2
Aspectos Relevantes da Modelagem de Placas

O presente capítulo apresenta os funcionais de energia utilizados para a obtenção da rigidez de uma placa. Além disso, desenvolve-se uma formulação matricial para o estudo da vibração e flambagem de tais estruturas apropriada para representação computacional no formato combinado de Rayleigh-Ritz e elementos finitos.

2.1
Fundamentos da Teoria de Flexão de Placas

O Estado de Flexão para uma placa delgada ocorre ao aplicarmos um carregamento na direção normal ao seu plano, provocando, assim, o aparecimento de curvaturas no elemento.

A Figura 2.1 destaca um elemento infinitesimal de área $dx.dy$ e espessura t de uma placa sob flexão, pelo qual é definida a superfície neutra através do plano z=0. As funções que expressam o cálculo das deformações no plano à distância z da superfície neutra são definidas pelas variáveis ε_x, ε_y e γ_{xy}.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2-1}$$

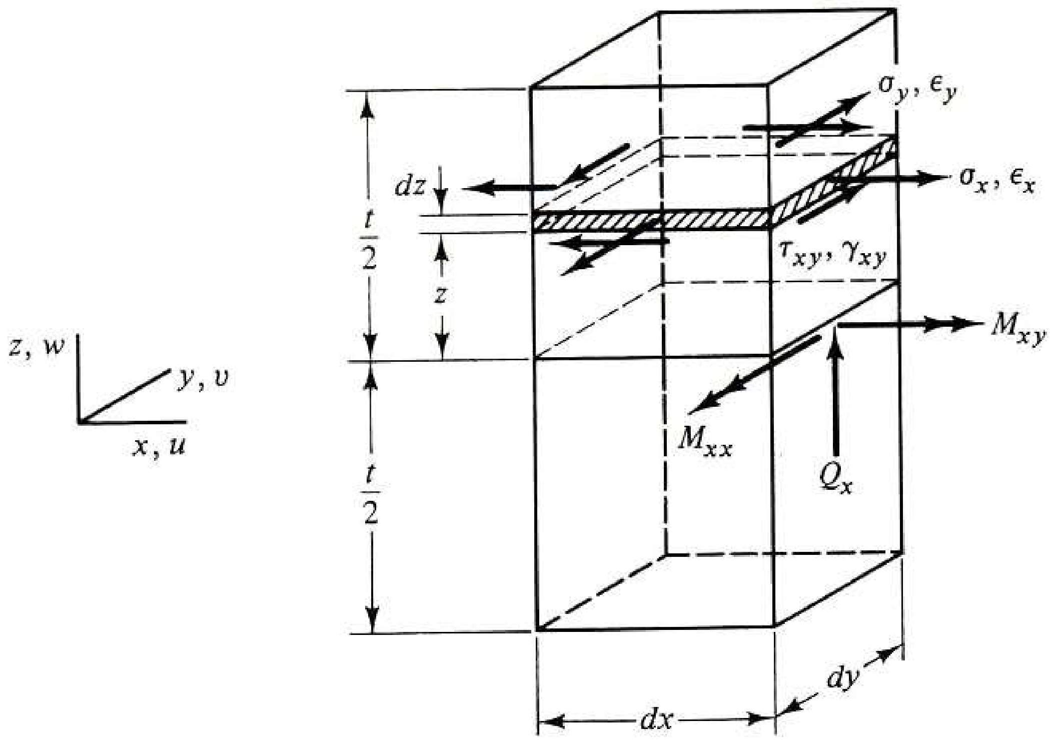

Figura 2.1: Elemento de placa em flexão (de [7]).

Uma suposição básica, na teoria de flexão de placas delgadas, é que a normal à superfície neutra permanece retilínea e normal a esse plano após ocorrerem as deformações. Segundo a teoria clássica da flexão de placas de Kirchoff [14] tem-se que,

- Pontos situados à superfície média, *z=0*, movem-se apenas na direção "*z*" quando a placa sofre deformação;
- Um segmento reto perpendicular à superfície média antes do carregamento permanece indeformado e perpendicular à superfície média após carregamento (linha *OP-O'P'* da figura 2.2).

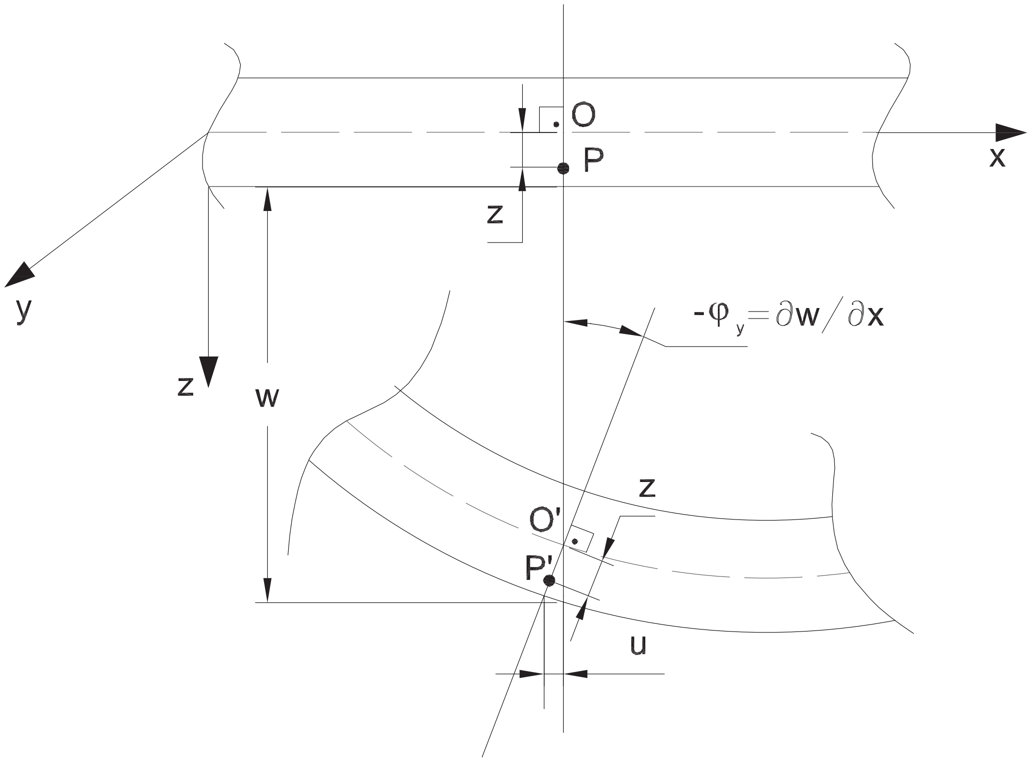

Figura 2.2: Deslocamento de um ponto situado sobre uma normal ao plano médio da placa ([18]).

Considerando-se pequenos deslocamentos, segundo a ilustração da Figura 2.2, um ponto "P" situado a uma distância "z" da superfície média, após a deformação da placa, possui deslocamentos "u" na direção "x". Procedendo da mesma forma com o deslocamento "v", na direção "y", vemos que os deslocamentos são proporcionais às rotações "φ_x" e "φ_y":

$$u = z\varphi_y = -z\frac{\partial w}{\partial x} \qquad v = z\varphi_x = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2-2}$$

Substituindo u e v nas expressões de deformações temos:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2-3}$$

Nestas expressões temos apenas um tipo de translação (w) e três tipos de deformações, porém nas equações de u e v há a ocorrência de uma variação linear da superfície neutra compreendendo-se, assim, a existência de apenas um tipo de translação. Além disso, a deformação normal à direção z e as deformações cisalhantes são, geralmente, desprezadas no estudo de placas delgadas. Quando consideramos um material isotrópico utilizamos a seguinte matriz para a relação entre tensões e deformações.

$$\mathbf{E}=\frac{\mathrm{E}}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{2-4}$$

onde:

$$\lambda = \frac{1-\nu}{2} \tag{2-5}$$

No entanto, se o material considerado for ortotrópico, isto é, levando em consideração as direções x e y do material, a matriz que relaciona tensão-deformação é representada pela equação (2-6):

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & 0 \\ E_{yx} & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \tag{2-6}$$

Em se tratando das tensões que ocorrem nas direções "x" e "y", segundo a figura 2.1, a variação é linear na direção "z" surgindo, assim, os momentos "Mx" e "My" como indicam as seguintes funções 2-7. Além destes momentos, há, também, o Momento de torção "Mxy" ocorrido devido à manifestação das tensões tangenciais que variam linearmente ao longo de z. Vale ressaltar que, na superfície média da placa, as tensões se anulam devido à origem do sistema de coordenadas adotado.

$$M_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} -\sigma_x.z.dz \qquad M_{yy} = \int_{-t/2}^{t/2} -\sigma_y.z.dz \tag{2-7a}$$

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy}.z.dz \qquad M_{yx} = -\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx}.z.dz \tag{2-7b}$$

Para placas delgadas, as tensões as normais e tangencias em z podem ser desprezadas por terem valores pequenos quando comparados às dos eixos x e y.

Os valores para as tensões são obtidos através das relações tensão - deformações para o Estado Plano de Tensões como está escrito a seguir:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu.\varepsilon_y) \qquad \sigma_y = \frac{E}{2.(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu.\varepsilon_x) \qquad \tau_{xy} = \frac{E\lambda}{1-\nu^2}\gamma_{xy} \tag{2-8}$$

Substituindo as deformações 2-3 nas equações 2-8 chega-se a seguinte igualdade:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu.z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z - \nu.z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E.\lambda}{1-\nu^2}\left(-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \tag{2-9}$$

Substituindo, agora, estas tensões 2-9 nas equações de momentos têm-se que:

$$M_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) z^2 dz$$

$$M_{yy} = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) z^2 dz$$

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E.\lambda}{1-\nu^2}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) z^2 dz \tag{2-10}$$

Resolvendo a integral em z tem-se que:

$$\int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz = \frac{t^3}{12} \tag{2-11}$$

Onde:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \tag{2-12}$$

Ao analisar-se o sistema matricialmente obtém-se o seguinte vetor de momentos:

$$\mathrm{M} = \{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\} \tag{2-13}$$

Sendo estes momentos definidos por:

$$M_x = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y}) \qquad M_y = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}) \tag{2-14}$$

Para as deformações generalizadas considerar-se-á o seguinte vetor:

$$\phi = \{\phi_{xx}, \phi_{,yy}, \phi_{,xy}\} = \{w_{,xx}, w_{,yy}, 2w_{,xy}\} \tag{2-15}$$

As relações de equilíbrio entre os esforços solicitantes na direção de z, desprezando-se os termos de ordem superior, são formuladas a partir da Figura 2.3.

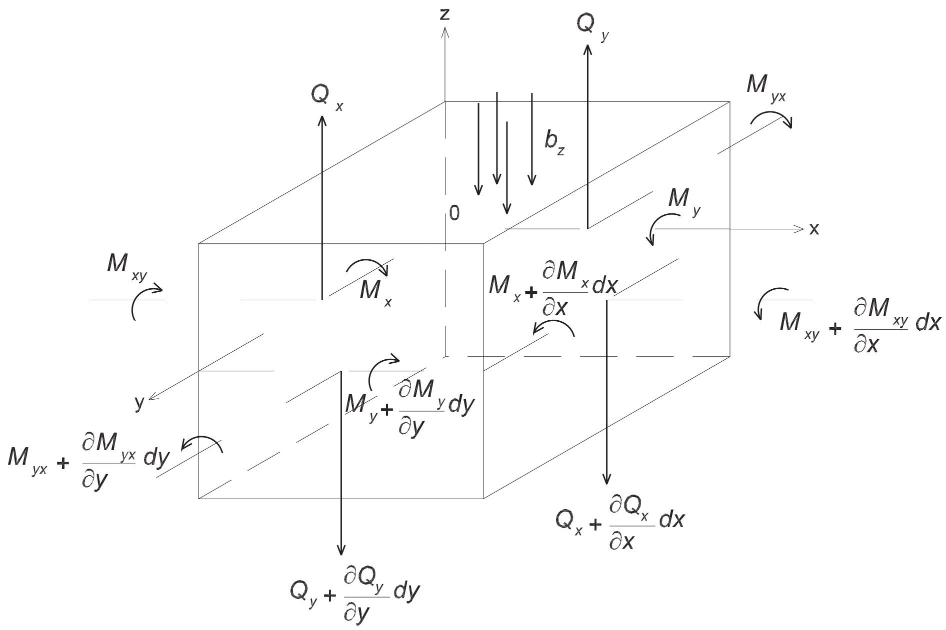

Figura 2.3: Equilíbrio de uma placa
[19]

Fazendo-se as devidas substituições, obtém-se as seguintes expressões:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + b_z = 0 \qquad (2\text{-}16)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \qquad \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \qquad (2\text{-}17)$$

Na análise por elementos finitos preferiu-se usar uma formulação em energia diretamente.

2.2 Funcionais de Energia

Para explicar a maneira com que os funcionais de energia são usados no estudo de flambagem de placas, nada melhor do que adotar um exemplo de placa carregada, simplesmente apoiada, assim como ilustra a figura 2.4. Segundo o método da energia potencial estacionária [5], esta placa estará em equilíbrio se sua energia potencial total V for estacionária. Além disso, V deve satisfazer as equações de Euler do cálculo variacional.

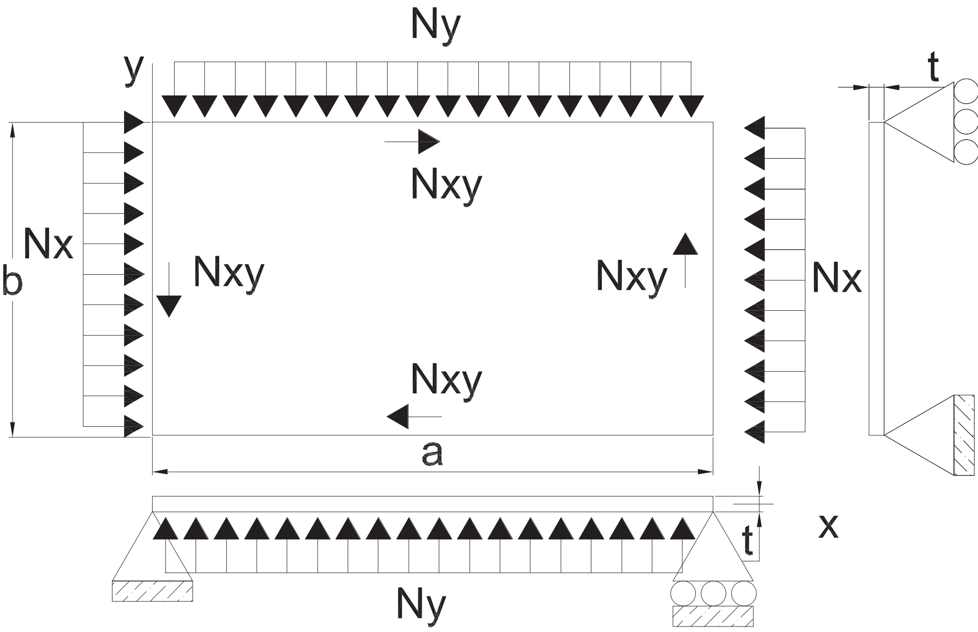

Figura 2.4: Placa simplesmente apoiada sujeita a um carregamento de compressão.

[5]

A energia potencial de uma placa, sujeita a uma pressão lateral, $p(x, y)$, com carregamento sobre os bordos, representa a soma da energia de deformação U com a energia potencial de cargas aplicadas, Ω:

$$V = U + \Omega \tag{2-18}$$

A energia de deformação de uma placa delgada, desprezando-se o efeito das tensões no eixo z como menciona a teoria clássica de placas, é dada por:

$$U = \frac{E}{2\,(1-\nu^2)} \int\int\int \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_x + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2 \right) dxdydz \tag{2-19}$$

Substituindo as deformações pelas expressões 2-3 chega-se a seguinte igualdade:

$$U = D \int\int \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dxdy \tag{2-20}$$

Sabendo-se que D, a rigidez de flexão da placa, é dada por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2-21}$$

Já a energia potencial das cargas aplicadas, para um sistema conservativo, é igual ao trabalho realizado pelas cargas quando a estrutura está deformada, assim como está na equação 2-22.

$$\Omega = -\int\int (pw)dxdy \tag{2-22}$$

Pode-se acrescentar a seguir o trabalho realizado pelas forças agindo no plano médio da placa, que é função dos deslocamentos no plano causados pela flexão de placa, conforme expressão abaixo.

$$\Omega = -\frac{1}{2}\int\int \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \right] dxdy \tag{2-23}$$

2.3
Matrizes de Rigidez Elástica, Geométrica, Massa

As matrizes de interesse nos problemas de análise estática e dinâmica, com efeitos de flambagem incluídos, foram montadas através das superposições de funções (funções de forma do elemento, funções adicionais internas e as de contorno) que serão descritas no capítulo 3 onde os cálculos, de cada rigidez, foram feitos separadamente. Com isso, as matrizes dos elementos podem ser escritas da seguinte forma:

$$[K_{E,G,M}]_{elemento} = \begin{bmatrix} [K_{E,G,M}]_{ff} & [K_{E,G,M}]_{fA} & [K_{E,G,M}]_{fL} \\ [K_{E,G,M}]_{Af} & [K_{E,G,M}]_{AA} & [K_{E,G,M}]_{AL} \\ [K_{E,G,M}]_{Lf} & [K_{E,G,M}]_{LA} & [K_{E,G,M}]_{LL} \end{bmatrix} \tag{2-24}$$

Onde os K formam uma matriz em que os subscritos E, G, M se referem às matrizes de rigidez elástica, geométrica e de massa, respectivamente; já os subscritos f, A e L referem-se a termos oriundos das funções convencionais (nodais), adicionais internas e adicionais de lado e suas combinações.

A seguir, serão apresentadas as etapas utilizadas para a obtenção dessas matrizes. Utilizando apenas, como exemplo, as funções nodais do elemento retangular (f), parte-se do funcional de energia até chegar à forma matricial.

2.3.1
Matriz de Rigidez Elástica

A matriz de rigidez elástica pode ser deduzida a partir da energia de deformação U. Em forma matricial, os deslocamentos na placa são dadas por:

$$w = [f(x,y)]_i^T \{q\}_i \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{2-25}$$

Substituindo as variáveis que pré-multiplicam as funções de forma pelos elementos da matriz 2-1, chega-se à seguinte igualdade:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}[\mathbf{q}]_i^{\mathbf{T}} \int\int \left\{ \begin{pmatrix} E_{xx}[\mathbf{f_{xx}}]_{\mathbf{nx1}}^{\mathbf{T}}[\mathbf{f_{xx}}]_{\mathbf{nx1}} + E_{yy}[\mathbf{f_{yy}}]_{\mathbf{nx1}}^{\mathbf{T}}[\mathbf{f_{yy}}]_{\mathbf{1xn}} + \\ 2E_{xy}[\mathbf{f_{xx}}]_{\mathbf{nx1}}^{\mathbf{T}}[\mathbf{f_{yy}}]_{\mathbf{1xn}} + G[\mathbf{f_{xy}}]_{\mathbf{nx1}}^{\mathbf{T}}[\mathbf{f_{xy}}]_{\mathbf{nx1}} \end{pmatrix} \mathbf{dxdy} \right\} [\mathbf{q}]_i \frac{t^3}{12} \tag{2-26}$$

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{K_E q} \tag{2-27}$$

Onde:

- $f_{i,xx}, f_{i,yy}, f_{i,xy}$: derivadas de segunda ordem do vetor referente à função de forma nodal e adicional;
- n: número de funções totais utilizadas para os cálculos;
- G: módulo de elasticidade transversal do material.

Na notação mais usada de elementos finitos [7] se escreve:

$$U = \frac{t^3}{12}\int_A B^T E B dA \tag{2-28}$$

Onde B_i é definido pelas expressões 2-29a (3 graus de liberdade por nó) e 2-29b (4 graus de liberdade por nó).

$$\mathbf{B_i} = \mathbf{df_i} = \begin{bmatrix} f_{i1,xx} & f_{i2,xx} & f_{i3,xx} \\ f_{i1,yy} & f_{i2,yy} & f_{i3,yy} \\ 2f_{i1,xy} & 2f_{i2,yy} & 2f_{i3,xy} \end{bmatrix} \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{2-29a}$$

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{df_i} = \begin{bmatrix} f_{i1,xx} & f_{i2,xx} & f_{i3,xx} & f_{i4,xx} \\ f_{i1,yy} & f_{i2,yy} & f_{i3,yy} & f_{i4,yy} \\ 2f_{i1,xy} & 2f_{i2,yy} & 2f_{i3,xy} & 2f_{i4,xy} \end{bmatrix} \tag{2-29b}$$

A matriz B final tem a seguinte forma matricial:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix} \tag{2-30}$$

2.3.2 Matriz de Rigidez Geométrica

A matriz de rigidez geométrica para a placa pode ser obtida pelo trabalho realizado pelas forças constantes agindo sobre a membrana através dos deslocamentos associados às pequenas deflexões laterais [9]. As forças atuantes na placa como ilustrado na figura 2.5 são definidas por:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \qquad N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz \qquad N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \tag{2-31}$$

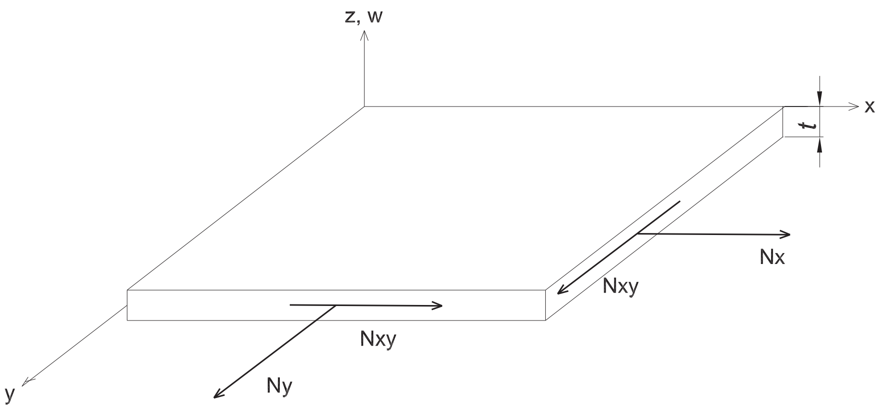

Figura 2.5: Elemento diferencial de uma placa delgada mostrando as forças atuantes ([9]).

Assim como a matriz de rigidez elástica, a matriz de rigidez geométrica pode ser obtida em função da energia de deformação das cargas, porém, considerando-se a derivada de primeira ordem das funções de forma (2-23) como mostra a função 2-32:

$$\Omega = -\frac{1}{2}\left[\mathbf{q}\right]_i^{\mathbf{T}} \int\int \left\{ \begin{array}{l} N_x \left[\mathbf{f_x}\right]_{\mathbf{nx1}}^{\mathbf{T}} \left[\mathbf{f_x}\right]_{\mathbf{nx1}} + N_y \left[\mathbf{f_y}\right]_{\mathbf{nx1}}^{\mathbf{T}} \left[\mathbf{f_y}\right]_{\mathbf{nx1}} + \\ 2N_{xy} \left[\mathbf{f_x}\right]_{\mathbf{nx1}}^{\mathbf{T}} \left[\mathbf{f_y}\right]_{\mathbf{nx1}} \end{array} \right\} dxdy \left[\mathbf{q}\right]_i^{\mathbf{T}} \tag{2-32}$$

Ao escrevermos a fórmula 2-32 na sua forma matricial chega-se à seguinte identidade, conforme a seguinte referência [9]:

$$\Omega = \frac{1}{2}\left[\mathbf{q}\right]_i^{\mathbf{T}} \int\int \left\{ \left\{ \begin{array}{c} f_{i,x} \\ f_{i,y} \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{cc} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{xy} & N_{yy} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} f_{i,x} \\ f_{i,y} \end{array} \right\} dxdy \right\} \left[\mathbf{q}\right]_i =$$

$$\frac{1}{2}\left\{d\right\}^T K_G \left\{d\right\} \quad (2\text{-}33)$$

2.3.3
Matriz de Massa

Uma matriz de massa é a representação discreta de uma distribuição contínua de massa no elemento [9]. A formulação 2-34, que representa a matriz de massa consistente [7, 8], contém a ação inercial de um elemento devido a acelerações unitárias nos graus de liberdade, o que pode ser visto como forças aplicadas na estrutura, na forma do princípio de D' Alembert. Além disso, usando o princípio dos trabalhos virtuais, as ações inerciais são transformadas em forças concentradas aos nós. Como para a rigidez e cargas nodais equivalentes, estas ações inerciais são fictícias e são usadas somente para resolução analítica de problemas.

$$\mathbf{K_M} = \int_V \rho[\mathbf{q}]_\mathbf{i}^\mathbf{T}\left[\mathbf{f}\right]_\mathbf{i}^\mathbf{T}\left[\mathbf{f}\right]_\mathbf{i}\left[\mathbf{q}\right]_\mathbf{i} dV \quad (2\text{-}34)$$

Fazendo a simplificação referente ao eixo z tem-se que:

$$\mathbf{K_M} = t\int\int \rho\left[\mathbf{q}\right]_\mathbf{i}^\mathbf{T}\left[\mathbf{f}\right]_\mathbf{i}^\mathbf{T}\left[\mathbf{f}\right]_\mathbf{i}\left[\mathbf{q}\right]_\mathbf{i} dxdy \quad (2\text{-}35)$$

2.4
Formulação Matricial para a Flambagem e Vibrações

Para o cálculo da carga crítica aproximada de flambagem e do modo respectivo, utiliza-se o método variacional de Rayleigh-Ritz partindo de elementos finitos refinados com funções de deslocamentos adicionais, internas e de contorno.

Da mesma forma são obtidas as freqüências naturais de vibração e seus respectivos modos. O colapso de uma estrutura é um processo dinâmico e o estudo da flambagem propriamente dita e da estabilidade se beneficiam do uso de um ponto de vista dinâmico [12].

2.4.1
Método para o cálculo da carga crítica de flambagem

Como em diversos problemas não é possível elaborar uma função que descreva a curva de deflexão exata para a estrutura, segundo [12], a determinação da carga crítica de flambagem pode ser obtida através da minimização do quociente de Rayleigh 2-36b partindo-se da igualdade da energia de deformação e do trabalho das forças externas.

$$\prod = U - P_R W = 0 \tag{2-36a}$$

$$\mathrm{P}_R = \frac{U}{W} \tag{2-36b}$$

Ritz generalizou este método ao construir uma família de funções, satisfazendo as condições cinemáticas de contorno. Na grande maioria das situações é possível separar os graus de liberdade e recair no cálculo de autovalores e autovetores.

Segundo a referência [1], a magnitude da carga crítica é representada pelo fator λ que é multiplicado ao valor das cargas atuantes conforme mostra as igualdades 2-37:

$$N_x = \lambda N'_x \qquad N_y = \lambda N'_y \qquad N_{xy} = \lambda N'_{xy} \tag{2-37}$$

Portanto, para [1], o valor da carga crítíca resulta na relação entre a energia de deformação elástica (U_E) pela energia de deformação geométrica (Ω) como descrita na equação 2-38:

$$\lambda = \frac{U_E}{\Omega} = \frac{D \int\int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) dxdy}{\int\int \left[N'_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N'_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N'_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right] dxdy} \tag{2-38}$$

Para uma estrutura discretizada pelo método com funções locais (elementos finitos) ou funções globais (Rayleigh-Ritz) o cálculo da carga crítica pode ser feito tomando-se a matriz de rigidez geométrica proporcional a um parâmetro de carga λ, quando tratada sob o enfoque global e, além disso, admite-se que a matriz de rigidez elástica é constante [11]. Desta forma chega-se à seguinte expressão:

$$[K_E + \lambda K_G]\, dr = dR \tag{2-39}$$

Onde:

– K_E: Matriz de rigidez elástica;

- K_G: Matriz de rigidez geométrica global;
- dr: vetor de incremento dos deslocamentos nodais;
- dR: vetor de incremento do carregamento externo

Compactando a expressão 2-39 e considerando $dR = 0$ tem-se:

$$K_T dr = 0 \tag{2-40}$$

Fazendo as devidas substituições tem-se:

$$K_T = K_E + \lambda K_G \tag{2-41}$$

Onde:

- K_T: Matriz de rigidez tangente aproximada no nível de carga λ.

A solução da equação 2-40 fornece os incrementos de deslocamentos nodais dr produzidos pelo vetor de incrementos de carregamento externo nulo. Este sistema linear só terá solução única se a matriz dos coeficientes, K_T, for não-singular, ou seja, possuir determinante não-nulo.

Quando o determinante de K_T tender a zero, os acréscimos dos deslocamentos assumem valores exagerados, equivalendo a uma perda de rigidez global da estrutura. Em outras palavras, a anulação do determinante da matriz K_T, associada ao parâmetro de carga λ_{cr}, equivale a um estágio de carregamento no qual obtém-se a chamada carga crítica e se recai num problema generalizado de autovalor, onde os autovalores são as cargas críticas e os autovetores dr são os modos de flambagem.

Portanto a equação que define a determinação da carga crítica é expressa pela expressão 2-42, que caracteriza um problema de autovalor não-linear, válido em qualquer nível de carga. No cálculo clássico de cargas críticas, implementado neste trabalho, as matrízes envolvidas são mantidas constantes, resultando num problema linear de autovalor.

$$\det[K_E + \lambda_{cr} K_G] = 0 \tag{2-42}$$

2.4.2
Modos de vibração e freqüências naturais

Assim como no cálculo da carga crítica 2-42, as freqüências também podem ser obtidas através do problema de autovalores e, usualmente, estas freqüências naturais são comparadas às freqüências de excitação da estrutura.

A formulação matricial de movimento da estrutura é representada por:

$$[\mathbf{K_M}]\{\ddot{\mathbf{v}}\} + [\mathbf{K_C}]\{\dot{\mathbf{v}}\} + [\mathbf{K_E}]\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{R^{ext}}\} \tag{2-43}$$

Onde:

- K_M: Matriz de massa da estrutura;
- $\ddot{\mathbf{v}}$, $\dot{\mathbf{v}}$: Derivada de segunda e primeira ordem dos deslocamentos;
- v: amplitude do deslocamentos da estrutura;
- K_C: Matriz de amortecimento;
- K_E: Matriz de Rigidez da estrutura;
- $R^{\mathbf{ext}}$: Cargas externas aplicadas a estrutura.

Uma estrutura linear e com amortecimento e cargas externas, possui movimento harmônicos nos quais cada grau de liberdade se move em fase com todos os outros graus de liberdade, com vetores de deslocamento e aceleração representados por:

$$\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}\}\sin(\omega\mathbf{t}) \qquad \{\ddot{\mathbf{v}}\} = -\omega^{\mathbf{2}}\{\mathbf{v}\}\sin(\omega\mathbf{t}) \tag{2-44}$$

Sendo:

- ω: freqüência circular (radianos por segundo).

Combinando as equações 2-44 com a equação 2-43 e desconsiderando o amortecimento e cargas externas, tem-se que:

$$([K_E] - \lambda_\omega[K_M])\{\mathbf{v}\} \;=\; \{\mathbf{0}\} \qquad\qquad \mathbf{onde} \;:\; \lambda_\omega \;=\; \omega^{\mathbf{2}} \tag{2-45}$$

A equação 2-45 representa a função básica para o problema de vibração sendo que a matriz, $[K_E]-\lambda_\omega[K_M]$, não pode ser singular e deve possuir somente a solução trivial $\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{0}\}$. Portanto, a equação para determinação dos autovalores fica associada à seguinte expressão:

$$\det([K_E] - \lambda_\omega[K_M]) = 0 \tag{2-46}$$

Cada autovalor está associado a um autovetor que corresponde ao modo de vibração da estrutura. As freqüências circulares são representas pela extração da raiz quadrada de cada autovalor. Uma freqüência nula corresponde a um modo de energia zero de deformação, o que só irá ocorrer no caso de estrutura insuficientemente vinculada (ou com deficiência na representação numérica).