

## 2

# Formulação determinística para problemas de acoplamento fluido mecânico

### 2.1. Introdução

Apresentam-se nesse capítulo as equações fundamentais para descrição e formulação determinística dos problemas de acoplamento fluido mecânico tratados nesse trabalho. Inicialmente, descrevem-se algumas hipóteses assumidas para definição do modelo físico e das equações governantes dos problemas. Posteriormente, as equações governantes dos problemas são descritas sob a formulação de elementos finitos e algumas propriedades sobre a discretização dessas equações no domínio do tempo são apresentadas.

### 2.2. Modelo físico

Inicia-se a definição do modelo físico com a exposição dos conceitos de média volumétrica e média volumétrica intrínseca. Esses conceitos mostram-se úteis dada à dificuldade de descrição dos problemas no nível microscópico. Um volume elementar representativo (*VER*) de volume total  $V = \sum_{\pi} V_{\pi}$  é utilizado para definição de média volumétrica. A Figura 2.1 representa um *VER*, sendo  $V_{\pi}$  o volume ocupado por uma fase  $\pi$ . A média volumétrica de uma grandeza  $\chi$  para uma fase  $\pi$  é dada por (2.1)

$$\langle \chi_{\pi} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \chi_{\pi} dV \quad (2.1)$$

E a média volumétrica intrínseca dada por (2.2)

$$\langle \chi_{\pi} \rangle^{\pi} = \frac{1}{V_{\pi}} \int_{V_{\pi}} \chi_{\pi} dV = \frac{V}{V_{\pi}} \langle \chi_{\pi} \rangle \quad (2.2)$$

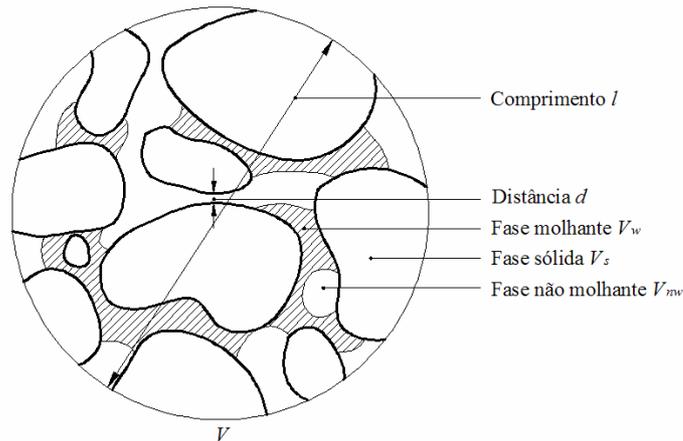


Figura 2.1 Volume elementar representativo

De acordo com Whitaker (1968) *apud* Lewis e Schrefler (1998) os resultados obtidos com o processo da média volumétrica apresentam-se válidos quando a relação (2.3) é satisfeita

$$d \ll l \ll L \quad (2.3)$$

Sendo  $L$  um comprimento característico associado ao meio poroso numa escala macroscópica,  $d$  um comprimento associado aos poros e  $l$  o comprimento característico do VER. Com essa relação satisfeita, espera-se também, que a média volumétrica seja independente do tempo e da posição no meio poroso.

De maneira geral, os vazios do meio poroso são preenchidos com fluidos e uma mistura de ar (vapor d'água, gás, etc.). Considerando-se a hipótese do meio poroso estar totalmente preenchido por duas fases de fluido (fase molhante  $w$  e fase não molhante  $nw$ ), o grau de saturação de uma fase  $\pi$  é dado pela razão entre o volume de poros ocupados pelo fluido  $\pi$ ,  $V_\pi$  e o volume total de poros de um volume elementar representativo,  $V_f$ .

$$S_\pi = \frac{V_\pi}{V_f} \quad (2.4)$$

Sendo  $V_f = V_w + V_{nw}$ . Dessa maneira  $S_w + S_{nw} = 1$ . Sendo  $S_w$  o grau de saturação da fase molhante e  $S_{nw}$  o grau de saturação da fase não molhante.

A porosidade do meio é definida pela razão entre o volume total de poros e o volume total do VER.

$$\phi = \frac{V_f}{V} \quad (2.5)$$

Prossegue-se a definição do modelo físico pela descrição das tensões. Assume-se: tração positiva, na fase sólida  $\sigma_s$  e compressão positiva para poro pressão na fase fluida  $\sigma_f$ . Aplicando-se o conceito de média volumétrica intrínseca podem ser obtidas as tensões totais médias, ou seja

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \sigma dV = \frac{1}{V} \left( \int_{V_s} \sigma dV + \int_{V_f} \sigma dV \right) \\ \langle \sigma \rangle &= \frac{V_s}{V} \langle \sigma_s \rangle^s + \frac{V_f}{V} \left( \frac{V_{mw}}{V_f} \langle \sigma_{mw} \rangle^{mw} + \frac{V_w}{V_f} \langle \sigma_w \rangle^w \right) \\ \langle \sigma \rangle &= (1-\phi) \langle \sigma_s \rangle^s + \phi \left( S_{mw} \langle \sigma_{mw} \rangle^{mw} + S_w \langle \sigma_w \rangle^w \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$\sigma_\pi$  representa o tensor de tensões médias da fase  $\pi$ . Para a fase de fluido o tensor de tensões é expresso de acordo com (2.7)

$$\sigma_\pi = \tau_\pi - \mathbf{m} p_\pi \quad (2.7)$$

Onde  $\tau_\pi$  representa as tensões cisalhantes e  $\mathbf{m}$  é um vetor contendo valores iguais a 1 para tensões normais e 0 para os componentes de tensão cisalhante.

$$\mathbf{m} = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \quad (2.8)$$

Negligenciando a parcela referente às tensões de cisalhamento para fluidos, pode-se escrever (2.9)

$$\langle \sigma \rangle = (1-\phi) \langle \sigma_s \rangle^s + \phi \mathbf{m} \left( S_{mw} \langle p_{mw} \rangle^{mw} + S_w \langle p_w \rangle^w \right) \quad (2.9)$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= (1-\phi) \langle \sigma_s \rangle^s + \phi \mathbf{m} \langle p^f \rangle^f \\ \langle p^f \rangle^f &= S_{mw} \langle p_{mw} \rangle^{mw} + S_w \langle p_w \rangle^w \end{aligned} \quad (2.10)$$

Onde  $\langle p^f \rangle^f$  é a poro pressão média proveniente das fases molhante e não molhante.

Verifica-se que o tensor das tensões é dividido em duas componentes: uma que representa o efeito das poro pressões e outra que deforma o esqueleto sólido, tensões efetivas  $\sigma'$ .

$$\langle \boldsymbol{\sigma}' \rangle = (1 - \phi) \langle \boldsymbol{\sigma}_s \rangle^s + \mathbf{m} \langle p^f \rangle^f \quad (2.11)$$

Omitindo o símbolo  $\langle \cdot \rangle$  e representando  $p^f$  apenas por  $p$  pode-se descrever o tensor de tensões totais por (2.12), sendo essa representação condizente com a definição de Terzaghi.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{m}p \quad (2.12)$$

As pressões das fases molhante e não molhante são relacionadas pela pressão capilar  $p_c$ .

$$p_c = p_{mw} - p_w \quad (2.13)$$

A pressão capilar para um meio isotérmico é função do grau de saturação da fase molhante.

Após a descrição do modelo físico assumido para representação do meio poroso, podem ser estabelecidas as equações governantes dos problemas de acoplamento fluido mecânico, tratados nesse trabalho.

### 2.3. Equação de equilíbrio

Apresentam-se neste item as equações que governam o comportamento mecânico em meios porosos deformáveis.

A equação de equilíbrio é determinada utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais para problemas quase estáticos, equação (2.14). Esta equação relaciona as velocidades das grandezas estáticas reais, como a tensão total  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  as forças de corpo  $\dot{\mathbf{b}}$  e as forças de superfície  $\dot{\mathbf{t}}$  com as grandezas cinemáticas virtuais como as deformações virtuais  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  e os deslocamentos virtuais  $\delta \mathbf{u}$ .

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (2.14)$$

As velocidades das tensões totais podem ser expressas em termos das velocidades das tensões efetivas e das velocidades das poro pressões. Essa relação é demonstrada na equação (2.15).

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{m} \dot{p} \quad (2.15)$$

Onde:  $\dot{\sigma}'$  é a velocidade da tensão efetiva,  $\dot{p}$  a velocidade das poro pressões.

A descrição da relação constitutiva, em termos de velocidades, pode ser dada pela equação (2.16)

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{D}_T (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_c - \dot{\varepsilon}_p - \dot{\varepsilon}_o) + \dot{\sigma}'_0 \quad (2.16)$$

Na equação (2.16),  $\dot{\varepsilon}$  representa a velocidade de deformação total do esqueleto,  $\dot{\varepsilon}_c$  a velocidade das deformações devido à fluência (expressa por uma função de fluência  $c$ , dependente do nível e da trajetória de tensões),  $\dot{\varepsilon}_p$  a velocidade das deformações volumétricas (a qual considera a deformabilidade dos grãos),  $\dot{\varepsilon}_o$  que representa outras velocidades de deformação, como as provocadas por fenômenos térmicos e químicos e por fim  $\dot{\sigma}'_0$  que representa a velocidade da tensão efetiva inicial. A matriz  $\mathbf{D}_T$  é dependente do nível e da trajetória de tensões e vários modelos constitutivos podem ser utilizados para defini-la.

$$\dot{\varepsilon}_c = c(\sigma') dt$$

$$\dot{\varepsilon}_p = -\mathbf{m} \frac{\dot{p}}{3K_s} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{D}_T = \mathbf{D}_T(\sigma', \varepsilon, \dot{\varepsilon})$$

Em (2.17),  $K_s$  representa o módulo volumétrico dos grãos.

Omitindo, por simplificação, as parcelas  $\dot{\varepsilon}_c$  e  $\dot{\varepsilon}_o$  da equação (2.16), a mesma pode ser escrita como:

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{D}_T \dot{\varepsilon} + \mathbf{D}_T \mathbf{m} \frac{\dot{p}}{3K_s} + \dot{\sigma}'_0 \quad (2.18)$$

Conseqüentemente a equação (2.15) pode ser escrita como:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_T \dot{\varepsilon} + \mathbf{D}_T \mathbf{m} \frac{\dot{p}}{3K_s} + \dot{\sigma}'_0 - \mathbf{m} \dot{p} \quad (2.19)$$

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}'' + \mathbf{D}_T \mathbf{m} \frac{\dot{p}}{3K_s} - \mathbf{m} \dot{p} \quad (2.20)$$

Onde  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}'_0$  representa a velocidade da tensão responsável por toda deformação da fase sólida.

Considerando-se a hipótese de linearidade geométrica pode-se descrever a relação entre velocidades de deslocamentos e velocidades de deformações infinitesimais como a equação (2.21).

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} \right) \quad (2.21)$$

Com as definições apresentadas reescreve-se a equação (2.14) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \dot{p} \frac{1}{3K_s} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}'_0 d\Omega \\ - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{m} \dot{p} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

## 2.4. Equação de fluxo

Inicia-se esse item do trabalho com a descrição da equação de fluxo para o caso trifásico, sendo posteriormente apresentadas as equações para os casos particulares de fluxo bifásico e monofásico.

### 2.4.1. Fluxo trifásico

Descrevem-se neste item as equações que governam o fluxo trifásico em meios porosos.

Em um meio poroso, o fluxo de fluido deve satisfazer a conservação de massa de fluido. Para efetuar o balanço de massa de fluido, toma-se como volume de controle um cubo elementar constituído de material poroso, Figura 2.2

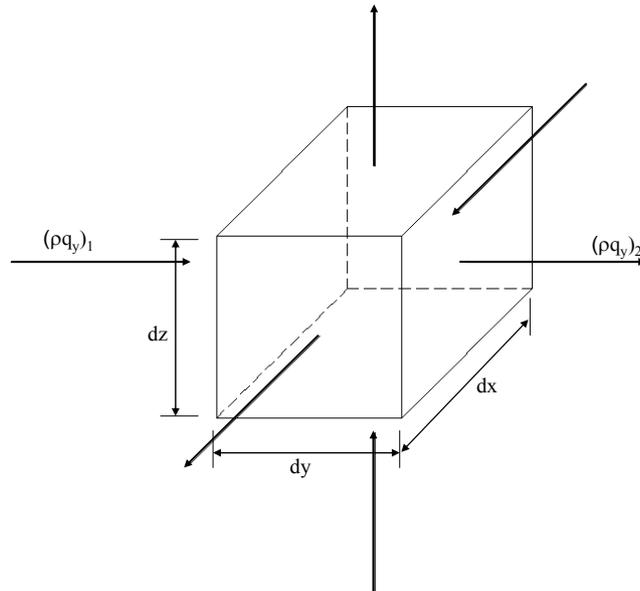


Figura 2.2 Volume de controle para balanço de massa do fluido.

Tomando-se inicialmente o fluxo na direção  $d_y$  através da face  $d_x d_z$ , tem-se como fluxo de massa de fluido,  $(\rho q_y)_1 d_x d_z$  e  $(\rho q_y)_2 d_x d_z$ . Sendo  $\rho$  e  $q$  densidade do fluido e vazão, respectivamente. Considerando-se que  $(\rho q_y)$  seja uma função contínua e diferenciável, pode-se escrever

$$(\rho q_y)_2 = (\rho q_y)_1 + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} d_y \quad (2.23)$$

Dessa forma, o fluxo na direção  $y$  gera uma diminuição na massa de fluido igual a:

$$(\rho q_y)_2 - (\rho q_y)_1 = \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} d_y \quad (2.24)$$

Adotando-se o mesmo procedimento para as demais direções e fazendo-se o somatório das três parcelas resultantes, obtém-se o balanço de massa de fluido devido o fluxo, equação (2.25)

$$\left( \frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} \right) d_x d_y d_z = \nabla^T (\rho q) d_x d_y d_z \quad (2.25)$$

Podendo-se então, representar o balanço de massa de fluido no meio poroso, equação da continuidade, pela equação (2.26)

$$\nabla^T (\rho q) d_x d_y d_z + \frac{d}{dt} (m_\pi d_x d_y d_z) = 0 \quad (2.26)$$

$$\nabla^T(\rho q) + \dot{m}_\pi = 0$$

Onde  $\dot{m}_\pi$  representa o incremento de massa de fluido numa parcela infinitesimal do meio poroso por unidade de tempo.

Tomando-se a equação de Darcy para representar o fluxo de fluido, pode-se de uma forma geral expressar a equação da continuidade por

$$-\nabla^T [T_m \nabla(p_\pi + \rho_\pi g h)] + \frac{\phi}{B_\pi} \frac{\partial S_\pi}{\partial t} + \phi S_\pi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{B_\pi} \right) + \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R_{s\pi} S_\pi}{B_\pi} \right) + \lambda_f \quad (2.27)$$

$$\left[ \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \dot{p} \right] = 0$$

Onde:

$$T_m = \mathbf{k} \left( \frac{k_{r\pi}}{\mu_\pi B_\pi} + R_{s\pi} \frac{k_{r\pi}}{\mu_\pi B_\pi} \right) \quad (2.28)$$

$$\lambda_f = \frac{S_\pi}{B_\pi} + \frac{R_{s\pi} S_\pi}{B_\pi}$$

Sendo  $\mathbf{k}$  a matriz de permeabilidade intrínseca do meio poroso,  $p$  a poro pressão como descrito em (2.10),  $\phi$  a porosidade do meio,  $g$  a aceleração da gravidade,  $h$  a carga de elevação,  $k_{r\pi}$  a permeabilidade relativa,  $\mu$  a viscosidade dinâmica,  $S$  o grau de saturação,  $B$  o fator de variação de volume,  $R_{s\pi}$  o fator de dissolução de gás no líquido, todos referentes à fase  $\pi$  e  $\nabla$  o operador de derivação,

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T.$$

Cabe salientar que a permeabilidade relativa de cada fase é função da pressão capilar que por sua vez é função do grau de saturação do meio. Entretanto, para simplificação da notação da formulação, a permeabilidade relativa de cada fase será representada apenas por  $k_{r\pi}$ .

O fator de variação de volume  $B$  descreve a razão entre o volume da fase  $\pi$  medido nas condições de pressão em questão e o volume medido nas condições

$$\text{padrão (STC)} \quad B_\pi = \frac{V_\pi}{V_{\pi STC}}.$$

O fator de dissolução de gás no líquido  $R_{s\pi}$  relaciona o volume de gás medido nas condições padrão, dissolvido nas condições de pressão padrão.

$$R_{s\pi} = \frac{V_{dgSTC}}{V_{\pi STC}}.$$

$\left( \frac{\phi}{B_\pi} \frac{\partial S_\pi}{\partial t} \right)$  descreve a velocidade de variação da saturação da fase  $\pi$ .

$\left[ \phi S_\pi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{B_\pi} \right) + \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R_{s\pi} S_\pi}{B_\pi} \right) \right]$  representa a velocidade de variação da

densidade de fluido, também da fase  $\pi$ .

$\left( \mathbf{m}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right)$  representa a velocidade de variação volumétrica do esqueleto sólido.

$\left( \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \dot{p} - \frac{(1-\phi)}{K_s} \dot{p} \right)$  determina a velocidade de

variação do volume de grãos devido às tensões efetivas.

A partir do caso trifásico obtêm-se as equações de fluxo particularizadas para as condições de fluxo bifásico e monofásico.

#### 2.4.2. Fluxo bifásico

Para o caso particular de fluxo de fluido molhante e fluido não molhante a equação da continuidade pode ser expressa da seguinte forma

$$-\nabla^T [T_m \nabla (p_\pi + \rho_\pi gh)] + \frac{\phi}{B_\pi} \frac{\partial S_\pi}{\partial t} + \phi S_\pi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{B_\pi} \right) + \lambda_f. \quad (2.29)$$

$$\left[ \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \dot{p} \right] = 0$$

Com:

$$T_m = \mathbf{k} \left( \frac{k_{r\pi}}{\mu_\pi B_\pi} \right) \quad (2.30)$$

$$\lambda_f = \frac{S_\pi}{B_\pi}$$

### 2.4.3. Fluxo monofásico

A equação da continuidade para fluxo monofásico de água ou óleo pode ser expressa da seguinte maneira

$$\left[ \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left[ \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_\pi} \right] \dot{p} - \nabla^T [T_m \nabla (p_\pi + \rho_\pi g h)] = 0 \quad (2.31)$$

Com  $T_m = \mathbf{k} / \mu_\pi$ .

Nota-se que a variação da densidade de fluido nesse caso é representada por  $\frac{\phi}{K_\pi} \dot{p}$ , sendo  $K_\pi$  o módulo volumétrico do fluido.

### 2.5. Solução do problema de valor de contorno

Um problema de valor de contorno requer que suas equações sejam satisfeitas em todos os pontos do domínio ( $\Omega$ ) e que suas condições de contorno sejam satisfeitas no contorno do domínio ( $\Gamma$ ). Na equação (2.22) as condições de contorno são atendidas naturalmente. Entretanto, na equação da continuidade, as condições de contorno devem satisfazer o seguinte:

(a) A continuidade do fluxo através do contorno;

$$-\mathbf{n}^T T_m - q = 0 \quad (2.32)$$

Onde,  $\mathbf{n}$  é um vetor unitário na direção da normal à superfície de contorno e  $q$  é o fluxo por unidade de área da superfície de contorno.

(b) As poro pressões prescritas  $p^b$ ;

$$p = p^b \quad (2.33)$$

Designando a equação da continuidade de  $\bar{\mathbf{A}}$  e a condição de contorno (2.32) de  $\bar{\mathbf{B}}$ , é requerida, para o problema de valor de contorno, que se atenda a seguinte condição:

$$\int_{\Omega} \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{A}} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{B}} d\Gamma = 0 \quad (2.34)$$

Na equação (2.34)  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  representam funções arbitrárias.

## 2.6. Formulação em elementos finitos

Apresenta-se nesse item do trabalho, a formulação em elementos finitos das equações que descrevem o fluxo monofásico e o fluxo bifásico, em problemas de acoplamento fluido mecânico. As equações são descritas num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  com um contorno  $\Gamma$  para um tempo  $t \in [0, T]$ .

### 2.6.1. Acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico

#### 2.6.1.1. Formulação em elementos finitos das equações governantes

Considerando-se a hipótese de fluxo monofásico a equação (2.34) apresenta em  $\bar{\mathbf{A}}$  a segunda derivada da parcela  $(p_\pi + \rho_\pi gh)$ . De acordo com Lewis e Schrefler (1998), é necessária uma distribuição suave no espaço dessa parcela devido à integração. Em ordem dessa limitação, pode-se escrever a parcela com derivada segunda da equação (2.34) sob uma forma fraca, utilizando-se o teorema de Green, descrito a seguir:

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi d\Omega + \int_{\Gamma} \phi \psi n_x d\Gamma \quad (2.35)$$

Onde  $n_x$  é o cosseno diretor entre a normal e a direção  $x$ .

Com essas substituições efetuadas escreve-se a equação (2.34) como:

$$\int_{\Omega} \left\{ \mathbf{a}^T \left[ \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_\pi} \right) \dot{p} \right] \right\} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_\pi} \nabla (p_\pi + \rho_\pi gh) d\Omega - \int_{\Gamma} \left\{ \mathbf{a}^T \mathbf{n}^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_\pi} \nabla (p_\pi + \rho_\pi gh) + \mathbf{b}^T \mathbf{n}^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_\pi} \nabla (p_\pi + \rho_\pi gh) + \mathbf{b}^T q \right\} d\Gamma = 0 \quad (2.36)$$

Pode-se assumir que  $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ , dado que essas são funções arbitrárias. Assim escreve-se a equação (2.36) como:

$$\int_{\Omega} \left\{ \mathbf{a}^T \left[ \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_\pi} \right) \dot{p} \right] \right\} d\Omega + \quad (2.37)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_\pi} \nabla (p_\pi + \rho_\pi gh) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{a}^T q d\Gamma = 0$$

Aplicando-se agora o método dos elementos finitos nas equações (2.21) e (2.37), em termos de deslocamentos e poro pressões (incógnitas do problema), utilizando-se as transformações apresentadas em (2.38) e representando o vetor de poro pressões simplesmente por  $\mathbf{p}$  determinam-se as equações de equilíbrio e fluxo monofásico segundo o método de elementos finitos.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}_u \mathbf{u}^* \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{p} &= \mathbf{N}_p \mathbf{p}^* \end{aligned} \quad (2.38)$$

$\mathbf{N}_u$  e  $\mathbf{N}_p$  são respectivamente, as funções de forma para deslocamentos e poro pressões,  $\mathbf{B}$  é a matriz de compatibilidade que relaciona deslocamentos e deformações e o símbolo  $(.)^*$  faz referência ao ponto nodal. Assim, a equação (2.22) é descrita por

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}^*}{dt} - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}^*}{dt} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}^*}{dt} \right\} - \\ \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{d\mathbf{b}}{dt} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \frac{d\mathbf{t}}{dt} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \frac{d\boldsymbol{\sigma}'_0}{dt} d\Omega \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

E a equação (2.37) como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_\pi} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}^* + \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}^*}{dt} + \\ \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_\pi} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}^*}{dt} + \\ \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \nabla^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_\pi} \nabla \rho_\pi gh d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{a}^T q d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

O método de Galerkin pode ser aplicado na equação (2.40), dessa maneira substituem-se as funções  $\mathbf{a}$  pelas funções de forma  $\mathbf{N}_u$  ou  $\mathbf{N}_p$ .

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_{\pi}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}^* + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}^*}{dt} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_{\pi}} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{dp^*}{dt} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \nabla^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_{\pi}} \nabla \rho_{\pi} g h d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T q d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.41}$$

## 2.6.2. Acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico

### 2.6.2.1. Formulação em elementos finitos das equações governantes

A partir da equação (2.10), a velocidade de  $p$  pode ser expressa da seguinte forma

$$\dot{p} = \dot{S}_w p_w + S_w \dot{p}_w + \dot{S}_{nw} p_{nw} + S_{nw} \dot{p}_{nw} \tag{2.42}$$

Considerando a definição de pressão capilar e assumindo como variáveis do problema de fluxo bifásico a pressão de fluido da fase não molhante e o grau de saturação da fase molhante, escreve-se

$$\dot{p} = \dot{p}_{nw} - S_w \dot{p}_c + \dot{S}_w p_c \tag{2.43}$$

Com essas considerações, descrevem-se a partir de (2.21) e (2.29) as equações de equilíbrio e a equação de fluxo bifásico. A equação de equilíbrio sob formulação de elementos finitos é dada por (2.44)

$$\begin{aligned}
& \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}^*}{dt} - \int_{\Omega} (1 - S_{nw}) \mathbf{B}^T \left( \mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{dp_c^*}{dt} \right\} \\
& + \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{\Omega} p_c \mathbf{B}^T \left( \mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{dS_w^*}{dt} \right\} \\
& - \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \left( \mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{dp_{nw}^*}{dt} \right\} \\
& - \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{d\mathbf{b}}{dt} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \frac{dt}{dt} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \frac{d\boldsymbol{\sigma}'_0}{dt} d\Omega \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.44}$$

As transformações utilizadas são as apresentadas em (2.38) e o símbolo  $(\cdot)^*$  faz referência ao ponto nodal.

A equação de fluxo para fase não molhante pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
 & -\nabla^T \left[ \mathbf{k} \frac{k_{rmw}}{\mu_{mw} B_{mw}} \nabla (\mathbf{p}_{mw}^* + \rho_{mw} gh) \right] - \frac{\phi}{B_{mw}} \frac{\partial S_w}{\partial t} - \phi S_w \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{B_{mw}} \right) + \\
 & \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left[ \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - (1 - S_{mw}) \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{d\mathbf{p}_c^*}{dt} \right] + \\
 & \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left[ \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{d\mathbf{p}_{mw}^*}{dt} - p_c \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{d\mathbf{S}_w^*}{dt} \right] = 0
 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Utilizando-se a condição apresentada em (2.34) para solução do problema de valor de contorno e o teorema de Green para descrever a parcela com derivada segunda, reescreve-se (2.45), eliminando o símbolo  $(\cdot)^*$  por simplificação da notação, como

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \left[ -\frac{\phi}{B_{mw}} \frac{\partial \mathbf{S}_w}{\partial t} - \phi \mathbf{S}_w \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{B_{mw}} \right) \right] d\Omega + \\
 & \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \left\{ \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left[ \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right] \right\} d\Omega + \\
 & \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \left\{ \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left[ \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \left( \frac{d\mathbf{p}_{mw}}{dt} - p_c \frac{d\mathbf{S}_w}{dt} - (1 - S_{mw}) \frac{d\mathbf{p}_c}{dt} \right) \right] \right\} d\Omega + \\
 & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \left[ \mathbf{k} \frac{k_{rmw}}{\mu_{mw} B_{mw}} \nabla (\mathbf{p}_{mw} + \rho_{mw} gh) \right] d\Omega - \\
 & \int_{\Gamma} \left\{ \mathbf{a}^T \mathbf{n}^T \left[ \mathbf{k} \frac{k_{rmw}}{\mu_{mw} B_{mw}} \nabla (\mathbf{p}_{mw} + \rho_{mw} gh) \right] \right\} d\Gamma - \\
 & \int_{\Gamma} \left\{ \mathbf{b}^T \mathbf{n}^T \left[ \mathbf{k} \frac{k_{rmw}}{\mu_{mw} B_{mw}} \nabla (\mathbf{p}_{mw} + \rho_{mw} gh) \right] + \mathbf{b}^T \mathbf{q}_{mw} \right\} d\Gamma = 0
 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Fazendo-se  $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$  e utilizando as transformações apresentadas em (2.38), a equação para o fluxo da fase não molhante sob formulação de elementos finitos é descrita por

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ -\frac{\phi}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\partial \mathbf{S}_w}{\partial t} - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{B_{nw}} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{S}_w - \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ (1-S_{nw}) \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}_c}{dt} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ p_c \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{S}_w}{dt} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}_{nw}}{dt} + \\
& \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_{nw} B_{nw}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_{nw} - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_{nw} B_{nw}} \nabla \mathbf{N}_p \rho_{nw} g h d\Omega - \\
& \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_{nw} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

A equação para saturação da fase molhante é obtida de maneira análoga, sendo descrita por

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ -\frac{\phi}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\partial \mathbf{S}_w}{\partial t} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{B_w} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{S}_w - \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ (1-S_{nw}) \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_w}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}_c}{dt} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{(1-S_{nw})}{B_w} \left( \mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ p_c \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{(1-S_{nw})}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{S}_w}{dt} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[ \frac{(1-S_{nw})}{B_w} \left( \frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}_{nw}}{dt} + \\
& \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_{nw} - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_c - \\
& \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p \rho_w g h d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_w d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Como se verificou, empregou-se para formulação em elementos finitos o método de Galerkin. Para a equação da pressão a formulação de Galerkin é suficiente para se obter uma aproximação razoável da solução. Entretanto, devido

às características da equação da saturação (equação parabólica-hiperbólica), a formulação de Galerkin pode se mostrar instável, apresentando oscilações numéricas em problemas que apresentam grandes velocidades. De acordo com Brooks e Hughes (1982), para que essas possíveis oscilações não ocorram empregam-se métodos que utilizam uma formulação estabilizada, refina-se a malha de elementos finitos ou se controlam os incrementos de tempo.

Para formulação estabilizada, geralmente utilizam-se métodos da família Petrov-Galerkin. Dentre esses se destaca o método SUPG (Streamline Upwind/Petrov-Galerkin), apresentado numa série de trabalhos desenvolvidos por Hughes e outros, se destacando os trabalhos que apresentam a generalização do SUPG, Hughes e Mallet (1986) e onde se demonstra a convergência do método, Hughes *et al* (1987).

No presente estudo, para se evitar possíveis oscilações se utilizará malhas suficientemente refinadas ou incrementos de tempo pequenos.

## 2.7. Discretização no tempo

Para solução do problema de valor inicial, Lewis e Schrefler (1998), sugerem a utilização de um esquema em diferenças finitas. Sendo  $\mathbf{q} = \{\mathbf{u} \ \mathbf{p}\}^T$  para fluxo monofásico,  $\mathbf{q} = \{\mathbf{u} \ \mathbf{p}_{mw} \ \mathbf{S}_w\}^T$  para fluxo bifásico e  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}^{t+\Delta t} - \mathbf{q}^t) / \Delta t$ . Utiliza-se o método trapezoidal generalizado para discretização no domínio do tempo, assim:

$$\mathbf{q}^{t+\theta} = (1 - \theta) \mathbf{q}^t + \theta \mathbf{q}^{t+\Delta t} \quad (2.49)$$

Onde  $\Delta t$  é o tamanho do passo de tempo,  $\mathbf{q}^t$  e  $\mathbf{q}^{t+\Delta t}$  correspondem ao vetor  $\mathbf{q}$  nos instantes  $t$  e  $t + \Delta t$  respectivamente e  $\theta$  é um parâmetro de integração limitado por  $0 \leq \theta \leq 1$ .

### 2.7.1. Propriedades numéricas da discretização no tempo

A escolha do parâmetro de integração  $\theta$  deve ser tal que garanta as condições de consistência e estabilidade da solução. Faz-se a seguir, de acordo

com Hughes (1977), um estudo sobre esse parâmetro para um problema quase estático não linear, descrito de forma compacta pela equação seguinte.

$${}^{t+\theta} \mathbf{A}(\theta) \dot{\mathbf{X}} + {}^{t+\theta} \mathbf{B}(\theta) \mathbf{X} = {}^{t+\theta} \mathbf{C} \quad (2.50)$$

$\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são matrizes de coeficientes e  $\mathbf{X}$  um vetor de incógnitas. Assumi-se que a solução da equação (2.50) pode ser dada por

$${}^{t+\theta} \mathbf{X} = \boldsymbol{\Psi} {}^{t+\theta} \mathbf{y} \quad (2.51)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\Psi} \dot{\mathbf{y}} \quad (2.52)$$

Sendo  $y_i = e^{s_i t}$ ,  $s_i = \text{constante}$  e  $\boldsymbol{\Psi}$  um conjunto de autovetores da matriz  ${}^{t+\theta} \mathbf{A}^{-1} {}^{t+\theta} \mathbf{B}$ . Substituindo  $\mathbf{X}$  e  $\dot{\mathbf{X}}$  dados em (2.51) e (2.52) na equação (2.50) e a premultiplicando por  $\boldsymbol{\Psi}^T$ , tem-se:

$$\boldsymbol{\Psi}^T {}^{t+\theta} \mathbf{A}(\theta) \boldsymbol{\Psi} \dot{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\Psi}^T {}^{t+\theta} \mathbf{B}(\theta) \boldsymbol{\Psi} {}^{t+\theta} \mathbf{y} = \boldsymbol{\Psi}^T {}^{t+\theta} \mathbf{C} \quad (2.53)$$

A partir da equação (2.53) pode-se representar o problema, para um grau de liberdade, da seguinte maneira

$$y_i + {}^{t+\theta} \lambda ({}^{t+\theta} X_i) \dot{y}_i = {}^{t+\theta} m_i \quad (2.54)$$

Onde  ${}^{t+\theta} \lambda$  é o maior autovalor da matriz  ${}^{t+\theta} \mathbf{A}^{-1} {}^{t+\theta} \mathbf{B}$ . Descrevendo-se (2.54) sob a forma sugerida no item referente à discretização no tempo, tem-se

$${}^{t+\Delta t} y_i = (1 - \theta) {}^t y_i + \theta {}^{t+\Delta t} y_i \text{ e } \dot{y}_i = \frac{({}^{t+\Delta t} y_i - {}^t y_i)}{\Delta t} \quad (2.55)$$

Após essas considerações, a seguinte forma de recorrência pode ser escrita

$${}^{t+\Delta t} y_i = \frac{1 - (1 - \theta) \Delta t {}^{t+\theta} \lambda}{1 + \Delta t \theta {}^{t+\theta} \lambda} {}^t y_i + (1 - \theta) {}^t m_i + \theta {}^{t+\Delta t} m_i \quad (2.56)$$

Para estabilidade da solução é requerido que

$$\left| \frac{1 - (1 - \theta) \Delta t {}^{t+\theta} \lambda}{1 + \Delta t \theta {}^{t+\theta} \lambda} \right| \leq 1 \quad (2.57)$$

Para  $\theta \geq 0,5$  o algoritmo de integração é incondicionalmente estável, tanto para problemas lineares quanto para não lineares. Para  $\theta = 0,5$  tem-se precisão de segunda ordem. No caso de  $\theta < 0,5$ , o algoritmo em questão é incondicionalmente estável se

$${}^{t+\theta} \lambda \Delta t \leq \frac{2}{(1-2\theta)} \quad (2.58)$$

A partir dessas observações será utilizado nesse trabalho  $\theta = 0,5$ .