{E}\varepsilon_{\mathrm{a}}}{\sigma_{\alpha \mathrm{E}}}$$

$$\sigma_{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{E}\varepsilon_{\mathrm{p}\upsilon} + (\mathrm{E}\varepsilon_{\mathrm{a}} / \sigma_{\alpha \mathrm{El}})(\mathrm{S}_{\alpha \mathrm{El}} - \rho \mathrm{S}_{\beta \mathrm{El}})}{-\upsilon\sigma_{\alpha \mathrm{E}}} \qquad (4.26)\text{ a-b}$$

Sendo σ_{a} e σ_{p}, respectivamente, iguais a σ_{l} e σ_{c} para os extensômetros colados na direção longitudinal. E σ_{a} e σ_{p}, respectivamente, iguais a σ_{c} e σ_{l} para os extensômetros colados na direção circunferencial. A mesma convenção é válida para as deformações.

4.6. Procedimento experimental

A técnica do furo elíptico, ao contrário da técnica do furo cego, não tem parâmetros ou procedimentos bem definidos. Muitas das variáveis envolvidas em sua aplicação ficam a cargo do executor. Por isso, achou-se por bem descrever apenas os procedimentos utilizados nas medições desta tese, com os parâmetros que se resolveu adotar para estas medições. Os procedimentos estão descritos no capítulo 5, nos tópicos referentes às medições laboratoriais.