

## 3

### Análise não linear

#### 3.1. Introdução

Descrevem-se nesse capítulo aspectos sobre análise não linear (análise não linear local e análise não linear global). Apresenta-se o problema não linear local como um problema de programação matemática. Os modelos constitutivos adotados para fase sólida e o modelo constitutivo utilizado para descrição da permeabilidade relativa são descritos nesse capítulo. Por fim, alguns aspectos sobre análise não linear global são apresentados.

#### 3.2. Análise não linear local (modelos constitutivos e análise elastoplástica)

Apresentam-se neste item alguns conceitos para o entendimento da análise não linear local, análise elastoplástica, assim como se descrevem os modelos constitutivos adotados nesse trabalho (modelo de Mohr Coulomb e modelo de Von Mises).

##### 3.2.1. Princípio da máxima dissipação plástica

O princípio da máxima dissipação plástica é atribuído a Von Mises e Taylor, sendo posteriormente considerado por outros autores como Mandel (1964) e Lubliner (1984,1986), *apud* Simo (1997). O princípio da máxima dissipação plástica é a base da formulação matemática das leis de evolução da teoria da plasticidade e está fundamentada na hipótese de que a deformação plástica se dá de modo que a energia dissipada seja máxima. A plastificação é um processo dissipativo irreversível, ou seja, há perda de energia do sistema. O princípio da máxima dissipação plástica, *PMDP*, pode ser posto da seguinte maneira: para uma

dada taxa de deformação plástica  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  e uma taxa de variação das variáveis internas  $\dot{\mathbf{a}}$ , entre todos os estados finais  $(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)$  admissíveis, o estado real  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})$ , é o que leva a máxima dissipação plástica.

Para descrição matemática do *PMDP* parte-se do conceito de energia de dissipação plástica, dado como sendo a taxa de variação da energia interna em relação às variáveis plásticas com o sinal trocado.

$$D^p(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = - \left[ \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{\partial W^p}{\partial \mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \right] \quad (3.1)$$

A energia interna de um sistema em repouso, é composta por duas parcelas: uma parcela de energia capaz de realizar trabalho, energia livre e uma parcela de energia proveniente de um processo térmico. A energia livre, pode por sua vez, ser representada pela decomposição aditiva de uma parcela elástica e outra plástica. De forma semelhante, as deformações totais também podem ser assim representadas.

$$W = W^e + W^p \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.2)$$

Diz-se que a energia de deformação elástica  $W^e = W^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$  e que a parcela plástica  $W^p = W^p(\mathbf{a})$ , é função somente das variáveis internas. Assim, é possível escrever

$$W = W^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + W^p(\mathbf{a}) = W^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + W^p(\mathbf{a}) \quad (3.3)$$

Dessa maneira representa-se a dissipação plástica como

$$D^p(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = - \frac{\partial W^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial W^p}{\partial \mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \quad (3.4)$$

Do conceito do tensor de tensões elástico e, utilizando-se a regra da cadeia, pode-se escrever

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = - \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \quad (3.5)$$

Assim, a dissipação plástica pode ser rescrita como

$$D^p(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = \boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial W^p}{\partial \mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \quad (3.6)$$

Para facilitar a aplicação dos métodos de programação matemática utilizados para solução dos problemas de otimização, se escreve o *PMDP* como

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} &: -D^p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \\ \text{sujeito} &: F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

A restrição  $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})$  é neste problema igual à função de escoamento, descrita segundo algum modelo constitutivo condizente com o material do domínio analisado. O problema de minimização com restrições pode ser escrito como um problema sem restrições introduzindo-se os multiplicadores de Lagrange. A função de Lagrange correspondente ao problema é

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*, \gamma, \boldsymbol{\varepsilon}^*, \mathbf{a}^*) = -\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* + \frac{\partial W^p}{\partial \mathbf{a}^*} \cdot \mathbf{a}^* + \gamma F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*) \quad (3.8)$$

O símbolo  $(\cdot)^*$  indica ser um ponto corrente que atende necessariamente as condições de Kuhn-Tucker. Escrevendo-se agora as condições de Kuhn-Tucker, condições necessárias para existência de um valor extremo, tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} = -\boldsymbol{\varepsilon}^* + \gamma \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^* = \gamma \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}^*} = \frac{\partial^2 W^p}{\partial \mathbf{a}^* \partial \mathbf{a}^*} \cdot \mathbf{a}^* + \gamma \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)}{\partial \mathbf{a}^*} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}^* = -\gamma \mathbf{G} \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)}{\partial \mathbf{a}^*} \quad (3.10)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*) \leq 0 \quad (3.11)$$

$$\gamma F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*) = 0 \quad (3.12)$$

$$\gamma \geq 0$$

$$\text{em (3.10) } \mathbf{G} = \left( \frac{\partial^2 W^p}{\partial \mathbf{a}^* \partial \mathbf{a}^*} \right)^{-1}$$

Nota-se que as condições apresentadas acima, condições da plasticidade associada, surgem como consequência do *PMDDP*. Da equação (3.9) tem-se a lei de escoamento associada, da equação (3.10) tem-se a lei de encruamento. Em (3.11) se verifica a condição de consistência e em (3.12) através da condição de complementariedade se verifica a condição de carregamento/descarregamento. Simo e Hughes (1997) citam que o *PMDDP* implica em: fluxo associado no espaço das tensões, condição chamada de normalidade; condição de carregamento/descarregamento dada pela condição de complementariedade de Kuhn-Tucker e convexidade do espaço das tensões.

O problema apresentado em (3.7) pode ser reescrito, de acordo com Simo e Hughes (1997), sob a seguinte forma

$$\{\boldsymbol{\sigma}^{i+1}, \mathbf{a}^{i+1}\} = (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \in \mathcal{E}_\sigma \left\{ \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}^{teste} - \boldsymbol{\sigma}\|^2 \mathbf{D}^{-1} + \frac{1}{2} \|\mathbf{a}^i - \mathbf{a}\|^2 \mathbf{G}^{-1} \right\} \quad (3.13)$$

*sujeito* :  $F(\boldsymbol{\sigma}^{i+1}, \mathbf{a}^{i+1}) \leq 0$

Onde  $\mathbf{D}$  é o tensor constitutivo elástico,  $\mathbf{G}$  é módulo plástico generalizado, ambos assumidos constantes,  $\boldsymbol{\sigma}^{teste}$  é o tensor das tensões teste (geralmente assume-se o elástico) e  $\mathcal{E}_\sigma$  é o espaço das tensões admissíveis.  $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{D}^{-1}} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}}$  pode ser visto como uma norma da energia e  $\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{G}^{-1}} = \sqrt{\mathbf{a} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{a}}$  como uma norma induzida por  $\mathbf{G}^{-1}$ . Para o caso de plasticidade perfeita o segundo termo entre chaves da equação (3.13) é nulo, e a interpretação geométrica do problema pode ser representada pela Figura 3.1

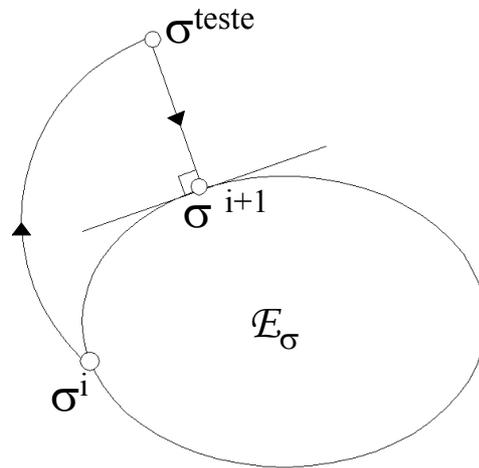


Figura 3.1 Ilustração geométrica do conceito de projeção ao ponto mais próximo

Concluindo,  $\boldsymbol{\sigma}^{i+1}$  é a projeção ao ponto mais próximo de  $\boldsymbol{\sigma}^{teste}$  na superfície de escoamento.

Verificou-se nas equações que descrevem o problema de acoplamento fluido mecânico a presença do tensor constitutivo tangente ou elastoplástico  $\mathbf{D}_T$ . Este pode ser avaliado da seguinte maneira

$$\mathbf{D}_T = \mathbf{D} - \left( \mathbf{D} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D} \right) \frac{1}{H} \quad (3.14)$$

$$H = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D} \mathbf{g} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{h}$$

Sendo  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{h}$ , respectivamente, funções que definem a direção do fluxo plástico e a evolução de  $\mathbf{a}$ . Para plasticidade associada  $\mathbf{g} = \partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}$ .

### 3.2.2. Método de solução do problema de programação matemática

Os algoritmos de programação não-linear, com ou sem restrições, são procedimentos iterativos em que novos pontos  $\mathbf{x}^k$  são obtidos a partir de pontos correntes  $\mathbf{x}^{k-1}$  através da seguinte expressão

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} + t\mathbf{d} \quad (3.15)$$

Dessa forma, os algoritmos em geral dividem-se em duas etapas principais: a primeira etapa é a determinação da direção de busca  $\mathbf{d}$  e a segunda é a avaliação do parâmetro escalar  $t$ , que representa o tamanho do passo a ser dado ao longo da direção de busca. A partir da expressão (3.15) diversos algoritmos podem ser construídos utilizando diferentes técnicas para a determinação da direção de busca e do tamanho do passo.

Nesse trabalho utiliza-se o algoritmo de Han-Powell – Programação quadrática seqüencial (*SQP*). O algoritmo de otimização de Han-Powell foi proposto por Han em 1976 e 1977 e por Powell em 1978, *apud* Eboli (1989). Este algoritmo utiliza a técnica de Programação Quadrática Seqüencial (*SQP*) através da solução de um subproblema quadrático (*QP*).

O método *SQP* pode ser considerado como o resultado da aplicação do método de Newton à minimização de uma aproximação quadrática da função Lagrangiana do problema. Este método fornece a cada iteração os vetores  $\mathbf{d}$ , para se fazer a correção de  $\mathbf{x}$  e  $\Delta\boldsymbol{\gamma}$ , para correção dos multiplicadores de Lagrange. Para sua demonstração considera-se o seguinte problema de minimização com restrição de igualdade:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a } \mathbf{c}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

A função de Lagrange do problema é dada por

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{c}(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

Desenvolvendo  $\nabla\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma})$  em série de Taylor em torno de  $(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\gamma}^k)$  até termos de primeira ordem, tem-se

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^k + \mathbf{d}^{k+1}, \boldsymbol{\gamma}^k + \Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1}) = \nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\gamma}^k) + [\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\gamma}^k)] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Considerando  $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k$  e  $\Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1} = \boldsymbol{\gamma}^{k+1} - \boldsymbol{\gamma}^k$ , aplicando-se a condição de estacionariedade em (3.18) no ponto  $(\mathbf{x}^k + \mathbf{d}^{k+1}, \boldsymbol{\gamma}^k + \Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1})$  se obtém

$$[\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\gamma}^k)] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1} \end{Bmatrix} = -\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\gamma}^k) \quad (3.19)$$

ou, sob a forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^k & \mathbf{A}^{kT} \\ \mathbf{A}^k & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathbf{g}^k + \mathbf{A}^k \boldsymbol{\gamma}^k \\ \mathbf{c}^k \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Substituindo  $\boldsymbol{\gamma}^{k+1}$  por  $\boldsymbol{\gamma}^k + \Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1}$  se escreve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^k & \mathbf{A}^{kT} \\ \mathbf{A}^k & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \boldsymbol{\gamma}^{k+1} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathbf{g}^k \\ \mathbf{c}^k \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Onde  $\mathbf{W}^k$  é a matriz Hessiana da função de Lagrange,  $\mathbf{A}^k$  é a matriz dos gradientes das restrições e  $\mathbf{g}^k$  é o gradiente da função objetivo, todos avaliados em  $\mathbf{x}^k$ .

Escrevendo-se as condições de Kuhn-Tucker do problema de programação quadrática ( $QP$ )

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \mathbf{g}^{kT} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{W} \mathbf{d} \\ &\text{sujeito a } \mathbf{c}^k + \mathbf{A}^{kT} \mathbf{d} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Verifica-se que essas condições são idênticas à expressão (3.21). Conclui-se dessa maneira que, em cada iteração  $k$  do problema original, a solução é aproximada pela solução do ( $QP$ ), obtido pela linearização das restrições e pela expansão quadrática representada na função objetivo do problema definido em (3.22). Vanderplaats (1984) apresenta o caso de restrições de desigualdade.

### 3.2.2.1. Etapas do algoritmo de Han-Powell

Parente (2000) descreve o algoritmo Han-Powell com as seguintes etapas:

1. Dado um ponto inicial  $\mathbf{x}^0$  e uma aproximação da Hessiana da função de Lagrange  $\mathbf{B}^0$ , fazer  $k = 0$ .  $\mathbf{B}^0$  é dada pela seguinte função:

$$\mathbf{B}^0 = b^0 \mathbf{I} \quad (3.23)$$

onde  $b^0$  é um parâmetro definido pelo usuário do algoritmo. O número de reinícios da matriz  $\mathbf{B}$  é controlado pelo parâmetro  $nr$  definido pelo usuário. O reinício de  $\mathbf{B}$  serve para descartar a influência de pontos muito distantes do ponto corrente e também para limitar o uso de memória, caracterizando assim o método *L-BFGS*.

2. Para  $k = k+1$ , montar e resolver o problema de programação quadrática *QP*, definido pela equação (3.22) determinando os vetores  $\mathbf{d}^k$  e  $\boldsymbol{\gamma}^k$ .

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \mathbf{g}^{k-1T} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{B}^{k-1} \mathbf{d} \\ & \text{sujeito a } \mathbf{c}^{k-1} + \mathbf{A}^{k-1T} \mathbf{d} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Onde  $\mathbf{B}^{k-1}$  é a matriz Hessiana da função de Lagrange,  $\mathbf{A}^{k-1}$  é a matriz dos gradientes das restrições e  $\mathbf{g}^{k-1}$  é o gradiente da função objetivo, todos avaliados em  $\mathbf{x}^{k-1}$ .

3. Verificar os critérios de convergência do algoritmo:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{g}^{k-1T} \mathbf{d} \right| \leq tol_1 \\ & \max(c_i^k) \leq tol_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde o primeiro critério representa a variação da função objetivo na direção  $\mathbf{d}$  e o segundo critério verifica explicitamente o valor da restrição mais violada.

4. Verificar também os critérios de parada tais como: número de avaliações da função objetivo e número de iterações.
5. Se os critérios de convergência e/ou de parada não são atendidos, faz-se uma busca linear unidimensional para determinar o tamanho do passo  $t$ , na direção  $\mathbf{d}$  de forma que o novo estimador da solução seja um ponto que contribua para o decréscimo da função objetivo. A busca é feita sobre a função de penalidade ( $\varpi$ ), construída no intuito de impor um alto custo à violação das restrições. Esta função é definida por

$$\varpi(t) = \varpi(\mathbf{x} + t\mathbf{d}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l r_i \max(c_i, 0) \quad (3.26)$$

onde  $r_i$  são os fatores de penalidades das  $l$  restrições  $c_i$ . A busca é aproximada, isto é, a solução obtida não é necessariamente o mínimo de

$\varpi(t)$ , mas atende certo decréscimo pré-estipulado em  $\varpi(t)$  considerado satisfatório.

6. Atualização da matriz  $\mathbf{B}^k$  do subproblema quadrático através do método *L-BFGS*.
7. Retorno à etapa 2.

### 3.2.3. Função de escoamento (critério de Mohr Coulomb)

O critério de Mohr Coulomb é um dos mais simples e utilizados em problemas da mecânica das rochas, sendo descrito em termos dos invariantes de tensões por

$$F_{MC} = \frac{J_1}{3} \text{sen}\Phi + \sqrt{J_{2D}} \cos\theta - \sqrt{\frac{J_{2D}}{3}} \text{sen}\phi \text{sen}\theta - c \cos\Phi \quad (3.27)$$

$J_1$  representa o primeiro invariante das tensões,  $J_{2D}$  representa o segundo invariante das tensões desviadoras,  $\Phi$  e  $c$  (propriedades do material), são respectivamente o ângulo de atrito e a coesão. O ângulo  $\theta$  é dado por

$$\theta = \frac{1}{3} \text{sen}^{-1} \left( \frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_{3D}}{J_{2D}^{3/2}} \right) \text{ onde } -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \quad (3.28)$$

$J_{3D}$  representa o terceiro invariante das tensões desviadoras.

Como se verificou anteriormente, é necessário para solução do problema de programação matemática o gradiente das restrições. Nesse trabalho, assumindo-se o caso de plasticidade perfeita obtém-se  $\partial F_{MC} / \partial \boldsymbol{\sigma}$  com (3.29).

$$\frac{\partial F_{MC}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F_{MC}}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F_{MC}}{\partial \sqrt{J_{2D}}} \frac{\partial \sqrt{J_{2D}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F_{MC}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.29)$$

A superfície de escoamento de Mohr Coulomb tem como característica a presença de cantos, podendo-se com isso, dificultar a obtenção de (3.29). Por esse motivo, adotou-se um arredondamento da superfície de escoamento para  $|\theta| > 29^\circ$ , conforme apresentado em Owen (1980).

### 3.2.4. Função de escoamento (critério de Von Mises)

O critério de Von Mises é descrito em termos do segundo invariante das tensões desviadoras e da tensão de escoamento do material. Esse critério é fundamentalmente empregado para representação de metais.

$$F_{VM} = \sqrt{2J_{2D}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y \quad (3.30)$$

A derivada da função de escoamento com relação às tensões é obtida da seguinte forma

$$\frac{\partial F_{VM}}{\partial \sigma} = \frac{\partial F_{VM}}{\partial \sqrt{2J_{2D}}} \frac{\partial \sqrt{2J_{2D}}}{\partial \sigma} \quad (3.31)$$

### 3.3. Modelo constitutivo para permeabilidade

No capítulo 2 apresentou-se a relação entre pressão capilar e as pressões das fases molhante e não molhante. Citou-se também, que num meio isotérmico a pressão capilar é uma função do grau de saturação. Para descrição da relação entre pressão capilar e grau de saturação descrevem-se curvas, denominadas curvas de pressão capilar,  $P_c - S_w$ . Algumas expressões semi-empíricas são utilizadas para descrição das curvas de pressão capilar sendo usualmente empregados os modelos de Brooks e Corey (1964), Van Genuchten (1980), Bradford e Leij (1996) e Assouline *et al* (1988 e 2000).

Utiliza-se nesse estudo o modelo de Brooks e Corey (1964) dado por (3.32).

$$S_e = \left( \frac{p_c}{P_d} \right)^{-\beta} \quad \text{para } p_c \geq P_d \quad (3.32)$$

$P_d$  é a pressão de deslocamento e  $\beta$  um índice relacionado ao tamanho dos poros. O parâmetro  $S_e$  é a saturação efetiva dada por (3.33)

$$S_e = \frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{rmw}} \quad (3.33)$$

Sendo  $S_{rw}$  a saturação residual da fase molhante e  $S_{rmw}$  a saturação residual da fase não molhante.

De maneira semelhante à pressão capilar, a permeabilidade relativa de cada fase, é função do grau de saturação do meio. As expressões habitualmente utilizadas para descrição da permeabilidade relativa são derivadas das equações das curvas  $P_c - S_w$ .

Para o modelo de Brooks e Corey (1964) a permeabilidade relativa da fase molhante é descrita pela equação (3.34)

$$k_{rw} = S_e^{[(2+3\beta)/\beta]} \quad (3.34)$$

E a permeabilidade relativa da fase não molhante descrita pela equação (3.35)

$$k_{rnw} = (1 - S_e)^2 (1 - S_e^{[(2+\beta)/\beta]}) \quad (3.35)$$

### 3.4. Análise não linear global

Apresentam-se nesse item alguns aspectos sobre análise não linear global. De maneira geral, sendo conhecidos os campos iniciais de deslocamentos, poro pressões, saturações e tensões,  $({}^t \mathbf{u}, {}^t \mathbf{p}, {}^t \mathbf{S}, {}^t \boldsymbol{\sigma})$  o problema a ser resolvido consiste em se determinar os respectivos campos num instante  $t + \Delta t$ , para os quais o resíduo seja nulo. Logicamente, o problema não linear local apresentado no item anterior deve ser atendido.

Descrevem-se a seguir os vetores resíduos, inicialmente para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico e posteriormente para o problema com fluxo bifásico. A partir disso, colocam-se os problemas conforme a equação de Newton apontando-se algumas formas de solução.

#### 3.4.1. Acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico

Considerando-se a simplificação utilizada para discretização no tempo, podem-se descrever, a partir das equações (2.39) e (2.41), os resíduos para as equações de equilíbrio e fluxo num instante  $t + \Delta t$  numa iteração  $i$  como

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i = \left[ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{\mathbf{b}}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \frac{\mathbf{t}}{\Delta t} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \frac{\boldsymbol{\sigma}'_0}{\Delta t} d\Omega - \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}}{\Delta t} - \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}}{\Delta t} \end{array} \right]^i \quad (3.36)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i = \left[ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T q d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_{\pi}} \nabla \rho_{\pi} g h d\Omega - \\ \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_{\pi}} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}}{\Delta t} - \\ \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_{\pi}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{p} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \left( \mathbf{m}^T - \frac{\mathbf{m} \mathbf{D}_T}{3K_s} \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} \end{array} \right]^i \quad (3.37)$$

Para uma notação compacta descrevem-se os resíduos num instante  $t + \Delta t$  numa iteração  $i$  como

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}) \text{ sendo } \mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \end{array} \right\} \quad (3.38)$$

Assumindo-se um processo iterativo, e conhecendo-se as incógnitas do problema num instante  $t + \Delta t$  numa iteração  $i$ , fazendo-se uma expansão em série de Taylor até termos de primeira ordem dos vetores resíduos tem-se

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^{i+1}(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i + \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} = 0 \quad (3.39)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^{i+1}(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i + \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} = 0 \quad (3.40)$$

Ou, numa representação matricial

$$\left[ \begin{array}{cc} -\frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} & -\frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}^i} \\ -\frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} & -\frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}^i} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \end{array} \right\} \quad (3.41)$$

Sendo os incrementos de deslocamentos e poro pressões:

$$\begin{aligned} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^i \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^i \end{aligned} \quad (3.42)$$

Do sistema de equações (3.41) se obtém:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \Delta t \theta \mathbf{H} + \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \\ \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Onde

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \\ \mathbf{L} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{H} &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_{\pi}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{G} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_{\pi}} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \end{aligned} \quad (3.44)$$

### 3.4.2. Acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico

De maneira análoga ao apresentado para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico trata-se agora o problema com fluxo bifásico. Das equações (2.44), (2.47) e (2.48) descrevem-se os resíduos para as equações de equilíbrio, pressão da fase não molhante e saturação da fase molhante num instante  $t + \Delta t$  numa iteração  $i$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{\mathbf{b}}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \frac{\mathbf{t}}{\Delta t} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \frac{\boldsymbol{\sigma}'_0}{\Delta t} d\Omega - \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \left( \mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_{nw}}{\Delta t} - \\ \int_{\Omega} p_c \mathbf{B}^T \left( \mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} + \\ \int_{\Omega} (1 - S_{nw}) \mathbf{B}^T \left( \mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_c}{\Delta t} \end{pmatrix}^i \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i = & \left[ \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_{nw} d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{mw}}{\mu_{nw} B_{mw}} \nabla \mathbf{N}_p \rho_{mw} g h d\Omega - \right. \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ -\frac{\phi}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{B_{nw}} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{S}_w + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ (1 - S_{nw}) \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_c}{\Delta t} - \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ p_c \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} - \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ \frac{S_{nw}}{B_{mw}} \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_{mw}}{\Delta t} - \\
& \left. \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{mw}}{\mu_{nw} B_{mw}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{p}_{mw} \right] \quad (3.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i = & \left[ \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_w d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p \rho_w g h d\Omega - \right. \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ -\frac{\phi}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{B_w} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{S}_w + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ (1 - S_{nw}) \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_w}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_c}{\Delta t} - \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{(1 - S_{nw})}{B_w} \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ p_c \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{(1 - S_{nw})}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} - \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ \frac{(1 - S_{nw})}{B_w} \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_{mw}}{\Delta t} - \\
& \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{p}_{mw} + \\
& \left. \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{p}_c \right] \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Assim como para o caso monofásico escreve-se um vetor de resíduos.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}) \text{ sendo } \mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \end{array} \right\} \quad (3.48)$$

E faz-se uma expansão em série de Taylor até termos de primeira ordem dos vetores resíduos

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i + \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} + \\ &\frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i + \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} + \\ &\frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i + \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} + \\ &\frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ou, numa representação matricial

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} & -\frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} & -\frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{S}_w} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \\ -\frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} & -\frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} & -\frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{S}_w} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \\ -\frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} & -\frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} & -\frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{S}_w} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

Sendo os incrementos de deslocamentos, poro pressões e saturações:

$$\begin{aligned} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^i \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^i \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^i \end{aligned} \quad (3.53)$$

Como mostrado anteriormente as permeabilidades relativas são funções não lineares das poro pressões e das saturações. Desconsiderando as derivadas dessas parcelas em relação às incógnitas do problema obtém-se, do sistema de equações (3.52):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} & \mathbf{L}_c \\ \mathbf{L}_{nw} & \mathbf{G}_{nw} + \Delta t \theta \mathbf{H}_{nw} & \mathbf{O}_{nw} - \Delta t \theta \mathbf{M}_{nw} - \mathbf{P}_{nw} \\ \mathbf{L}_w & \mathbf{G}_w + \Delta t \theta \mathbf{H}_w & \mathbf{O}_w - \Delta t \theta \mathbf{M}_w - \mathbf{P}_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \\ \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \\ \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \\ \mathbf{L} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{L}_c &= \int_{\Omega} p_c \mathbf{B}^T \left( \mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{L}_{nw} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \\ \mathbf{L}_w &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{(1-S_{mw})}{B_w} \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \\ \mathbf{H}_w &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{H}_{nw} &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rmw}}{\mu_{nw} B_{mw}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{G}_w &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ \frac{(1-S_{mw})}{B_w} \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{G}_{nw} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{O}_w &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ -\frac{\phi}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{O}_{nw} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ -\frac{\phi}{B_{mw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{M}_w &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{B_w} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{M}_{nw} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{B_{nw}} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega$$

$$\mathbf{P}_w = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ p_c \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{(1-S_{nw})}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega$$

$$\mathbf{P}_{nw} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ p_c \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{(S_{nw})}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega$$

Cabe salientar que as matrizes apresentadas acima são matrizes tangentes.

Para o tratamento das condições de contorno essenciais (deslocamentos, poro pressões e saturações prescritas) utilizou-se o método das penalidades descrito por Bathe (1982).

Os sistemas de equações (3.43) e (3.54) podem ser escritos numa forma compacta como a equação de Newton

$${}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{q}^{i+1} = {}^{t+\Delta t} [\mathbf{H}(\mathbf{q}^i)^{-1}] {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}^i) \quad (3.56)$$

Onde  $\delta \mathbf{q}$  é o incremento das variáveis,  $\mathbf{H}$  a matriz Hessiana e  $\mathbf{R}$  o vetor dos gradientes.

No método de Newton a equação (3.56) é resolvida calculando-se a matriz Hessiana exatamente, obtendo-se dessa forma uma convergência quadrática. O cálculo exato da matriz Hessiana pode ter um custo computacional elevado, principalmente em problemas com muitas variáveis. Para contrapor essa característica os métodos Quase Newton apresentam-se como alternativa. Nesses métodos, uma aproximação da Hessiana, ou de sua inversa, é construída a partir dos valores dos gradientes ao longo das iterações. Esses métodos, dos quais o *BFGS* é o mais popular, são amplamente utilizados.

O sistema de equações (3.54) tem por sua vez, uma matriz não simétrica, devido essa característica, o método *BFGS* não pode ser empregado, dado que a atualização da inversa da matriz Hessiana no método *BFGS*, constrói por definição matrizes simétricas.