4
Procedimentos de solução

De acordo com Lewis e Schrefler (1998), os problemas de acoplamento fluido mecânico podem ser resolvidos através de estratégias acopladas ou desacopladas. As soluções acopladas dividem-se em soluções totalmente acopladas e soluções particionadas. Nesse trabalho as soluções desacopladas não serão estudadas. Estudos referentes a soluções desacopladas são encontrados em Corapcioglu (1984).

Apresentam-se a seguir duas estratégias de solução acopladas. A primeira totalmente acoplada, e designada nesse trabalho pelo mesmo nome e a segunda particionada, conhecida como procedimento *staggered*. De maneira geral, os resultados obtidos com esses procedimentos são similares, já, o esforço computacional requerido pode ser bastante diferente. A escolha do procedimento mais adequado de solução depende das características do problema, fluxo monofásico ou bifásico, problema mecânico linear ou não linear, número de equações envolvidas, etc. Alguns comentários a respeito desses aspectos serão apresentados nesse capítulo do trabalho.

4.1. Procedimento totalmente acoplado

Quando se resolve os sistemas de equações como apresentados em (3.43) ou (3.54), diz-se que as soluções são totalmente acopladas. A esse respeito, verifica-se para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico, um sistema de equações algébricas resultante da discretização, simétrico. Nota-se também, que a matriz $\mathbf{H}$ é constante no tempo, uma vez que na descrição no modelo físico a permeabilidade e a viscosidade dinâmica são constantes. A matriz $\mathbf{K}$, pode ser constante ou não, dependendo do comportamento do meio, elástico, plástico, etc.

Considerando essas características, para a solução de problemas governados por equações lineares e com um número de equações relativamente pequeno, os métodos de solução direta (decomposição LU, decomposição de Choleski, Gauss entre outros) são atrativos. Entretanto, em problemas não lineares o uso de um método direto pode ser antieconômico pois, dependendo do método de solução do problema não linear o sistema algébrico terá que ser resolvido diversas vezes. Além disso, visando uma solução mais precisa, pode-se utilizar um maior número de pontos nodais, o que resulta na solução de um número maior de equações algébricas. O número de equações algébricas também cresce substancialmente quando a dimensão do problema passa do espaço bidimensional para o tridimensional.

Como alternativa ao uso de métodos diretos podem ser utilizados métodos iterativos. Métodos iterativos consistem em aplicações repetidas de um algoritmo utilizando duas etapas: (1) prever, (2) corrigir. Uma vantagem desses métodos é a menor necessidade de armazenamento requerida. Todavia, diferentes métodos iterativos implicarão em diferentes números de iterações com base numa mesma malha, ou seja, uns convergirão mais rapidamente que outros. Além disso, o número de iterações necessário para convergência, cresce com o número de equações algébricas do sistema.

Dentre os métodos iterativos destaca-se o método do gradiente conjugado, que busca a direção de maiores variações e caminha nesta direção para otimizar a velocidade de convergência. Habitualmente, para melhorar o método, empregam-se aceleradores, geralmente pré-condicionadores. O método multigrid também é muito utilizado, podendo ser uma alternativa bastante eficiente.

Para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico o sistema de equações algébricas resultante da discretização é não simétrico. O método do gradiente bi-conjugado estabilizado, apresentado por Van der Vorst (1992), é amplamente utilizado para solução desse tipo de sistema de equações, sendo esse utilizado nesse trabalho. Diferente do verificado para o problema com fluxo monofásico, no problema com fluxo bifásico a permeabilidade varia no tempo, pronunciando ainda mais a não linearidade do problema.

4.2. Procedimento *stagerred*

As formas particionadas de solução podem ser alternativas interessantes para problemas acoplados. O *staggered* é um exemplo de procedimento de solução particionada. Lewis e Schrefler (1998), Simoni e Schrefler (1991), Turska e Schrefler (1992) e Ferreira (1996) apresentam alguns estudos sobre a utilização desse procedimento para solução de problemas de acoplamento fluido mecânico. Nesses estudos, mostra-se que o procedimento *staggered* apresenta resultados equivalentes aos obtidos com o procedimento totalmente acoplado.

Ferreira (1996) realizou uma série de comparações a respeito do esforço computacional requerido por cada procedimento de solução na análise de problemas de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico e material com comportamento elástico linear. Para essa classe de problemas evidenciou-se que, o esforço computacional despendido no procedimento *staggered* é superior ao requerido no procedimento totalmente acoplado. Esse tipo de constatação pode ser esperado, uma vez que para essas condições as matrizes são constantes no tempo.

Lewis e Schrefler (1998), Simoni e Schrefler (1991), Turska e Schrefler (1992), citam que o esforço computacional no procedimento *staggered* pode ser inferior ao necessário no procedimento totalmente acoplado, entretanto, não é explicitado para quais casos ou condições essa característica é verificada.

Ao se utilizar o procedimento *staggered* é possível se obter problemas que isoladamente são melhor compreendidos e com soluções mais simples do que os obtidos com o procedimento totalmente acoplado. Além disso, procedimentos de solução de sistemas de equações, diferentes dos utilizados nos problemas totalmente acoplados podem ser empregados. Para se confirmar essa afirmativa, apresentam-se a seguir os procedimentos adotados nesse trabalho para solução dos problemas de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico e fluxo bifásico, com a utilização do procedimento *staggered*.

4.2.1. Procedimento *staggered* para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico

Para a equação de equilíbrio do problema com fluxo monofásico tem-se:

$$[\mathbf{K}]\{\delta\,{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i+1}\} = \{\Delta t\,{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_u^i({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^i, {}^{t+\Delta t}\mathbf{p}^{i+1}, t)\} \tag{4.1}$$

E para a equação de fluxo:

$$[\Delta t \theta \mathbf{H} + \mathbf{G}]\{\delta\,{}^{t+\Delta t}\mathbf{p}^{i+1}\} = \{\Delta t\,{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_p^i({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i+1}, {}^{t+\Delta t}\mathbf{p}^i, t)\} \tag{4.2}$$

Verifica-se nos sistemas de equações (4.1) e (4.2) que os valores de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{p}$ são conhecidos no passo de tempo anterior e que para se avaliar o sistema de equações (4.1) os valores de ${}^{t+\Delta t}\mathbf{p}^{i+1}$ são fixos e para se avaliar o sistema de equações (4.2) os valores de ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i+1}$ são fixos.

Adotando os campos de deslocamentos e poro pressões para verificação da convergência da solução, descreve-se um algoritmo para solução do problema num instante $t + \Delta t$, como:

Instante $t + \Delta t$ Estimativa inicial ${}^{t+\Delta t}\mathbf{p} = {}^{t}\mathbf{p}$	Etapa 1
Procedimento *staggered* iteração: j+1	Etapa 2
Avalia-se $\mathbf{u}^{j+1}$ com (4.1)e verifica-se a convergência dos deslocamentos com: $\left\| \dfrac{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{j+1}\| - \|{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{j}\|}{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{j+1}\|} \right\| \leq tol$	Etapa 3
Com o vetor $\mathbf{u}$ obtido na etapa 3 avalia-se $\mathbf{p}^{j+1}$ com (4.2)e verifica-se a convergência das poro pressões com: $\left\| \dfrac{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{p}^{j+1}\| - \|{}^{t+\Delta t}\mathbf{p}^{j}\|}{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{p}^{j+1}\|} \right\| \leq tol$	Etapa 4
Se as desigualdades das etapas 3 e 4 não forem atendidas, retorna-se a etapa 2 com os valores atualizados de **p**. Caso contrário, faz-se j=0 e um novo passo se inicia na Etapa 1.	Etapa 5

De acordo com o modelo físico empregado e o procedimento de solução apresentado nesse trabalho o sistema de equações (4.1) é não linear, enquanto o sistema de equações (4.2) é eminentemente linear. Já, no procedimento totalmente acoplado, em decorrência da não linearidade do problema mecânico, todo o problema é não linear.

4.2.2. Procedimento *staggered* para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico

Para o problema com fluxo bifásico adotou-se a seguinte estratégia de solução: particionou-se o problema em duas partes, problema mecânico e problema de pressão-saturação.

Conhecendo-se as incógnitas do problema num instante t, tem-se para a equação de equilíbrio:

$$[\mathbf{K}]\{\delta^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i+1}\} = \{\Delta t^{t+\Delta t}\mathbf{F}_u^i({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^i, {}^{t+\Delta t}\mathbf{p}_{nw}{}^{i+1}, {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_w{}^{i+1}, t)\} \tag{4.3}$$

Sendo $\mathbf{F}_u^i({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^i, {}^{t+\Delta t}\mathbf{p}_{nw}{}^{i+1}, {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_w{}^{i+1}, t)$ obtido com (3.45).

Para as equações de pressão da fase não molhante e saturação da fase molhante, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G_{nw}} + \Delta t\theta\mathbf{H_{nw}} & \mathbf{O_{nw}} - \Delta t\theta\mathbf{M_{nw}} - \mathbf{P_{nw}} \\ \mathbf{G_w} + \Delta t\theta\mathbf{H_w} & \mathbf{O_w} - \Delta t\theta\mathbf{M_w} - \mathbf{P_w} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^{t+\Delta t}\mathbf{p}_{nw}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t}\mathbf{S}_w^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta t^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{p_{nw}}^i({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i+1}, {}^{t+\Delta t}\mathbf{p}_{nw}{}^i, {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_w{}^i, t) \\ \Delta t^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{S_w}^i({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i+1}, {}^{t+\Delta t}\mathbf{p}_{nw}{}^i, {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_w{}^i, t) \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

Nota-se que para a solução do sistema de equações (4.3) os valores de ${}^{t+\Delta t}\mathbf{p}_{nw}{}^{i+1}$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_w{}^{i+1}$ são fixos. Já, para a solução do sistema de equações (4.4) fixam-se os valores de ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{i+1}$.

Adotando os campos de deslocamentos e saturações da fase molhante para verificação da convergência da solução, descreve-se um algoritmo para solução do problema num instante $t + \Delta t$, como:

Instante $t + \Delta t$ Estimativa inicial ${}^{t+\Delta t}\mathbf{p}_{nw} = {}^t\mathbf{p}_{nw}$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_w = {}^t\mathbf{S}_w$	Etapa 1
Procedimento *staggered* iteração: j+1	Etapa 2
Avalia-se $\mathbf{u}^{j+1}$ com (4.3) e verifica-se a convergência dos deslocamentos com: $\left\| \dfrac{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{j+1}\| - \|{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^j\|}{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{j+1}\|} \right\| \leq tol$	Etapa 3
Com o vetor $\mathbf{u}$ obtido na etapa 3 avalia-se $\mathbf{p}_{nw}^{j+1}$ e $\mathbf{S}_w^{j+1}$ com (4.4) e verifica-se a convergência das saturações da fase molhante com:	Etapa 4

$\left\lvert \dfrac{\lvert {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_w^{j+1} \rvert - \lvert {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_w^{j} \rvert}{\lvert {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_w^{j+1} \rvert} \right\rvert \le tol$	
Se as desigualdades das etapas 3 e 4 não forem atendidas, retorna-se a etapa 2 com os valores atualizados de $\mathbf{p}_{nw}$ e $\mathbf{S}_w$ Caso contrário, faz-se j=0 e um novo passo se inicia na Etapa 1.	Etapa 5

Nota-se no problema com fluxo bifásico, que os sistemas de equações (4.3) e (4.4), são sistemas não lineares. Ao se resolver (4.3) isoladamente é possível utilizar algum procedimento de solução para sistemas simétricos. Para o sistema de equações (4.4) se faz necessário um procedimento de solução de sistemas não simétricos. No caso da solução totalmente acoplada todo sistema de equações é não simétrico.

Outra observação importante, que agrega vantagens ao procedimento de solução particionado, é verificada com a maior flexibilidade para imposição de condições de contorno. Por exemplo, pode-se desejar impor uma condição de contorno de vazão, que por sua vez, irá gerar valores de pressões e saturações dependentes da condição de contorno de vazão imposta. Com essa condição, não se conhece a priori os valores de pressões e saturações, que são necessários para correta descrição do problema mecânico. Ou seja, numa estratégia totalmente acoplada essa característica geraria uma dificuldade adicional. Entretanto, numa solução particionada essa dificuldade é transposta com mais facilidade, pois, a cada solução do problema de fluxo as pressões e saturações são atualizadas e suas influências no problema mecânico podem ser facilmente consideradas.

Nos procedimentos anteriormente apresentados, a tolerância estimada para verificação da convergência deve ser pequena o suficiente para gerar resultados semelhantes aos obtidos com a solução totalmente acoplada. A adoção de valores excessivamente pequenos para *tol* pode propiciar uma perda na eficiência computacional (mais tempo para análise), em contra partida, valores grandes para *tol*, podem gerar respostas com erros significativos.

No procedimento *staggered*, para solução dos problemas isolados, deve-se levar em conta todos os comentários a respeito dos métodos de solução de sistemas de equações apresentados no item sobre o procedimento totalmente acoplado, além dos apontamentos referentes à solução do problema não linear global. Por exemplo, ao se resolver o problema com fluxo bifásico com o procedimento *staggered* é possível utilizar o método *BFGS* para solução da equação de equilíbrio. Já, para solução totalmente acoplada, devido a não simetria, esse método não pode ser empregado.