

Amanda Jarek

# Elementos Finitos Enriquecidos para Flambagem e Vibração de Placas

## DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Programa de Pós-graduação  
em Engenharia Civil

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2007

**Amanda Jarek**

## **Elementos Finitos Enriquecidos para Flambagem e Vibração de Placas**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Científico Tecnológico da PUC-Rio

Orientador: Prof. Raul Rosas e Silva

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2007

**Amanda Jarek**

## **Elementos Finitos Enriquecidos para Flambagem e Vibração de Placas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Científico Tecnológico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Raul Rosas e Silva**

Presidente / Orientador

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

**Prof. Luiz Eloy Vaz**

UFRJ

**Prof. Marta de Souza Lima Velasco**

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

**Prof. Paulo Batista Gonçalves**

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial

do Centro Científico Tecnológico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 12 de Fevereiro de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### Amanda Jarek

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), em março de 2005. Ingressou no Curso de Mestrado em Engenharia Civil da Puc-Rio em março de 2005, atuando na área de Instabilidade Estrutural.

### Ficha Catalográfica

Jarek, Amanda

Elementos Finitos Enriquecidos para Flambagem e Vibração de Placas/ Amanda Jarek; orientador: Raul Rosas e Silva. - 2007.

v., 120 f: il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro

Inclui bibliografia

1. Engenharia Civil - Teses. 2. Instabilidade de estruturas. 3. Método dos elementos finitos. 4. Método de Rayleigh - Ritz. 5. Flambagem de Placas. 6. Vibração de Placas. 7. Modelagem Numérica. 8. Dinâmica das Estruturas. I. Silva, Raul Rosas e. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

É com muito Amor que dedico este trabalho aos meus pais, Nilton Jarek e Adenancir Aparecida Escorsin Jarek, que sempre estiveram ao meu lado em todas as horas transmitindo-me amor, carinho, segurança e confiança.

A minha irmã, Camila Jarek, que sempre me apoiou e fez acreditar de que eu conseguiria viver longe das pessoas que mais amo nesse mundo.

A minha vó, Ivanete Escorsin, pelo amor e carinho que sempre teve por mim.

## Agradecimentos

A Deus que sempre me deu forças para superar a distância e as dificuldades enfrentadas durante estes dois anos de moradia no Rio de Janeiro.

Ao professor Raul Rosas pela orientação, amizade, apoio, momentos de descontração e pela confiança depositada em mim.

À professora Marta Velasco por sua amizade e o incentivo proporcionado para eu continuar o mestrado.

Ao meu grande amigo Elvidio Gavassoni que sempre esteve disposto a me ajudar nas dificuldades encontradas durante a jornada de mestrado, além dos momentos de descontração e passeios a diversos lugares no Rio.

Minha amiga e “irmã por parte de orientador”, Elaine Ponte, pela amizade sincera e por colaborar com o modelo computacional desenvolvido.

Aos amigos, professores e funcionários do Lactec, em especial a Laryssa Ligocki, Roberta Bomfim, Luiz Alkimin, Professor Chamecki e Alessander Kormann por me incentivarem a vir estudar no Rio, além da confiança depositada no meu trabalho.

Aos professores da UFPR, em especial às professoras Andrea Sell Diminsky e Mildred Ballin Hecke pelo incentivo, carta de recomendação e o apoio durante estes dois anos de mestrado no Rio de Janeiro. À secretária do Cesec, Maristela, pelo seu bom humor em recepcionar os antigos alunos da UFPR.

A todos os meus familiares, em especial meus primos Wagner Maestrelli e Rodrigo Lucca pelos momentos de divertimento na minhas visitas à Curitiba.

Às minhas amigas de Curitiba, em especial a Adriane Baggio, Karina Tsukada e Suzana Pianaro pela amizade sincera, momentos de descontração, desabafos, alegrias, tristeza...

Às minhas antigas amigas de República, Alessandra Tavares, Jociléia Bueback, Vivian Marchesi e Dona Antônia pelo carinho com que me acolheram num dos momentos mais difíceis da minha vida.

À turma de amigos Roberto “Rouxinol”, Hyllttonn “Gralha Azul”, Guilherme “Slongo”, Lorena “Lóren”, Maria Bernadete “Bê”, Vivian “Vi”, Jociléia “Jô”, Elvidio “Gava” pelos vários jantares de sábado e momentos de descontração.

À minha amiga e atual companheira de quarto, Alê, por seu apoio, carinho, incentivo, otimismo e momentos de diversão.

Ao professor Eloy, Camila, Regina, Aninha e Henrique por terem me recebido de braços abertos e com muito carinho em sua casa neste último semestre do mestrado.

A todos amigos da pós em especial: Rafael Araújo, Jean Aguilera, Adenilson, Lucas, Antônio Pelissari, Magnus, Marianna, Paôla, Maria Fernanda, Renata,

Fábio Machado, Júlio, Gisele, Saré, Paty, Walter Edgley, Walter Menezes, João Castagnolli e Marcos Queiroz.

Aos professores do DEC da Puc-Rio incluindo o professor Emil de Souza Sanchez Filho (UFF) por sempre me ajudarem perante as dificuldades advindas do mestrado.

Aos funcionários do DEC, em especial à Rita, Ana Roxo e Cristiano por sempre estarem à disposição para o atendimento.

Aos amigos do Laboratório de Estruturas da Puc.

À CAPES pelo apoio financeiro.

## Resumo

Jarek, Amanda; Silva, Raul Rosas e. **Elementos Finitos Enriquecidos para Flambagem e Vibração de Placas** Rio de Janeiro, 2007. 120p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O presente trabalho avalia a utilização de elementos enriquecidos para obtenção de cargas críticas, frequências de vibração e seus respectivos modos de peças estruturais bidimensionais (flexão de placas retangulares sujeitas a compressão em seu plano). O método de aproximação empregado foi o de Rayleigh-Ritz voltado para o uso de elementos finitos convencionais enriquecidos com funções de deslocamentos adicionais internas e de contorno. As funções ditas internas são desenvolvidas de forma a não envolver deslocamentos e rotações nodais e no contorno. Já as funções ditas de contorno são concebidas de forma a envolver apenas deslocamentos internos e ao longo de um lado apenas, sem deslocamentos generalizados nodais. Para este estudo foram desenvolvidas duas famílias de funções, uma com termos adicionais trigonométricos e outra com termos adicionais polinomiais. Para o cálculo de cargas críticas e frequências são utilizadas as matrizes de rigidez elástica, rigidez geométrica e de massa, introduzidas em problemas generalizados de autovalores. Resultados numéricos são obtidos através de procedimentos computacionais utilizando o software Maple. Verifica-se que as funções adicionais trigonométricas, embora mais satisfatórias que as polinomiais quanto à convergência, exigem maior esforço computacional. São comparados resultados de elementos para placas esbeltas (teoria de Kirchhoff), com três e quatro graus de liberdade por nó, onde o quarto grau de liberdade corresponde à derivada mista (torção). Mostra-se que as funções adicionais, não-nodais, requerem o uso do elemento com quatro graus de liberdade por nó, para se ter convergência no cálculo das cargas críticas e frequências em situações gerais. Outros exemplos abordam preliminarmente a inclusão de efeitos de dano e ortotropia no material, visando a modelagem de lajes comprimidas e pilares com seções retangulares alongadas. Esta modelagem envolvendo combinação de funções adicionais gerais e elementos convencionais representa um passo no desenvolvimento de uma técnica aplicável à combinação de modos globais e localizados de instabilidade.

## Palavras-chave

Instabilidade de estruturas; Método dos elementos finitos; Método de Rayleigh-Ritz; Flambagem de Placas; Vibração de placas; Modelagem numérica; Dinâmica de Estruturas.



## Abstract

Jarek, Amanda; Silva, Raul Rosas e. **Enriched Finite Elements for Buckling and Vibration of Shells**. Rio de Janeiro, 2007. 120p. MSc. Dissertation — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The focus of the present work is to develop and evaluate enriched elements used to obtain critical loads, frequencies of vibration and respective modes for two-dimensional structural components (rectangular plates in bending under in-plane compressive loading). The Rayleigh-Ritz approximation method has been employed, directed to the use of conventional finite elements enriched by internal and boundary additional displacements functions. The so-called internal functions do not involve nodal and boundary displacements and rotations. The boundary functions are conceived to include displacements within the element and along one side, without involving any generalized nodal displacements. Two displacement function families were developed, the first with trigonometric additional terms and the second with polynomial additional terms. Critical loads and frequencies, and respective modes, are obtained by the use of elastic stiffness, geometric, and mass matrices, introduced in generalized eigenvalue problems. Numerical results are obtained by computational procedures using Maple software. The trigonometric additional functions, in spite of better convergence properties, demand greater computational effort. The basic elements are classical thin plate elements (Kirchhoff's theory) with three or four degrees of freedom per node, where the fourth degree of freedom corresponds to the mixed derivative (torsion). The results indicate that non-nodal additional functions require the use of elements with four freedom degrees by node to obtain convergence of critical loads and frequencies convergence in general situations. Other examples consist of preliminary approaches to include damage effects, in reinforced orthotropic plates, as modeling columns with wide rectangular sections and compressed slabs. The use of general additional functions combined with conventional elements represents a step on the development of a technique applicable to global and localized instability modes.

## Keywords

Instability; Finite elements; Rayleigh-Ritz method; Buckling of plates; Vibrations of plates; numerical methods; Dynamics.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
1.1	Objetivos e Justificativas do Trabalho . . . . .	18
1.2	Histórico e Breves Referências . . . . .	19
1.3	Organização do Texto . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Aspectos Relevantes da Modelagem de Placas</b>	<b>23</b>
2.1	Fundamentos da Teoria de Flexão de Placas . . . . .	23
2.2	Funcionais de Energia . . . . .	28
2.3	Matrizes de Rigidez Elástica, Geométrica, Massa . . . . .	30
2.3.1	Matriz de Rigidez Elástica . . . . .	30
2.3.2	Matriz de Rigidez Geométrica . . . . .	32
2.3.3	Matriz de Massa . . . . .	33
2.4	Formulação Matricial para a Flambagem e Vibrações . . . . .	33
2.4.1	Método para o cálculo da carga crítica de flambagem . . . . .	34
2.4.2	Modos de vibração e frequências naturais . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Elementos de Placa adotados para Análise</b>	<b>38</b>
3.1	Elemento Retangular . . . . .	38
3.2	Funções Adicionais Internas . . . . .	42
3.2.1	Função Adicional Interna Trigonométrica . . . . .	42
3.2.2	Função Adicional Interna Polinomial . . . . .	43
3.2.3	Comparação entre Funções Adicionais Internas . . . . .	44
3.3	Funções Adicionais Externas ou de Lado . . . . .	45
3.4	Implementação Computacional . . . . .	46
3.4.1	Passos para a sequência operacional . . . . .	47
3.4.2	Elemento isolado de placa . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Aspectos da Modelagem de Elementos de Concreto Armado</b>	<b>51</b>
4.1	Introdução ao conceito de Pilar-Parede . . . . .	52
4.2	Introdução do Efeito da Armadura . . . . .	53
4.2.1	Matriz de Dano do Material . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Exemplos de Aplicação</b>	<b>57</b>
5.1	Exemplo 1: Validação das Funções . . . . .	58
5.2	Exemplo 2: Avaliação dos elementos utilizados . . . . .	63
5.3	Exemplo 3: Placa Isotrópica Simplesmente Apoiada . . . . .	70
5.4	Exemplo 4: Placa Isotrópica com Dano . . . . .	79
5.5	Exemplo 5: Placa Ortotrópica e Isotrópica . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Conclusões e Sugestões para trabalhos futuros</b>	<b>88</b>

## **7 Referências Bibliográficas 91**

### **A Trecho do programa para a obtenção da função adicional polinomial e gráficos comparativos 92**

- A.1 Trecho computacional para a obtenção da função polinomial . . . . . 92
- A.1.1 Gráficos Comparativos entre funções polinomiais e trigonométrica . . . 95

### **B Trecho do modelo computacional 99**

- B.1 Programa para o estudo de flambagem de uma placa . . . . . 99
  - B.1.1 Propriedades geométricas e do material: . . . . . 99
  - B.1.2 Informe o número de funções adicionais para a variação da placa: . . . 100
  - B.1.3 Informe o número de funções adicionais para a variação dos lados da placa: . . . . . 100
  - B.1.4 Forças aplicadas na placa . . . . . 100
  - B.1.5 Condições de contorno para a placa . . . . . 100
  - B.1.6 Funções de forma nodais (convencionais) . . . . . 102
  - B.1.7 Funções adicionais internas . . . . . 107
  - B.1.8 Montagem das matrizes utilizando funções de contorno . . . . . 110
  - B.1.9 Utilizando as funções: convencionais, adicionais internas e de contorno 114
  - B.1.10 Matriz de massa final . . . . . 117
  - B.1.11 Matriz de rigidez geométrica final . . . . . 117
  - B.1.12 Matriz de rigidez elástica final . . . . . 118
  - B.1.13 Carga crítica de flambagem . . . . . 118
  - B.1.14 Frequências naturais de uma placa . . . . . 120

## Lista de Figuras

2.1	Elemento de placa em flexão (de [7]). . . . .	24
2.2	Deslocamento de um ponto situado sobre uma normal ao plano médio da placa ([18]). . . . .	25
2.3	Equilíbrio de uma placa . . . . .	28
2.4	Placa simplesmente apoiada sujeita a um carregamento de compressão. .	29
2.5	Elemento diferencial de uma placa delgada mostrando as forças atuantes ([9]). . . . .	32
3.1	Retângulo MZC . . . . .	39
3.2	Retângulo BFS . . . . .	41
3.3	Exemplo de função de lado. . . . .	45
3.4	Viga com quatro graus de liberdade. . . . .	46
3.5	Forças aplicadas na Placa (de [9]). . . . .	46
3.6	Gráfico representativo da função interna. . . . .	48
3.7	Gráfico representativo da função de lado. . . . .	49
3.8	a) Elemento isoparamétrico no espaço x,y. b) Elemento isoparamétrico no plano. . . . .	50
4.1	Piso tipo do Edifício Cotoxó (de [21]) . . . . .	52
4.2	Placa de concreto armado . . . . .	53
4.3	Gráfico referente a redução da rigidez elástica (de [17]). . . . .	55
5.1	Viga sob diferentes condições de contorno. . . . .	58
5.2	Viga Engastada e Livre. . . . .	60
5.3	Viga Biengastada. . . . .	61
5.4	Viga Simplesmente Apoiada. . . . .	61
5.5	Viga Engastada e Apoiada. . . . .	62
5.6	Retângulo MZC [7]. . . . .	63
5.7	Retângulo BFS [7]. . . . .	64
5.8	Placa analisada. . . . .	64
5.9	Placas analisadas . . . . .	66
5.10	Primeiro modo de flambagem de cálculo para a Placa 1 com elemento de 4 graus de liberdade por nó. . . . .	67
5.11	Primeiro modo de flambagem de cálculo para a Placa 1 com elemento de 3 graus de liberdade por nó. . . . .	67
5.12	Modo de Flambagem de uma placa simplesmente apoiada com 4 (a) e 3 graus de liberdade por nó (fig (b) rotações impedidas; fig (c) rotações livres). . . . .	68
5.13	Placa simplesmente apoiada em todo o contorno. . . . .	70
5.14	Primeiro Modo de Flambagem calculado. . . . .	72
5.15	Segundo Modo de Flambagem calculado. . . . .	72

5.16	Terceiro Modo de Flambagem calculado. . . . .	73
5.17	Primeiro Modo de Vibração calculado. . . . .	73
5.18	Segundo Modo de Vibração calculado. . . . .	74
5.19	Terceiro Modo de Vibração calculado. . . . .	74
5.20	Primeiro Modo de Flambagem sob carga de cisalhamento. . . . .	75
5.21	Variação da carga versus a relação entre lados. . . . .	77
5.22	Variação das frequências com a magnitude da carga. . . . .	78
5.23	Variação do quadrado das frequências com a magnitude da carga. . . . .	78
5.24	Placa de estudo . . . . .	79
5.25	Primeiro modo de flambagem sem dano calculado . . . . .	81
5.26	Primeiro modo de Flambagem com dano no material calculado . . . . .	81
5.27	Exemplos de Pilares Parede. . . . .	83
5.28	Dimensões do Pilar Parede. . . . .	83
5.29	Primeiro modo de Flambagem sem dano para o Caso I. . . . .	86
5.30	Primeiro modo de Flambagem sem dano para o caso II. . . . .	86
5.31	Primeiro modo de Flambagem sem dano para o caso III. . . . .	87
A.1	Gráfico representando o primeiro e segundo modo de vibração para a função polinomial. . . . .	93
A.2	Vibração da placa com a função polinomial. . . . .	94
A.3	Gráfico representando o primeiro e segundo modo de vibração para a função trigonométrica. . . . .	94
A.4	Vibração da placa com uso de função trigonométrica. . . . .	95
A.5	Representação das Funções Polinomial e Trigonométrica em $x$ ( $n=1$ ). . .	96
A.6	Visualização das Funções Polinomial e Trigonométrica em $y$ ( $n=2$ ). . .	96
A.7	Visualização das funções da primeira derivada em $x$ . . . . .	97
A.8	Visualização da primeira derivada em $y$ . . . . .	97
A.9	Visualização da segunda derivada em $x$ . . . . .	98
A.10	Visualização da segunda derivada em $y$ . . . . .	98

## Lista de Tabelas

3.1	Tabela de valores para $\xi_i$ e $\eta_i$ iniciais . . . . .	40
3.2	Funções de Forma Convencionais para a Placa da Figura 3.2 . . . . .	42
5.1	Valores para a carga crítica de flambagem da viga . . . . .	59
5.2	Valores para os modos de vibração da viga . . . . .	60
5.3	Resultados para Placa Simplesmente Apoiada . . . . .	65
5.4	Resultados com o elemento de 4 graus de liberdade . . . . .	66
5.5	Resultados com o elemento de 3 graus de liberdade . . . . .	66
5.6	Resultados para carga crítica $N_x$ e frequência da placa de aço variando o número de funções . . . . .	71
5.7	Resultados para carga crítica de cisalhamento e frequência da placa de aço variando o número de funções . . . . .	75
5.8	Resultados para carga crítica e frequência da placa de aço variando a relação entre lados. . . . .	76
5.9	Tabela de resultados para uma placa isotrópica . . . . .	80
5.10	Comparação de carga crítica para placa isotrópica e ortotrópica. . . . .	85
5.11	Comparação das frequências para as placas sem armadura e com armadura. . . . .	85

## Lista de Símbolos

### Caracteres Romanos

$a$   $\longrightarrow$  Dimensão da placa na direção x

$A_{bx}, A_{by}$   $\longrightarrow$  área da seção transversal de cada barra para os eixos x e y

$A_{sx}, A_{sy}$   $\longrightarrow$  Área de armadura por faixa de armadura

$A_x, A_y$   $\longrightarrow$  Função adicional interna para a viga

$b$   $\longrightarrow$  Dimensão da placa na direção y

$b_z$   $\longrightarrow$  Carga distribuída na direção z transversal da placa

$B$   $\longrightarrow$  Matriz que transforma deformação em deslocamento

$c_{nom}$   $\longrightarrow$  Cobrimento nominal da armadura

$C$   $\longrightarrow$  Matriz de amortecimento

$d$   $\longrightarrow$  Parâmetro nodal dos deslocamentos

$dr$   $\longrightarrow$  Vetor de incremento dos deslocamentos nodais

$dR$   $\longrightarrow$  Vetor de incremento do carregamento externo

$D$   $\longrightarrow$  Rigidez à flexão da placa

$D_a$   $\longrightarrow$  Matriz constitutiva do aço

$D_x, D_y$   $\longrightarrow$  Momento de Inércia por cm de armadura

$E$   $\longrightarrow$  Módulo de elasticidade do material

$E_T$   $\longrightarrow$  Módulo de elasticidade tangente do material

$E_0, E_2$   $\longrightarrow$  Módulos de elasticidade inicial e final para o material

$f_i$  → Função de forma i

$f_{i,x}, f_{i,y}$  → Derivadas de primeira ordem da função de forma i

$f_{nom}$  → Resistência nominal de cálculo à compressão

$f_{ck}$  → Resistência à compressão do concreto

$f_{i,xx}, f_{i,yy}$  → Derivadas de segunda ordem das funções de forma

$G$  → Módulo de elasticidade cisalhante do material

$h_x, h_y$  → Altura efetiva entre armaduras na direção x e y

$I_x, I_y$  → Momento de inércia nas direções x e y

$J$  → Matriz Jacobiana

$K_E$  → Matriz de Rigidez Elástica

$K_{E_2}$  → Matriz de rigidez reduzida devido ao dano do material

$K_G$  → Matriz de Rigidez Geométrica

$K_M$  → Matriz de Massa

$K_T$  → Matriz de rigidez tangente aproximada no nível de carga  $\lambda$

$M_{xi}, M_{yi}$  → Momentos nas direções x e y

$M_{xyi}$  → Momento de torção na direção z

$nA_x, nA_y$  → Número de funções adicionais internas da placa

$nA_{xy}$  → Número de funções internas da placa

$nL_x, nL_y$  → Número de funções adicionais no contorno da placa

$nL_{xy}$  → Soma do número de funções (4 funções) que representam cada lado da placa.

$N_x, N_y$  → Cargas axiais aplicadas à carga

$p_{zi}$  → Força na direção z no nó i

$P_{cr}$  → Carga Crítica

$Q_x, Q_y$  → Esforços cortantes nas direções x e y

$R^{ext}$  → Cargas externas aplicadas a estrutura



$s_x, s_y \longrightarrow$  Distância entre as barras na direção x e y  
 $t \longrightarrow$  Espessura da placa  
 $t \longrightarrow$  Espessura da placa  
 $u, v, w \longrightarrow$  Deslocamentos nas direções x, y e z, respectivamente  
 $U \longrightarrow$  Energia de deformação  
 $V \longrightarrow$  Energia potencial total  
 $W \longrightarrow$  Trabalho por unidade de Carga

### Caracteres Gregos

$\varepsilon_x, \varepsilon_y \longrightarrow$  Deformações na direção x, y  
 $\varepsilon_c \longrightarrow$  Deformação crítica do concreto.  
 $\gamma_{xy} \longrightarrow$  Distorção angular  
 $\xi \longrightarrow$  Coordenada normalizada paralela a x  
 $\eta \longrightarrow$  Coordenada normalizada paralela a y  
 $\nu \longrightarrow$  Coeficiente de Poisson  
 $\Omega \longrightarrow$  Energia de deformação  
 $\rho \longrightarrow$  Densidade do material  
 $\lambda_\omega \longrightarrow$  Parâmetro de frequência  
 $\lambda_{cr} \longrightarrow$  Parâmetro de carga crítica  
 $\sigma_x, \sigma_y \longrightarrow$  Tensões normais nas direções x e y  
 $\tau_{xy} \longrightarrow$  Tensão cisalhante  
 $\rho_g \longrightarrow$  Raio de giração  
 $\Pi \longrightarrow$  Quociente de Rayleigh-Ritz  
 $\omega_0 \longrightarrow$  Frequência natural  
 $\omega \longrightarrow$  Frequência de vibração de uma placa