5 Exemplos de análise determinística

5.1. Introdução

Para validação dos modelos numéricos determinísticos e comparações entre os procedimentos de solução, são efetuadas análises de quatro exemplos. O primeiro exemplo refere-se ao adensamento unidimensional e trata por sua vez do problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico com comportamento elástico linear. A simplicidade desse problema leva a uma solução analítica também simples, descrita por Detournay e Cheng (1993) e amplamente difundida e utilizada para validação do problema de acoplamento em questão. O segundo exemplo trata do mesmo problema de acoplamento, entretanto para o caso específico de poço de petróleo. Para esse problema a solução analítica proposta por Detournay e Cheng (1988), utilizada para comparações, não é simples e bem estabelecida como no problema de adensamento unidimensional, mas é também muito utilizada. O detalhamento dessa solução não é apresentado, sendo o mesmo encontrado na referência citada ou em outros trabalhos como no de Silvestre (2004). Os resultados e os dados desse exemplo serão empregados para comparações nos capítulos subseqüentes desse trabalho. Esse exemplo será utilizado para efetuar algumas comparações a cerca dos procedimentos de solução dos problemas de acoplamento fluido mecânico. O terceiro exemplo apresentado refere-se ao problema de fluxo bifásico unidimensional (coluna de solo rígida). Uma solução analítica desse problema é sugerida por McWhorter e Sunada (1990) e utilizada na validação dos resultados numéricos obtidos por Kueper e Frind (1991). No presente trabalho a solução analítica proposta por McWhorter e Sunada (1990) não é detalhada, utilizando-se para as comparações, os resultados analíticos obtidos com essa solução, apresentados por Kueper e Frind (1991). A ausência de uma solução analítica bem estabelecida, para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico, faz com que não sejam apresentados exemplos de validação desse problema. A análise de um problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico, exemplo 4 será apresentada para comparação dos procedimentos de solução desse tipo de problema. Nos exemplos analisados, onde se faz necessário, utiliza-se o método *L-BFGS*.

5.2. Exemplo 1: adensamento unidimensional

Considera-se uma coluna poroelástica de altura *L*, sobre uma base rígida e impermeável, Figura 5.1. Assume-se para o material a condição de isotropia e considera-se o meio poroso completamente saturado por um único fluido. Aplicase no topo desta coluna, sob condições drenadas, um carregamento constante p^* . As condições de contorno para o modelo são: $\sigma_{xx} = p^*H(t)$, sendo H(t) uma função delta de Dirac; p = 0 em x = 0; $u_x = 0$ e $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ em x = L.



Figura 5.1 Coluna poroelástica.

Para a consideração de tensão constante, a equação da difusividade para pressão de poros é dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - c \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

$$c = \frac{2kG(1-\nu)(\nu_u - \nu)}{\alpha^2 (1-2\nu)^2 (1-\nu_u)}$$
(5.1)

Sendo c o coeficiente de difusividade.

Na expressão anterior G é o módulo de elasticidade transversal, k é a permeabilidade do meio, $v \in v_u$ são os coeficientes de Poisson drenado e não drenado respectivamente e, α o coeficiente de Biot, que é expresso da seguinte forma:

$$\alpha = 1 - \frac{K_T}{K_s} \tag{5.2}$$

 K_T é o módulo volumétrico de todo o esqueleto e K_s , dos grãos. O coeficiente de Poisson não drenado pode ser representado como:

$$\nu_u = \frac{3K_u - 2G}{2(3K_u + G)}$$
(5.3)

Onde K_u , módulo volumétrico não drenado, é obtido por:

$$K_{u} = K \left(1 + \frac{\alpha^{2} K_{\pi}}{(1 - \alpha)(\alpha - \phi)K_{\pi} + \phi K} \right)$$
(5.4)

Sendo K_{π} o módulo volumétrico do fluido e ϕ a porosidade.

A pressão de poros gerada instantaneamente após o carregamento, p^{u} , é obtida com as seguintes expressões:

$$p^{u} = \frac{\eta p^{*}}{GS}$$

$$\eta = \frac{\alpha(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)}$$

$$S = \frac{3\eta(1 - \nu_{u})}{G\beta(1 + \nu_{u})}$$
(5.5)

Onde β representa o coeficiente de Skempton, obtido por:

$$\beta = \frac{\alpha K_{\pi}}{\left[\alpha - \phi(1 - \alpha)\right]K_{\pi} + \phi K}$$
(5.6)

Usualmente os campos de deslocamento e pressões são representados em termos da coordenada normalizada $\chi = \frac{x}{L}$ e do tempo adimensional $\tau = \frac{ct}{4L^2}$. A solução da equação (5.1), após aplicação das condições de contorno é expressa da seguinte forma:

$$p = \frac{\eta p}{GS} \left[1 - F_1(\chi, \tau) \right]$$
(5.7)

Com:

$$F_{1}(\chi,\tau) = 1 - \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} sen\left(\frac{m\pi\chi}{2}\right) e^{(-m^{2}\pi^{2}\tau)}$$
(5.8)

Já, o deslocamento u_x pode ser expresso em duas parcelas, uma referente ao deslocamento elástico não drenado inicial, u_x^u , e outra dependente do tempo, Δu_x .

$$u_{x}^{u} = \frac{p^{*}L(1-2v_{u})}{2G(1-v_{u})}(1-\chi)$$

$$\Delta u_{x} = \frac{p^{*}L(v_{u}-v)}{2G(1-v)(1-v_{u})}F_{2}(\chi,\tau)$$
(5.9)

Com:

$$F_{2}(\chi,\tau) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{8}{m^{2}\pi^{2}} \cos\left(\frac{m\pi\chi}{2}\right) \left(1 - e^{(-m^{2}\pi^{2}\tau)}\right)$$
(5.10)

No modelo numérico, para geração da malha de elementos finitos, utilizam-se elementos isoparamétricos de 4 nós (bi-lineares), com igual interpolação para deslocamentos e poro pressões $(N_u = N_p)$ e integração numérica com quadratura de Gauss de 2x2 pontos. Considera-se também para o modelo, estado plano de deformações e material com comportamento elástico linear. O incremento de tempo utilizado é de 1 segundo.

Os dados utilizados no exemplo de adensamento unidimensional são descritos na Tabela 5.1:

Parâmetros	Valor
G (MPa)	6000.00
\mathcal{V}	0.20
K_{s} (MPa)	36000.00
K_{π} (MPa)	2887.00
ϕ	0.19
$k(m^2)$	1.90E-13
μ_{π} (MPa s)	1.00E-9
$p^*(MPa)$	1.00

L(m)

7.0

Tabela 5.1 Dados da coluna poroelástica

As Figura 5.2 e Figura 5.3 apresentam os resultados obtidos para poro pressão na base da coluna ao longo do tempo e poro pressão ao longo da coluna para diferentes instantes. A Figura 5.4 mostra os resultados para os deslocamentos no topo da coluna ao longo do tempo. Verifica-se a concordância dos resultados obtidos pelos métodos numéricos com a solução analítica do problema. Salienta-se que os resultados numéricos obtidos com os procedimentos totalmente acoplado e *staggered* foram idênticos.



Figura 5.2 Poro pressão na base da coluna poroelástica



Figura 5.3 Poro pressão ao longo da coluna poroelástica



Figura 5.4 Deslocamento no topo da coluna poroelástica

5.3. Exemplo 2: poço vertical

Em continuidade a verificação dos resultados obtidos com os procedimentos numéricos sugeridos, faz-se a analise de um poço vertical. O material do meio poroso comporta-se segundo regime elástico linear, é considerado isotrópico e completamente saturado por um único fluido. O meio está submetido a um estado de tensões e poro pressões inicias. O processo de perfuração do poço é modelado considerando que a escavação é realizada instantaneamente.

A solução analítica, proposta por Detournay e Cheng (1988), é utilizada para comparação dos resultados obtidos com a análise numérica. Na solução analítica as equações acopladas são resolvidas usando o espaço de transformada de Laplace, assumindo o estado de deformações planas para o plano perpendicular ao eixo do poço.

Para modelagem numérica do problema, utilizam-se elementos finitos isoparamétricos de 4 nós (bi-lineares), com igual interpolação para deslocamentos e poro pressões ($N_u = N_p$), integração numérica com quadratura de Gauss de 2x2 pontos e a condição de estado plano de deformações. A malha de elementos finitos é composta 4800 elementos e 4960 nós. A Figura 5.5 mostra a malha de

elementos finitos utilizada na análise numérica. O detalhe apresentado nessa figura corresponde à região próxima ao poço. O ângulo β será utilizado como referência para apresentação de alguns resultados. O diâmetro do poço é de 0,20 *m* e os demais dados do problema apresentam-se na Tabela 5.2. Os resultados apresentados referem-se aos obtidos para um ângulo $\beta = 0^{0}$.



Figura 5.5 Malha de elementos finitos e detalhe do poço vertical

Parâmetros	Valor
G (MPa)	6000.00
ν	0.20
K _s (MPa)	38000.00
K_{π} (MPa)	2884.00
φ	0.19
k (m ²)	1.90E-15
μ_{π} (MPa s)	1.00E-9
$\sigma_{0_{xx}}$ (MPa)	-30.00
$\sigma_{0_{yy}}$ (MPa)	-50.00
p ₀ (MPa)	15.00

Tabela 5.2 Dados do poço vertical

Na Figura 5.6 a distribuição de poro pressões corresponde aos resultados obtidos com as analises numérica e analítica para diferentes instantes. Verificamse com essas respostas resultados muito semelhantes. Similarmente, na Figura 5.7 a distribuição de tensão total σ_{yy} , no instante 10 segundos é apresentada. Os resultados obtidos nesse caso também são bastante semelhantes. Esse mesmo comportamento se verifica em para outros tempos de análise.



Figura 5.6 Poro pressões, solução analítica x solução numérica



Figura 5.7 Tensão total $\sigma_{_{yy}}$, solução analítica x solução numérica

5.3.1. Comparação entre os procedimentos de solução

No capítulo anterior citou-se que, embora as respostas obtidas com os procedimentos de solução, totalmente acoplado e *staggered* sejam semelhantes, o tempo para análise, requerido por cada procedimento, pode ser distinto. Essas diferenças são geradas por diversos fatores, como número de equações a serem resolvidas e número de vezes que serão resolvidas nos procedimentos iterativos para solução dos problemas não lineares, entre outros.

Considerando-se o fato do procedimento de solução totalmente acoplado ser comprovadamente mais eficiente para solução dos problemas lineares, faz-se a análise do exemplo 2 considerando o material com comportamento elástico perfeitamente plástico condicionado ao critério de Mohr Coulomb. O ângulo de atrito Φ assumido é igual a 30[°] e a coesão igual a 10 (MPa). Para se avaliar o comportamento dos procedimentos para diferentes níveis de não linearidade, consideram-se 3 diferentes valores de pressão interna *PI*, aplicadas na parede do poço. Para uma pressão interna igual a 5 (MPa) tem-se uma região plastificada relativamente grande, sendo essa região muito inferior para uma pressão interna de 20 (MPa) e nula (problema linear) para uma pressão interna de 35 (MPa). A Figura 5.8 mostra a região plastificada para os dois primeiros casos após 60 segundos de análise.

Para efetuar uma comparação dos resultados obtidos para números diferentes de equações a serem resolvidas, adota-se para um primeiro caso (caso A), 14880 graus de liberdade (Ngl) e para um segundo caso (caso B) 7533 graus de liberdade. Nas tabelas seguintes (Tabela 5.3 e Tabela 5.4) apresentam-se os valores obtidos para o tempo relativo de análise desses problemas.

	Procedimento e tempo relativo de análise		
Caso	PI (MPa)	Totalmente acoplado	staggered
	5	1.00	0.83
А	20	0.60	0.58
	35	0.11	0.34

Tabela 5.3 Procedimento e tempo relativo de análise para o caso A

		Procedimento e tempo relativo de análise	
Caso	PI (MPa)	Totalmente acoplado	staggered
	5	1.00	0.87
В	20	0.56	0.59
	35	0.08	0.33

Tabela 5.4 Procedimento e tempo relativo de análise para o caso B

Com base nos resultados apresentados constata-se que o procedimento *staggered* mostra-se mais eficiente para a condição de não linearidade mais acentuada. Uma redução considerável no tempo de análise foi obtida com esse procedimento, sendo essa redução mais significante para o problema com um número de graus de liberdade maior. Para uma pressão interna de 20 (MPa) o tempo de análise requerido pelos dois procedimentos de análise foi muito semelhante. O tempo necessário com o procedimento *staggered* no problema com 14880 graus de liberdade foi ligeiramente inferior ao necessário pelo procedimento totalmente acoplado. No problema com 7533 graus de liberdade o tempo de análise do procedimento *staggered* foi um pouco superior ao verificado com o procedimento totalmente acoplado. Já, no último caso (problema linear), confirmando a afirmativa exposta anteriormente, o procedimento totalmente acoplado mostrou-se muito mais eficiente para solução do problema.



Figura 5.8 Região plastificada para PI =5 (MPa) (a) e PI =20 (MPa) (b)

Com base nos resultados obtidos no decorrer desse trabalho, se verificou que geralmente, em problemas não lineares, o procedimento *staggered* apresentase mais eficiente que o procedimento totalmente acoplado. Essa eficiência tende a crescer à medida que o numero de graus de liberdade e as não linearidades dos problemas crescem.

5.4. Exemplo 3: fluxo bifásico unidimensional

Considera-se uma coluna de solo rígida, Figura 5.9, na qual se injeta um fluido não molhante em uma de suas extremidades. A coluna de solo está submetida a uma condição inicial de $S_w = 1$ e as seguintes condições de contorno: $S_w = 0.525$ para x = 0m e t > 0; $p_w = 0$ para x = 10m e t > 0.



Figura 5.9 Coluna de solo sob fluxo bifásico

Na Tabela 5.5, apresenta-se os dados do problema. O modelo de Brooks e Corey (1964) é utilizado para descrição da curva $P_c - S_w$. O tempo total de análise é de 900000 segundos e as comparações dos resultados obtidos para a saturação da fase molhante em diferentes instantes apresentam-se na Figura 5.10.

No modelo numérico, para geração da malha de elementos finitos, utilizamse 320 elementos isoparamétricos de 4 nós (bi-lineares), distribuídos uniformemente, com integração numérica com quadratura de Gauss de 2x2 pontos.

Tabela 5.5 Dados da coluna de solo sob fluxo bifásico

Variáveis	Valor
S_{rw}	0.05
S_{rnw}	0.00
β	2.00
P_d (Pa)	2000.00
ϕ	0.35
$k(m^2)$	5.0×10^{-11}
μ_w (Pa s)	1.0×10^{-3}
μ_{nw} (Pa s)	0.5×10^{-3}

Verifica-se através da Figura 5.10 que bons resultados foram obtidos com os procedimentos propostos nesse trabalho. A ligeira diferença entre os resultados

numéricos e analíticos é aceitável e comumente encontrada quando se emprega o método de elementos finitos.



Figura 5.10 Saturação da fase molhante na coluna ao longo do tempo

Salienta-se que soluções analíticas bem estabelecidas para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico são de grande importância. Essas soluções proporcionariam condições para comparação entre resultados analíticos e numéricos. Nesse trabalho, considerando-se que bons resultados são obtidos na solução de problemas de fluxo bifásico e também na solução de problemas mecânicos, assume-se que o acoplamento dessas soluções como apresentado anteriormente também irá gerar bons resultados.

5.5. Exemplo 4: acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico

Para avaliação do problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico, analisa-se um poço horizontal durante a fase de produção. O meio a ser analisado é constituído por 3 materiais diferentes, conforme esquema apresentado no primeiro capítulo desse trabalho. O diâmetro do poço é de 0.17 m, o revestimento possui espessura de 0.008 m e o gravel uma espessura de 0.031 m. Considera-se para o revestimento o critério de Von Mises e para o meio poroso

(gravel e formação) o critério de Mohr Coulomb na condição de plasticidade perfeita. Os dados utilizados para descrição do modelo numérico apresentam-se na Tabela 5.6.

	Variáveis	Valor
	E (MPa)	2.0E5
Revestimento	σ_y (MPa)	758.00
	ν	0.29
	G (MPa)	8334.00
	ν	0.20
Gravel	c (MPa)	2.00
	Φ (graus)	30.00
	k (m ²)	6.9E-14
	G (MPa)	17500.00
	ν	0.20
Formação	c (MPa)	5.00
	Φ (graus)	30.00
	$k(m^2)$	6.9E-15
	P_d (MPa)	5.00
	φ	0.19
	β	2.00
	μ_w (MPa s)	0.4E-9
	μ_{nw} (MPa s)	1.0E-9
	K _s (MPa)	38000.00
	K_{π} (MPa)	2884.00

Tabela 5.6 Dados do poço horizontal

Como condição inicial do problema, considera-se que o meio poroso está completo por um fluido não molhante com pressão $p_{nw0} = 36$ (MPa) e sob um estado de tensões de -65 (MPa) e -40 (MPa) respectivamente para $\sigma_{0_{yy}}$ e $\sigma_{0_{xx}}$. Impõem-se para $t \ge 0$, a uma distância de 3 *m* do poço, $S_w = 0.60$, $p_{nw} = p_{nw0}$ e no poço uma pressão de fluido não molhante $p_{nw} = 30$ (MPa).

Para modelagem numérica do problema, utilizam-se elementos finitos isoparamétricos de 4 nós (bi-lineares), com igual interpolação para deslocamentos e poro pressões ($N_u = N_p$), integração numérica com quadratura de Gauss de 2x2 pontos e a condição de estado plano de deformações. A malha de elementos finitos é composta 2560 elementos e 2640 nós. A Figura 5.11 mostra a malha de elementos finitos utilizada na análise numérica. O detalhe apresentado nessa

figura representa além da malha, à distribuição dos materiais na região próxima ao poço. Os pontos A e B serão utilizados posteriormente para apresentação de alguns resultados.



Figura 5.11 Malha de elementos finitos e detalhe do poço horizontal

5.5.1. Comparação entre os procedimentos de solução

A fim de avaliar alguns aspectos a respeito dos procedimentos de solução do problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico, analisa-se o exemplo descrito no item anterior, com os procedimentos de solução totalmente acoplado e *staggered*. Além de analisar o problema para a malha de elementos finitos, com 10560 graus de liberdade, apresentada na Figura 5.11 (caso A), também se analisa o problema para uma malha com 5412 graus de liberdade, 1280 elementos e 1353 nós (caso B). Além disso, utilizam-se dois incrementos de tempo distintos para análise. Os incrementos de tempo da segunda metade da análise são 50% superiores aos utilizados na primeira metade. Ainda que o exemplo não seja utilizado nesse momento para quantificar as repostas obtidas é importante ressaltar que uma região considerável do gravel e da formação se

plastifica, ou seja, as não linearidades apresentam-se tanto no problema mecânico quanto no problema de fluxo bifásico.

Na Figura 5.12, onde T_{total} e P_{total} são respectivamente o tempo total de análise e o número total de passos de tempo, apresentam-se os resultados obtidos. Verifica-se com esses resultados, que o procedimento de solução *staggered* apresentou um melhor desempenho para análise desse exemplo. Nota-se que a diferença relativa entre os dois procedimentos cresceu quando se aumentou o tamanho do problema.

Verifica-se, em relação à utilização de incrementos de tempo distintos, que o comportamento das soluções foi ligeiramente diferente. Para o caso B, a adoção de um incremento de tempo maior não afetou de maneira significativa o tempo de análise, sendo isso também verificado para o caso A, para uma análise com o procedimento totalmente acoplado. Entretanto, para o caso A com o procedimento *staggered* se verificou um suave decréscimo no tempo de análise.



Figura 5.12 Tempo relativo de análise para os procedimentos de solução

Assim como relatado para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico, o procedimento de solução *staggered* mostra-se como uma alternativa eficiente para solução do problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico. Essa tendência se verificou para uma série de análises efetuadas no decorrer desse trabalho. Não se descarta porém, que o procedimento totalmente acoplado pode se mostrar mais eficiente, dependendo das características do problema.

Além da questão referente ao tempo de análise, outro aspecto importante, mencionado anteriormente, refere-se à vantagem de utilização do procedimento *staggered* quando se deseja analisar problemas com condições de contorno mais complexas, que podem ser descritas com maior facilidade quando os problemas mecânico e de fluxo são resolvidos de forma particionada.