

1

Introdução

Uma placa delgada é definida como sendo um elemento estrutural plano em que uma dimensão (espessura t) possui um valor muito inferior aos das outras duas dimensões, deformando-se primariamente em flexão, com deslocamento na direção da espessura. O modelo de placa delgada é muito utilizado na representação de componentes de vários tipos de estruturas, como edifícios, reservatórios, silos, lajes, aviões, navios e outros veículos.

Em certas situações, as placas são submetidas a cargas de compressão significativas, atuantes no seu plano médio, o que pode torná-las susceptíveis à flambagem. O estudo da flambagem vem sendo desenvolvido desde o século XVIII, quando Euler obteve a primeira carga crítica de uma barra biapoada sob a ação de uma carga axial de compressão aplicada no seu topo. A partir daí, o estudo da estabilidade vem sendo realizado para diversos tipos de estruturas que, sob vários tipos de carregamento e condições de contorno, uma questão de grande importância para o desenvolvimento de um projeto estrutural. O estudo deste fenômeno de flambagem pode ser feito através das equações de equilíbrio ou pelo princípio da energia potencial estacionária que será relatado mais adiante no capítulo 2.

Um outro fenômeno de importância em placas é seu comportamento dinâmico, particularmente a caracterização de suas frequências e modos de vibração, um aspecto também estudado inicialmente por Euler. A determinação de frequências e modos de vibração é semelhante ao de cargas e modos de flambagem, incluindo-se o efeito da inércia nos funcionais de energia, como descrito no capítulo 2.

O método de aproximação adotado para o cálculo é o de Rayleigh-Ritz voltado para o uso de elementos finitos [7] refinados com funções de deslocamentos adicionais e de contorno. As funções adicionais ditas internas foram feitas de forma a não envolverem deslocamentos no contorno da peça. Já as funções ditas de contorno não envolvem deslocamentos nodais.

Para avaliar adequadamente o desempenho dessas funções, é conveniente implementá-las em elementos conhecidos na literatura clássica de elementos

finitos para placas delgadas. Os dois elementos básicos implementados neste trabalho são encontrados em [7]: Melosh-Zienkiewicz-Cheung (MZC), com três graus de liberdade por nó, e Bogner-Fox-Schmit (BFS), com quatro graus de liberdade por nó. Esses elementos foram testados e comparados para o presente trabalho, com inclusão de funções adicionais internas e de contorno. Os estudos de validação e convergência foram desenvolvidos para elementos retangulares, onde as comparações com resultados clássicos são disponíveis.

1.1

Objetivos e Justificativas do Trabalho

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver elementos finitos enriquecidos com funções adicionais e avaliar seu comportamento na modelagem de problemas de estabilidade e dinâmica de placas. Tal enfoque pode possibilitar uma alternativa interessante ao refinamento de malhas convencionais de elementos finitos ou mesmo sua eliminação. Para descrever os deslocamentos nodais da estrutura, são utilizadas funções de forma que representam os graus de liberdade adicionais e nodais de uma placa, originando, assim, um super-elemento estrutural.

Para a resolução do problema da flambagem de placas desenvolveu-se um modelo computacional, com uso do software Maple, para o cálculo das cargas críticas, frequências de vibração e seus respectivos modos.

O uso das funções adicionais em um elemento finito justifica-se pois não há necessidade de introduzir muitas funções para atingir um resultado satisfatório para os primeiros modos. Entretanto, se fosse inserida uma malha de elementos finitos, para o mesmo resultado o número de graus de liberdade seria muito superior ao modelo proposto. A modelagem aqui utilizada corresponde a um meio-termo entre a discretização irrestrita e o desenvolvimento em séries de funções.

Atualmente, o uso de pilares esbeltos, com seções retangulares alongadas em construções vem se tornando cada vez mais usual. Para tais componentes há algumas dificuldades e inconsistências na sua modelagem, nas práticas de projeto e nas prescrições normativas. Tendo em vista isso e visando colocar em prática o modelo computacional elaborado, apresenta-se um estudo didático da estabilidade de um pilar-parede de concreto armado através do uso de elementos de placa. Para isto, foi necessário acrescentar uma matriz de redução elástica referente ao dano do material.

1.2

Histórico e Breves Referências

Segundo Szilard [14], desde a época dos egípcios, gregos e romanos, placas já eram utilizadas em suas construções, na forma de lajes de pedra ou lápides. A diferença fundamental entre as aplicações utilizadas para lajes antigas e as usadas pelos engenheiros da era moderna é que os construtores antigos estabeleciam as dimensões e a capacidade de carga da laje por regras empíricas. Entretanto, atualmente estão disponíveis métodos científicos para a representação do comportamento mecânico e o dimensionamento de placas.

A história da evolução científica da teoria de placas é fascinante. A primeira aproximação matemática da teoria de membrana para placas delgadas foi formulada por Euler (1707-1783) em 1766. Euler resolveu problemas de vibrações livres em membranas elásticas retangulares, triangulares e circulares através da analogia com sistemas perpendiculares de molas estiradas. Seu aluno, Jacques Bernoulli (1759-1789), ampliou esta analogia, substituindo as molas por vigas e descobrindo assim o valor da sua rigidez no comportamento em flexão. Bernoulli ainda obteve semelhanças entre estas teorias e dados experimentais.

Uma solução realista para a vibração de placas foi dada pelo físico alemão E.F.F. Chladni (1756-1827). Chladni desenvolveu vários modos de vibração livres para placas. Além disso, ele foi capaz de determinar as frequências padrões correspondentes a estas vibrações.

Em outubro de 1811 a matemática Sophie Germain (1776-1831) desenvolveu a primeira equação diferencial da teoria de placas.

Poisson (1781-1840) fez a primeira determinação correta para o valor da constante k_2 na equação diferencial da vibração de placas, assumindo que as partículas estão localizadas no plano médio da placa. Erroneamente, ele concluiu que esta constante é proporcional ao quadrado e não ao cubo da espessura. Mais tarde, em 1828, Poisson ampliou o estudo usando as equações de Navier, mas seu estudo só era válido para placas espessas.

Finalmente o famoso engenheiro e cientista L. Navier (1785-1836) desenvolveu a primeira equação diferencial correta para placa sujeita a carga distribuída, transversal estática $p(x, y)$.

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p_z(x, y) \quad (1-1)$$

Matematicamente a análise de tensões de placas sujeitas a cargas normais à sua superfície requer uma solução por equações diferenciais bidimensionais de elasticidade. Para a maioria das aplicações técnicas a teoria clássica de placas delgada, criada por Kirchhoff, pode ser usada sem que se necessite das equações

em três dimensões. Uma das virtudes da teoria clássica para o projeto de elementos de placa é que o projetista necessita especificar somente o deslocamento transversal $w(x, y)$ em função das rotações ϕ_x e ϕ_y , que são as rotações das linhas que eram normais à superfície média da configuração indeformada nos planos x, z e y, z . As hipóteses que regem esta teoria de placas são:

- O material é homogêneo, isotrópico e elástico-linear, isto é, segue as leis de Hooke;
- A superfície média da placa permanece indeformada no seu plano, durante a flexão;
- Retas normais ao plano médio da placa permanecem normais e não sofrem extensão, durante a deformação. Isto significa que as deformações tangenciais, bem como as normais na direção transversal, poderão ser desprezadas na obtenção das relações cinemáticas para as placas;
- A espessura da placa, t , é muito pequena, quando comparada às outras dimensões da placa;
- Os deslocamentos $w(x, y)$ são pequenos quando comparados à espessura t ;
- As tensões normais na direção transversal são consideradas muito inferiores às outras componentes de tensão normal, de modo a serem desprezadas.

Como citado em [21], em 1930 Leonhard Euler realizou o primeiro estudo de flambagem associado a construções de colunas e placas de navios. Este estudo foi ampliado para a análise de cascas e incluído nos cursos de engenharia aeronáutica, civil, mecânica dentre outras áreas da mecânica estrutural. O livro de Timoshenko e Gere [1], em sua edição de 1961, é conhecido como umas das primeiras referências bibliográficas para o estudo da estabilidade e permanece como um dos mais completos volumes sobre este assunto.

O primeiro matemático a criar um modelo numérico em análise de estruturas foi Courant [9] com o uso do princípio da energia potencial estacionária interpolando um polinômio em regiões triangulares para o problema de torção de Saint-Venant. Ele assumiu uma distribuição linear de funções para o empenamento sobre estes elementos cuja aproximação estende-se ao modelo de Rayleigh-Ritz. Infelizmente, este importante trabalho não foi adotado pelos engenheiros, pois devido à ausência de computadores o tempo estimado para se chegar à solução do problemas levaria dias e até meses dependendo do tipo da estrutura.

Hrenikoff ampliou o mais conhecido método matricial para análise de deslocamentos de estruturas de barras e vigas, encontrado em Przemieniecki [2], para a análise de placas e cascas. Ao invés de trabalhar com um número infinito de deslocamentos, como nos sistemas originais, ele considerou um número finito de

graus de liberdade baseado nas propriedades de barra e vigas de uma estrutura, sendo possível chegar a uma aproximação do contínuo usando barras interligadas em nós assim como nos pórticos.

Em 1953, conforme Cook [9], engenheiros escreveram as equações de rigidez na forma de uma matriz e resolveram estas equações utilizando programas de computador.

O nome método dos elementos finitos foi introduzido em 1960 por Clough. Em 1963 o método foi reconhecido como ligado à solução de um problema variacional pela minimização ou estacionariedade de um funcional.

Entre 1960 e 1970 foram criados os softwares gerais ANSYS, ASKA, STRUDL e NASTRAN. A incorporação de desenvolvimento gráfico começou a ficar mais intenso no início de 1980 sendo que nos anos seguintes foram feitas as adaptações necessárias.

Com a era da globalização o método dos elementos finitos vem sendo cada vez mais utilizado através do uso de rotinas computacionais. Cook [9] menciona a existência de centenas de elementos para placas na literatura, recomendando Gallagher [4] como uma referência geral para o estudo do método dos elementos finitos aplicados a placas. Na PUC-Rio, dentro da linha de pesquisa de Instabilidade e Dinâmica de Estruturas, há diversas dissertações e teses sobre o assunto, em particular a de Giannini [10], que implementou elementos de chapas e placas combinados para permitir a análise de vigas de paredes finas e estruturas similares, e Martins [13], que demonstrou estratégias de refinamento automatizado.

Um problema ainda não resolvido na teoria e na prática de elementos finitos é o tratamento simultâneo do comportamento global e local, em situações em que possa ocorrer acentuada localização de deformações, como regiões plastificadas (charneiras) e enrugamentos. Mesmo no regime elástico de pequenas deformações, surge a questão de cargas concentradas e singularidades devidas a descontinuidades geométricas. Há a possibilidade de refinamento h (aumento do número de elementos), p (aumento do grau das funções) e h - p (combinação de refinamento h e p), conforme documentado em Martins [13]. Isto motivou diversos projetos de pesquisa, entre os quais este trabalho se inclui. Cumpre-se uma etapa dentro deste estudo geral de modelos computacionais para o comportamento global-local, estudando em maior detalhe a possibilidade de refinamento internamente aos elementos e seu efeito no comportamento em flambagem e vibração. Com este objetivo, foram introduzidas funções trigonométricas e polinomiais de grau mais elevado em elementos finitos clássicos, encontrados na referência [7].

1.3

Organização do Texto

Este trabalho está organizado em sete capítulos e dois apêndices.

A dissertação inicia-se com este Capítulo 1 cujo objetivo é introduzir o assunto de maneira a transmitir os motivos que levaram ao estudo e citar um breve histórico sobre o estudo em questão.

O Capítulo 2 demonstra os aspectos relevantes para a modelagem de placas, como funcionais de energia, método para a obtenção da carga crítica de flambagem, modos de vibração e de flambagem.

O Capítulo 3 apresenta o elemento finito retangular escolhido para análise além das funções adicionais desenvolvidas para representar os deslocamentos internos e no contorno da placa. Além disso, são apresentados os passos para a implementação computacional.

O Capítulo 4 propõe a modelagem em concreto armado de elementos de placa para o estudo da estabilidade de pilar-parede.

O Capítulo 5 apresenta a validação do modelo computacional através de exemplos desenvolvidos com elementos estruturais de placa.

No Capítulo 6, são apresentadas as principais conclusões, obtidas através dos resultados gerados a partir dos exemplos, além de sugestões para trabalhos futuros.

Finalmente, no Capítulo 7, apresentam-se as referências bibliográficas utilizadas para a elaboração deste trabalho. Além desses capítulos, há dois Apêndices referentes a trechos computacionais elaborados para a obtenção das funções adicionais internas e do modelo computacional final.