

7 Análise de sensibilidade

7.1. Introdução

De acordo com Hart (1982), Zhang (2002), Rubin (2003) e Ghanem e Spanos 2003, e como apresentado no capítulo anterior desse trabalho, ao se resolver problemas de análise estatística utilizando métodos de perturbação, necessita-se a avaliação das derivadas das funções resposta em relação às variáveis aleatórias do problema. Segundo Haftka e Gürdal (1993) e Kleiber *et al* (1997), a determinação destas derivadas é conhecida, na literatura, como análise de sensibilidade.

Nesse trabalho a formulação para análise de sensibilidade apresenta-se inicialmente de forma geral. Apresentam-se o método de diferenciação direto, o método de diferenciação adjunto e a aproximação por diferenças finitas. A seguinte parte deste capítulo trata da análise de sensibilidade das respostas do problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico em relação as variáveis aleatórias. Primeiramente no caso em que se utiliza o procedimento *staggered* e posteriormente para o procedimento totalmente acoplado.

7.2. Método de diferenciação direto

Para apresentação do método de diferenciação direto considera-se uma função g explicitamente dependente de A e implicitamente dependente de um parâmetro r , ou seja

$$G(r) = g(A(r); r) \quad (7.1)$$

Para avaliação da sensibilidade dessa função em relação ao parâmetro r , aplica-se uma perturbação ao parâmetro, obtendo-se

$$\bar{\delta} G(r) = \frac{\partial g}{\partial A} \frac{dA}{dr} \delta r + \frac{\partial g}{\partial r} \delta r \quad (7.2)$$

Nota-se que o primeiro termo do lado direito da equação não pode ser calculado diretamente, uma vez que é implicitamente dependente de r . Kleiber *et al* (1997) utilizaram a seguinte notação para representar (7.2).

$$\bar{\delta} G = \tilde{\delta} g + \partial g \quad (7.3)$$

Onde $\bar{\delta} G$ representa a variação total de G em relação à r , $\tilde{\delta} g$, representa os termos referentes à variação implícita em r e ∂g representa os termos de variação explícita em r . Pode-se segundo essa notação escrever (7.2) como

$$\bar{\delta} G = \frac{\partial g}{\partial A} \bar{\delta} A + \partial g \quad (7.4)$$

A função resíduo, possui as mesmas características da função. $g(A(r); r)$. Para problemas não dependentes da trajetória de tensões a função resíduo pode ser posta em função de suas variáveis, obtidas após convergência como

$$R = R(q(r); r) \cong 0 \quad (7.5)$$

Escrevendo (7.5) na forma de (7.4) tem-se

$$\bar{\delta} R = \frac{\partial R}{\partial q} \bar{\delta} q + \partial R \cong 0 \quad (7.6)$$

Ou, em forma de derivadas

$$\frac{\partial R}{\partial q} \frac{dq}{dr} + \frac{\partial R}{\partial r} \cong 0 \quad (7.7)$$

Sendo R explicitamente dependente de r . Com a expressão (7.7) pode-se avaliar a sensibilidade dos deslocamentos e poro pressões com relação as variáveis aleatórias r .

Para problemas dependentes da trajetória de tensões o resíduo depende das variáveis de estado no instante $t + \Delta t$, assim

$${}^{t+\Delta t} R = R({}^{t+\Delta t} q(r), \sigma(r); r) \cong 0 \quad (7.8)$$

Escrevendo (7.8) na forma (7.4) obtém-se

$$\bar{\delta} {}^{t+\Delta t} R = \frac{\partial {}^{t+\Delta t} R}{\partial q} \bar{\delta} {}^{t+\Delta t} q + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} R}{\partial \sigma} \bar{\delta} {}^{t+\Delta t} \sigma + \partial {}^{t+\Delta t} R \cong 0 \quad (7.9)$$

Em termos de derivadas tem-se

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t} R}{\partial q} \frac{d {}^{t+\Delta t} q}{dr} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} R}{\partial \sigma} \frac{d {}^{t+\Delta t} \sigma}{dr} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} R}{\partial r} \cong 0 \quad (7.10)$$

Sabe-se que

$${}^{t+\Delta t}\sigma({}^t\sigma, \delta\varepsilon(q); r) = {}^t\sigma + \delta\sigma({}^t\sigma, \delta\varepsilon(q); r) \quad (7.11)$$

O que indica que, para se conhecer a sensibilidade dos deslocamentos e pressões no instante $t + \Delta t$ é necessário conhecer a sensibilidade das tensões no instante $t + \Delta t$. Por sua vez, para se obter a sensibilidade das tensões no instante $t + \Delta t$ é necessário se conhecer todo o histórico de sensibilidades. Em geral, isso é de difícil obtenção, sendo indicado para problemas dependentes da trajetória de tensões que a análise de sensibilidade seja efetuada por diferenças finitas.

7.3. Método de diferenciação adjunto

Outra forma de diferenciação da função $g(q(r); r)$ pode ser realizada utilizando-se o método de diferenciação adjunto. Nesse método acrescentam-se na equação a ser diferenciada multiplicadores de Lagrange λ , dessa forma para problemas não dependentes da trajetória de tensões tem-se

$$g^*(q(r); r) = g(q(r); r) + \lambda R(q(r); r) \quad (7.12)$$

Onde $R(q(r); r) \cong 0$ é o resíduo obtido após convergência. Para efeito de descrição do método adjunto o resíduo é considerado nulo, dessa forma, o termo acrescido à função $g(q(r); r)$ não altera o significado da mesma. Dessa forma, após um incremento de tempo pode-se calcular a sensibilidade da função $g^*(q(r); r)$, derivando (7.12). Assim

$$\begin{aligned} \frac{dg^*(q(r); r)}{dr} &= \frac{\partial g(q(r); r)}{\partial r} + \frac{\partial g(q(r); r)}{\partial q} \frac{\partial q(r)}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} R(q(r); r) \\ &+ \lambda \frac{\partial R(q(r); r)}{\partial r} + \lambda \frac{\partial R(q(r); r)}{\partial q} \frac{\partial q(r)}{\partial r} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Agora, considerando o fato de $R(q(r); r) \cong 0$ e rearranjando os termos de (7.13) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dg^*(q(r); r)}{dr} &= \frac{\partial g(q(r); r)}{\partial r} + \left(\frac{\partial g(q(r); r)}{\partial q} + \lambda \frac{\partial R(q(r); r)}{\partial q} \right) \frac{\partial q(r)}{\partial r} \\ &+ \lambda \frac{\partial R(q(r); r)}{\partial r} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Fazendo-se o termo entre parênteses igual a zero obtém-se

$$\frac{dg^*(q(r);r)}{dr} = \frac{\partial g(q(r);r)}{\partial r} + \lambda \frac{\partial R(q(r);r)}{\partial r} \quad (7.15)$$

Com a seguinte condição a ser atendida

$$\left(\frac{\partial g(q(r);r)}{\partial q} + \lambda \frac{\partial R(q(r);r)}{\partial q} \right) = 0 \quad (7.16)$$

Dessa maneira (7.15) é a equação para obtenção da sensibilidade pelo método adjunto. Nota-se que após o cálculo de λ , (7.16) se transforma numa derivada com todos os termos explicitamente definidos.

Em problemas dependentes da trajetória de tensões as dificuldades encontradas no método de diferenciação direta também são verificadas no método adjunto, ou seja, alguns termos a serem derivados são dependentes das tensões, deslocamentos e poro pressões, tornando nesse caso esse procedimento ineficiente.

De acordo com Haftka *et al* (1993) o esforço computacional associado a cada método de diferenciação depende do número de variáveis a serem diferenciadas e do número de variáveis aleatórias do problema. Por exemplo, em problemas não dependentes da trajetória de tensões, o método de diferenciação direta requer que a equação (7.7) seja avaliada para cada variável aleatória e o método adjunto requer que a expressão (7.16) seja avaliada para cada variável a ser diferenciada (deslocamentos e poro pressões). Dessa maneira, o método de diferenciação direta é mais eficiente quando o número de variáveis aleatórias é menor que o número de variáveis a serem diferenciadas. O método adjunto, por sua vez, é mais eficiente quando o número de variáveis aleatórias é maior que o número de variáveis a serem diferenciadas. Pode-se considerar o aspecto da avaliação do problema no tempo, tornando o uso do método adjunto mais interessante.

7.4. Aproximação por diferenças finitas

Dada uma função $f(r)$, a aproximação de primeira ordem $\frac{\Delta f}{\Delta r}$ da derivada $\frac{df}{dr}$ é dada por

$$\frac{\Delta f}{\Delta r} = \frac{f(r + \Delta r) - f(r)}{\Delta r} \quad (7.17)$$

Onde, Δr é uma perturbação absoluta e pequena o suficiente para produzir bons resultados. Esta perturbação é definida por:

$$\Delta r = \eta r \quad (7.18)$$

sendo η uma perturbação relativa.

Caso se deseje obter a derivada primeira em relação à n variáveis, a aproximação por diferenças finitas necessita de n análises adicionais.

A determinação do tamanho do passo Δr é fundamental para a utilização desta técnica, pois existem duas possibilidades de erro associadas a este fator: condição de erro e truncamento.

O erro por truncamento $\epsilon^T(\Delta r)$, resulta da negligência de termos na expansão em série de Taylor para a função perturbada. Por exemplo, a expansão até segunda ordem em série de Taylor em torno do ponto r da função perturbada $f(r + \Delta r)$ pode ser escrita como:

$$f(r + \Delta r) = f(r) + \Delta r \frac{df(r)}{dr} + \frac{(\Delta r)^2}{2} \frac{d^2 f(r + \zeta \Delta r)}{dr^2} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (7.19)$$

Da equação (7.19) verifica-se que o erro de truncamento para a aproximação por diferenças finitas é:

$$\epsilon^T(\Delta r) = \frac{(\Delta r)^2}{2} \frac{d^2 f(r + \zeta \Delta r)}{dr^2} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (7.20)$$

Já, a condição de erro é a diferença entre a avaliação numérica e o valor exato da função. Uma contribuição para a condição de erro é o “erro de arredondamento” no cálculo de $\frac{df}{dr}$ dos valores originais e perturbados.

Segundo Haftka *et al* (1993) selecionando-se um tamanho de passo muito pequeno reduz-se os erros por truncamento, entretanto ocorrerão excessivas condições de erro.

É possível se empregar aproximações por diferenças finitas para derivadas de mais alta ordem, entretanto o custo computacional elevado faz com que raramente seja utilizada essa técnica. Por exemplo, para derivada de segunda ordem em relação à n variáveis seriam necessárias $2n$ análises adicionais.

$$\frac{\Delta^2 f}{\Delta r^2} = \frac{f(r - \Delta r) + f(r + \Delta r) - 2f(r)}{\Delta r^2} \quad (7.21)$$

7.5. Análise de sensibilidade para o procedimento *staggered*

Utilizando os conceitos apresentados no item anterior, aplica-se o método de diferenciação direta para determinação da sensibilidade dos deslocamentos e poro pressões em relação às variáveis aleatórias \mathbf{r} . Considera-se o problema como não dependente da trajetória de tensões (linear). Assim de (7.7) se escreve:

$$\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{d\mathbf{r}} = [\mathbf{K}]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \Delta t \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{r}} ({}^t \mathbf{u} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} ({}^t \mathbf{p} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}) \\ - \mathbf{L} \left(\frac{\partial {}^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \right) + \mathbf{K} \frac{\partial {}^t \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \end{array} \right\} \quad (7.22)$$

$$\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}}{d\mathbf{r}} = [\mathbf{G} + \theta \Delta t \mathbf{H}]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{r}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}) - \mathbf{L}^T \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial {}^t \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right) \\ + \mathbf{G} \frac{\partial {}^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{p} - {}^t \mathbf{p}) + \Delta t \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{h}}{\partial \mathbf{r}} \\ - (1 - \theta) \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} {}^t \mathbf{p} - (1 - \theta) \Delta t \mathbf{H} \frac{\partial {}^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \\ - \theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} \end{array} \right\} \quad (7.23)$$

Verificam-se nas equações (7.22) e (7.23) a interdependência das mesmas, ou seja, a sensibilidade dos deslocamentos depende da sensibilidade das poro pressões e vice versa. Dessa maneira, uma estratégia iterativa deve ser adotada para a avaliação das sensibilidades num instante $t + \Delta t$.

$t + \Delta t$. Estimativa inicial $\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}}{d\mathbf{r}} = \frac{d^t \mathbf{p}}{d\mathbf{r}}$	Etapa 1
Procedimento <i>staggered</i> iteração: $j+1$	Etapa 2
Avalia-se $\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{j+1}}{d\mathbf{r}}$ com (7.22) e verifica-se a convergência da sensibilidade dos deslocamentos com: $\left \frac{\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{j+1}}{d\mathbf{r}}}{\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{j+1}}{d\mathbf{r}}} - \frac{\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}^j}{d\mathbf{r}}}{\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}^j}{d\mathbf{r}}} \right \leq tol$	Etapa 3

<p>Com o vetor $\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{d\mathbf{r}}$ obtido na etapa 3 avalia-se $\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{j+1}}{d\mathbf{r}}$ com (7.23) e verifica-se a convergência da sensibilidade das poro pressões com:</p> $\left \frac{\left \frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{j+1}}{d\mathbf{r}} \right - \left \frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}^j}{d\mathbf{r}} \right }{\left \frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{j+1}}{d\mathbf{r}} \right } \right \leq tol$	Etapa 4
<p>Se as desigualdades das etapas 3 e 4 não forem atendidas, retorna-se a etapa 2 com os valores atualizados de $\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}}{d\mathbf{r}}$.</p> <p>Caso contrário, faz-se $j=0$ e um novo passo se inicia na Etapa 1.</p>	Etapa 5

Para o cômputo das sensibilidades dos deslocamentos e poro pressões em relação as variáveis aleatórias \mathbf{r} pelo método adjunto, para problemas não dependentes da trajetória de tensões têm-se

$$\frac{d^{t+\Delta t} u_i}{d\mathbf{r}} = \lambda_u^T \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{r}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{p} - {}^t \mathbf{p}) \\ - \mathbf{L} \left(\frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial {}^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \right) + \mathbf{K} \frac{\partial {}^t \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \end{array} \right\} \quad (7.24)$$

$$\text{Sendo } \lambda_u = [\mathbf{K}]^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{u}}$$

$$\frac{d^{t+\Delta t} p_i}{d\mathbf{r}} = \lambda_p^T \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{r}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}) - \mathbf{L}^T \left(\frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial {}^t \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right) \\ + \mathbf{G} \frac{\partial {}^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{p} - {}^t \mathbf{p}) + \Delta t \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{h}}{\partial \mathbf{r}} \\ - (1-\theta)\Delta t \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} {}^t \mathbf{p} - (1-\theta)\Delta t \mathbf{H} \frac{\partial {}^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \\ - \theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} \end{array} \right\} \quad (7.25)$$

$$\text{Sendo } \lambda_p = [\mathbf{G} + \theta \Delta t \mathbf{H}]^{-1} \frac{\partial p_i}{\partial \mathbf{p}}$$

Assim como no método de diferenciação direta, verifica-se para o método adjunto, a necessidade de um esquema iterativo como o apresentado no quadro anterior.

7.6. Análise de sensibilidade para o procedimento totalmente acoplado

Para o procedimento totalmente acoplado as sensibilidades dos deslocamentos e poro pressões, no problema não dependente da trajetória de tensões (linear), são obtidas, para o método de diferenciação direta, pela seguinte forma matricial

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{G} + \theta\Delta t\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^{t+\Delta t}\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} \\ \frac{d^{t+\Delta t}\mathbf{p}}{d\mathbf{r}} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{G} - (1-\theta)\Delta t\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^t\mathbf{u}}{\partial\mathbf{r}} \\ \frac{\partial^t\mathbf{p}}{\partial\mathbf{r}} \end{Bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} -\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{r}} \\ \frac{\partial\mathbf{L}^T}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{r}} - (1-\theta)\Delta t\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t\mathbf{u} \\ {}^t\mathbf{p} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{r}} \\ \frac{\partial\mathbf{L}^T}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{r}} + \theta\Delta t\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{p} \end{Bmatrix} & \quad (7.26) \\
 + \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^{t+\Delta t}\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}} \\ \Delta t\frac{\partial^{t+\Delta t}\mathbf{h}}{\partial\mathbf{r}} \end{Bmatrix} &
 \end{aligned}$$

Para o método adjunto utilizam-se as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{t+\Delta t}u_i}{d\mathbf{r}} = \lambda_u^T & \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{G} - (1-\theta)\Delta t\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^t\mathbf{u}}{\partial\mathbf{r}} \\ \frac{\partial^t\mathbf{p}}{\partial\mathbf{r}} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{r}} \\ \frac{\partial\mathbf{L}^T}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{r}} - (1-\theta)\Delta t\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t\mathbf{u} \\ {}^t\mathbf{p} \end{Bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} -\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{r}} \\ \frac{\partial\mathbf{L}^T}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{r}} + \theta\Delta t\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{p} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^{t+\Delta t}\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}} \\ \Delta t\frac{\partial^{t+\Delta t}\mathbf{h}}{\partial\mathbf{r}} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7.27) \\
 \lambda_u &= \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{G} + \theta\Delta t\mathbf{H} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^{t+\Delta t} p_i}{d\mathbf{r}} = \lambda_p^T & \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{G} - (1-\theta)\Delta t \mathbf{H} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^t \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \end{Bmatrix} \\ & + \left[\begin{array}{cc} -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}} - (1-\theta)\Delta t \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} {}^t \mathbf{u} \\ {}^t \mathbf{p} \end{Bmatrix} \\ & - \left[\begin{array}{cc} -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}} + \theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \\ \Delta t \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{h}}{\partial \mathbf{r}} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7.28) \\
\lambda_p & = \left[\begin{array}{cc} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{G} + \theta \Delta t \mathbf{H} \end{array} \right]^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\partial p_i}{\partial \mathbf{p}} \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

7.7. Análise de sensibilidade das tensões

As sensibilidades das tensões efetivas em relação às variáveis aleatórias \mathbf{r} , em problemas não dependentes da trajetória de tensões, são dadas por:

$$\frac{\partial^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{D}_T}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}^{t+\Delta t} \mathbf{u} + \mathbf{D}_T \mathbf{B} \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \quad (7.29)$$

Sendo a matriz \mathbf{B} da equação (7.29) a matriz de compatibilidade que relaciona deslocamentos e deformações.

As sensibilidades das tensões totais em relação às variáveis aleatórias \mathbf{r} , em problemas não dependentes da trajetória de tensões, são dadas por:

$$\frac{\partial^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{D}_T}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}^{t+\Delta t} \mathbf{u} + \mathbf{D}_T \mathbf{B} \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} - \mathbf{L} \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \quad (7.30)$$

7.8. Exemplo de análise de sensibilidade

Para verificar a formulação proposta e comparar o desempenho de cada método de análise de sensibilidade, efetua-se a análise de sensibilidade de deslocamentos e poro pressões da coluna da Figura 7.1 em relação à permeabilidade intrínseca e ao módulo de elasticidade transversal do elemento de referência destacado na figura. Os dados do problema são os apresentados na

Tabela 5.1. Para análise de sensibilidade por diferenças finitas utilizou-se uma perturbação relativa de 1.0^{-4} .

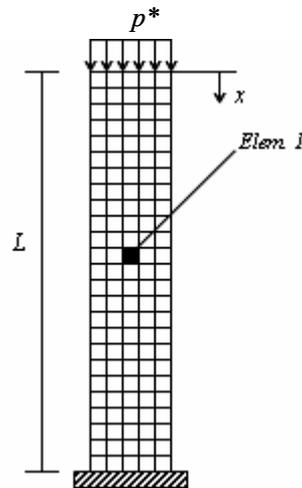


Figura 7.1 Coluna poroelástica e elemento de referência para análise de sensibilidade

Os resultados apresentados a seguir referem-se aos obtidos com os métodos de diferenciação, direto, adjunto e diferenças finitas. Tomam-se os instantes 1 e 100 segundos para apresentação dos resultados. Nas figuras seguintes, as letras a, b e c referem-se respectivamente aos métodos, direto, adjunto e diferenças finitas.

Na Figura 7.2 apresentam-se os resultados para sensibilidade dos deslocamentos verticais da coluna, em relação à permeabilidade intrínseca do elemento de referência, no instante 1 segundo. Na Figura 7.3 os resultados dizem respeito ao instante 100 segundos.

Nota-se, que os resultados obtidos com os três métodos são muito semelhantes, validando dessa forma a formulação proposta para obtenção desses resultados. Com respeito ao comportamento das respostas é possível se observar que para o instante 1 segundo os deslocamentos verticais mais sensíveis à perturbação da permeabilidade intrínseca do elemento de referência encontram-se próximos ao elemento de referência. Com o processo de adensamento da coluna poroelástica, se verifica que os deslocamentos verticais mais sensíveis encontram-se próximos ao topo da coluna.

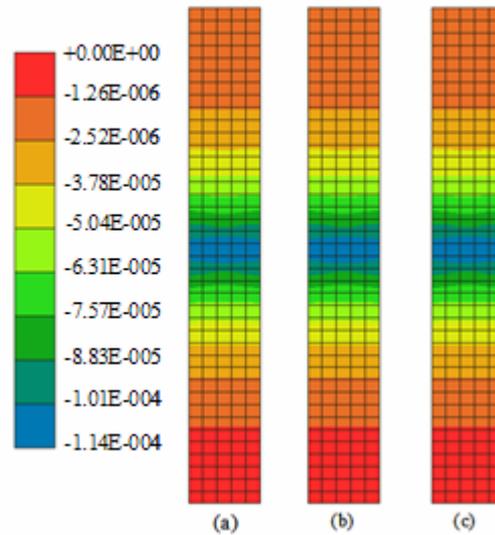


Figura 7.2 Sensibilidade dos deslocamentos verticais em relação à K , (1 segundo)

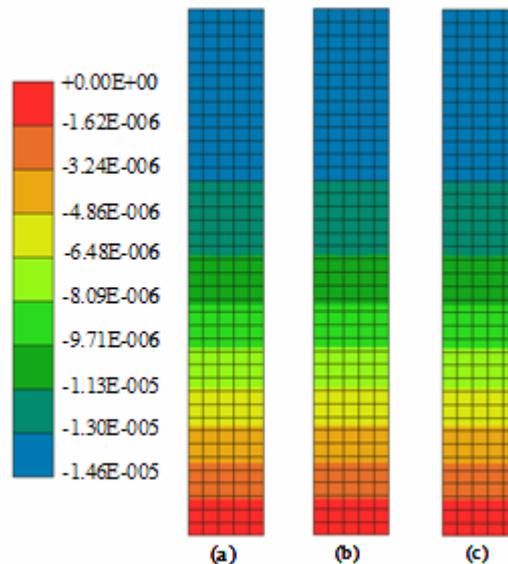


Figura 7.3 Sensibilidade dos deslocamentos verticais em relação à K , (100 segundos)

Nas figuras seguintes, Figura 7.4 e Figura 7.5, os resultados referem-se à sensibilidade dos deslocamentos verticais com relação ao módulo de elasticidade transversal, também para os instantes 1 e 100 segundos. Constata-se com essas respostas que os deslocamentos verticais da coluna poroelástica são mais sensíveis à variações da permeabilidade intrínseca do que à variações do módulo de elasticidade transversal. Além disso, se verifica que os deslocamentos verticais mais sensíveis à perturbações no módulo de elasticidade transversal do elemento de referência se encontram próximos ao elemento de referência, independente do tempo de análise. Os valores máximos de sensibilidade são obtidos para os

deslocamentos verticais localizados nos nós da aresta superior do elemento de referência.

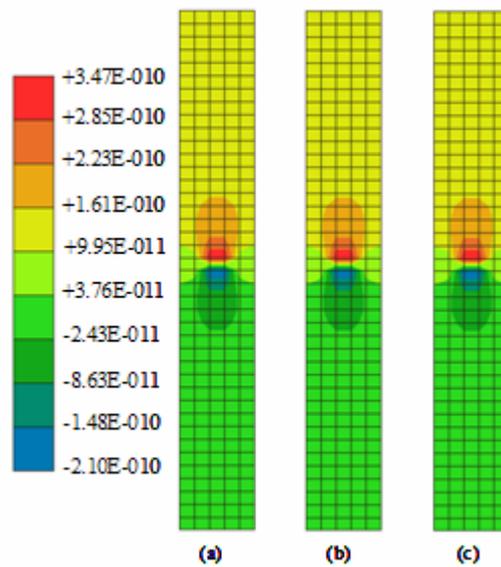


Figura 7.4 Sensibilidade dos deslocamentos verticais em relação à G, (1 segundo)

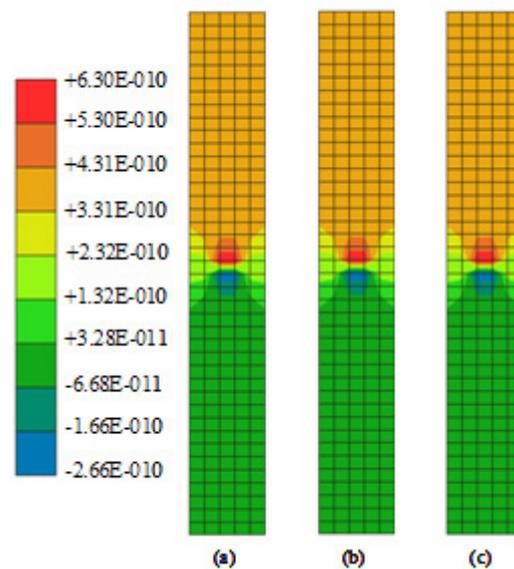


Figura 7.5 Sensibilidade dos deslocamentos verticais em relação à G, (100 segundos)

Assim como apresentado para os deslocamentos verticais da coluna, apresentam-se os resultados para a sensibilidade das poro pressões em relação à permeabilidade intrínseca e ao módulo de elasticidade transversal do elemento de referência.

Os resultados obtidos para os dois instantes de avaliação, com os diferentes métodos, também se apresentam muito semelhantes.

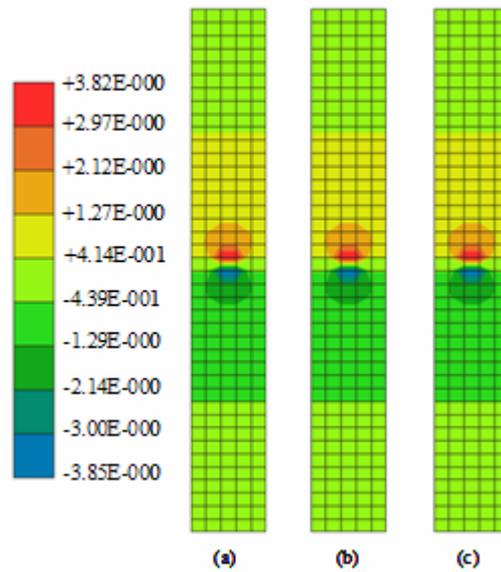


Figura 7.6 Sensibilidade das poro pressões em relação à K , (1 segundo)

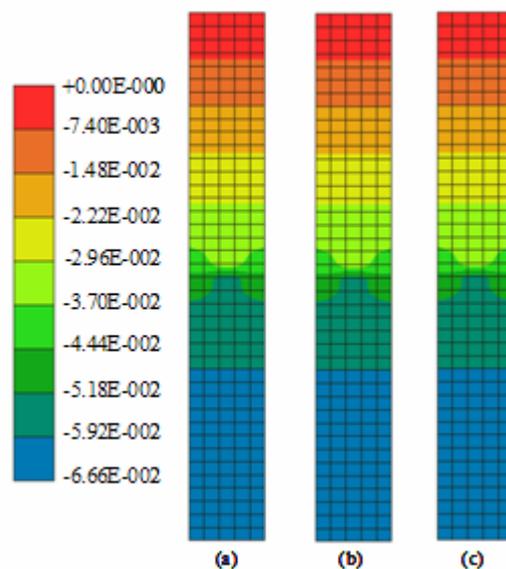


Figura 7.7 Sensibilidade das poro pressões em relação à K , (100 segundos)

Nota-se, com as respostas apresentadas nas figuras anteriores, que as poro pressões na coluna poroelástica são mais sensíveis à perturbações da permeabilidade intrínseca do elemento de referência nos instantes iniciais do processo de adensamento.

Assim como verificado na análise de sensibilidade dos deslocamentos verticais, se constata que as respostas em termos de poro pressões são mais sensíveis à perturbações nos valores da permeabilidade intrínseca do que à perturbações nos valores do módulo de elasticidade transversal do elemento de

referência. Nota-se também, que as poro pressões mais sensíveis à perturbações do módulo de elasticidade transversal do elemento de referência se encontram inicialmente na parte superior da coluna poroelástica se deslocamento, durante o processo de adensamento, para a parte inferior da coluna.

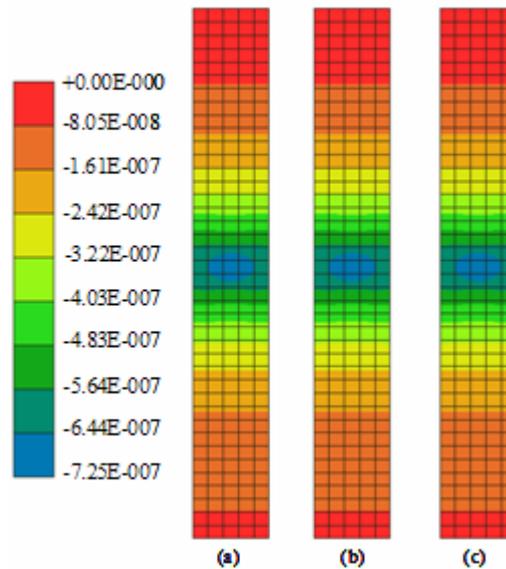


Figura 7.8 Sensibilidade das poro pressões em relação à G, (1 segundo)

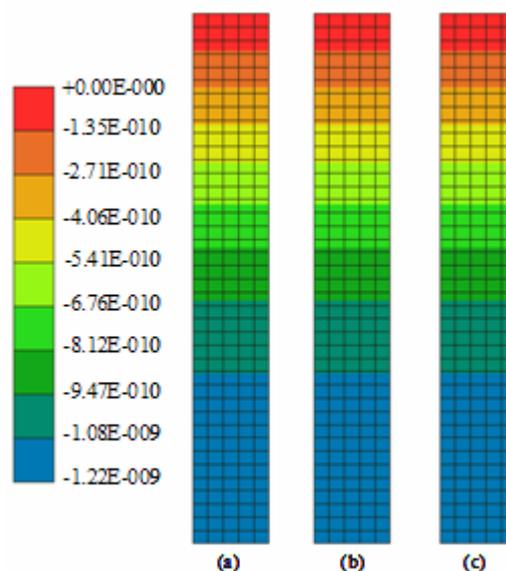


Figura 7.9 Sensibilidade das poro pressões em relação à G, (100 segundos)

Além da verificação dos resultados obtidos com a formulação proposta, constatou-se com o exemplo analisado que as respostas em deslocamentos e poro pressões são mais sensíveis às variações da permeabilidade intrínseca do que às

variações do módulo de elasticidade transversal. Verificou-se também o caráter transiente das respostas obtidas, ou seja, as sensibilidades variam consideravelmente no tempo.

Assim como verificado nesse exemplo, bons resultados são obtidos quando se avaliam as sensibilidades em relação às propriedades de outros elementos.

A Tabela 7.1 apresenta os tempos relativos para análise de sensibilidade do exemplo de adensamento unidimensional.

Tabela 7.1 Tempo relativo para análise de sensibilidade

Método de análise	Tempo relativo de análise
Método de diferenciação direto	1,000
Método de diferenciação adjunto	0,776
Diferenças finitas	1,413

Com base nos resultados apresentados na Tabela 7.1, indica-se o método de diferenciação adjunto para realização de análises de sensibilidade de problemas de acoplamento fluido mecânico lineares.

Nesse capítulo do trabalho não foram enfatizados comentários a respeito dos resultados obtidos com a análise de sensibilidade. Todavia, a análise de sensibilidade pode ser empregada para uma melhor compreensão dos fenômenos envolvidos nos problemas de acoplamento fluido mecânico, sobretudo em problemas complexos, quantificando a variação das respostas com relação às variáveis dos problemas.