

5 EXEMPLOS

Neste capítulo são apresentados vários exemplos com soluções conhecidas objetivando validar a eficiência do novo processo adaptativo. Os resultados obtidos nestes exemplos são comparados com os resultados obtidos por Cavalcante-Neto [12,13], já que o trabalho desenvolvido pelo referido autor foi usado como base para a elaboração deste trabalho. Outros exemplos analisados neste trabalho também foram feitos por outros autores: Zienkiewicz [66] e A Merrouche [1].

É importante enfatizar que as comparações feitas neste capítulo têm apenas o intuito de mostrar o aspecto das malhas com os resultados do processo adaptativo conforme a evolução do processo, mostrando também o comportamento do critério de convergência para todos os casos (equação 17). Portanto, não cabe avaliar, através dos resultados, qual método é mais eficiente ou rápido, pois em alguns exemplos não se sabe qual foi a técnica de geração de malha, nem o método de suavização e nem o critério de erro adotado pelos outros autores, não conseguindo, desta forma, compatibilizar as características iniciais do problema: número de nós (NN), número de elementos (NE) e o número de graus de liberdade (GDL). Além disto, qualquer alteração na discretização das curvas do modelo resultarão em malhas diferentes, mesmo que as condições iniciais tenham sido compatíveis.

O capítulo está dividido em duas seções: exemplos em 2D, rodados no *MTOOL* [47] e exemplos em 3D, rodados no *MG* [48]. Em todos os exemplos 2D foram usados os seguintes valores para o erro máximo permitido: $\eta^* = 10\%$ para elementos lineares e $\eta^* = 5\%$ para elementos quadráticos, conforme o que é recomendado na literatura. Para os exemplos 3D, usou-se somente elementos quadráticos e adotou-se dois valores diferentes de η^* . Em alguns casos usou-se $\eta^* = 5\%$ e em outros $\eta^* = 8\%$, conforme os valores encontrados de onde os exemplos foram obtidos.

É importante ressaltar que pelo fato de não ser o objetivo deste trabalho comparar os métodos de suavização existentes, foi utilizado apenas no primeiro

exemplo do caso 2D o método *SPR* [63-66]. Neste mesmo exemplo se faz uma comparação entre os dois métodos, mostrando a pequena diferença entre ambos, justificando, desta forma, apenas o uso do *Z2-HC* [62] nos demais exemplos.

Nas últimas malhas de todos os exemplos apresentou-se, apenas por motivos ilustrativos, as malhas seguintes caso o critério de convergência não tivesse sido atingido no passo anterior do processo adaptativo.

5.1. Exemplos em 2D (*MTOOL*)

Foram usados seis exemplos com o objetivo de validar a implementação do processo adaptativo no *MTOOL* [47]. Em todos os exemplos se fez uma análise para elementos lineares (T3) e outra para elementos quadráticos (T6).

Pode ser observada uma nítida diferença entre os aspectos das malhas geradas para elementos lineares e quadráticos, sendo que para os lineares (T3) a malha apresenta um alto grau de refinamento em regiões que não apresentam grande concentração de tensões. Outros trabalhos na literatura também destacam este fato.

O terceiro exemplo foi oportuno para mostrar a distribuição da razão de erro (ξ_i) de cada elemento das malhas resultantes de cada passo do processo adaptativo. A tabela de cores referente a máxima tensão principal vai do azul escuro (compressão) ao vermelho escuro (tração). Já a tabela de cores referente a razão de erro ξ_i vai do azul (valores negativos) ao vermelho (valores positivos).

5.1.1. Peça mecânica com um furo circular

O primeiro exemplo é a análise de uma peça mecânica com um furo circular. Este exemplo é importante para mostrar a influência da adaptatividade geométrica na convergência feita em conjunto com a análise de erro. Neste exemplo também se faz uma comparação entre os métodos de suavização que foram disponibilizados no programa. Considera-se para a solução deste problema estado plano de deformação com o módulo de elasticidade $E = 10^5$, e coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$ e espessura $e = 1$. A Figura 31 abaixo mostra as características do problema.

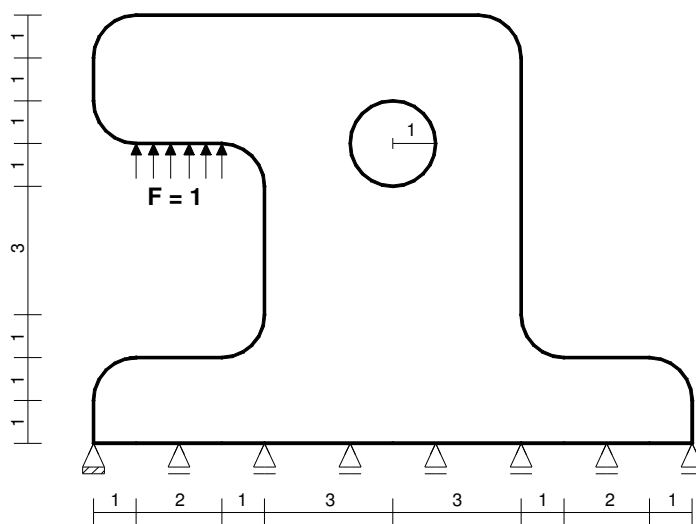


Figura 31 Peça mecânica com um furo circular.

Como os parâmetros de entrada da adaptatividade geométrica são estabelecidos pelo usuário, adotaram-se os seguintes valores para os exemplos: tamanho máximo (d_{MAX}) de segmento da discretização da curva igual à metade do comprimento da curva, tamanho mínimo (d_{MIN}) igual ao próprio comprimento da curva e a tolerância angular (ang_{TOL}) igual a dois graus.

Neste exemplo ao se usar elementos do tipo (T3) foram necessários três passos do processo adaptativo. Já para elementos do tipo quadrático (T6) foram necessários dois passos do processo adaptativo. Nos dois casos a convergência independe do uso da adaptatividade geométrica. Mas mesmo assim, percebe-se através do valor de $\bar{\eta}$ e do número de elementos gerados que o processo converge mais rapidamente quando se considera o efeito geométrico.

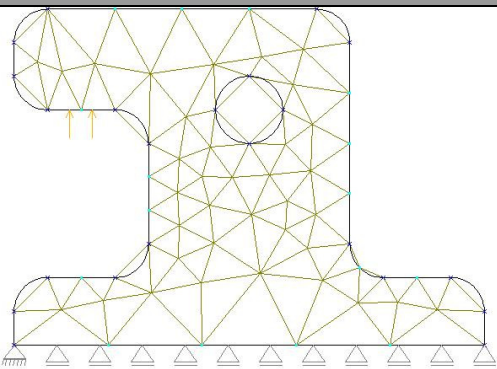
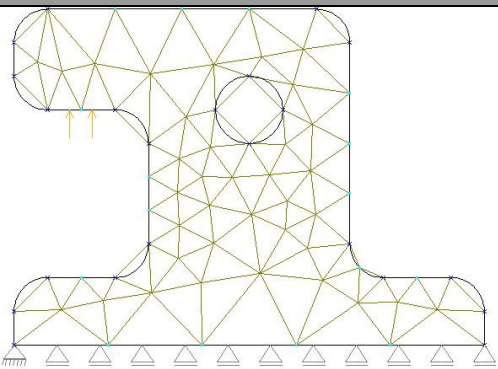
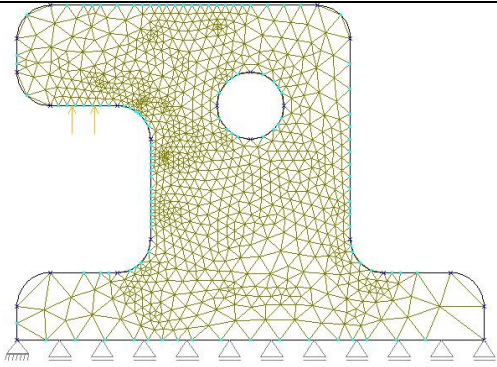
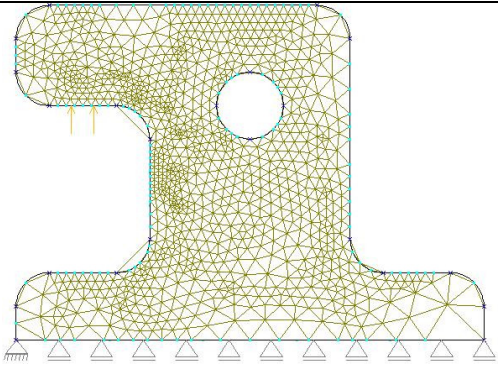
É evidente que a influência da adaptatividade geométrica varia conforme os valores estipulados para os parâmetros de entrada.

A Figura 32 apresenta as malhas com as suas características e os resultados da análise de erro para elementos lineares (T3) utilizando-se os dois métodos de suavização apresentados neste trabalho (*Z2-HC* [62] e *SPR* [63-66]). Nesta figura não se está utilizando a adaptatividade geométrica.

A Figura 33 mostra os aspectos das malhas com os elementos lineares (T3) usando-se a adaptatividade geométrica durante o processo adaptativo.

A Figura 34.b ilustra a malha resultante após se realizar um passo do processo adaptativo usando-se somente a adaptatividade geométrica, passando como parâmetros de análise os dados mostrados na Figura 34.a.

A Figura 35 mostra os aspectos das malhas deste exemplo usando elementos quadráticos (T6) e sem usar a adaptatividade geométrica. Já a Figura 36 mostra o aspecto das malhas com os elementos quadráticos (T6) usando-se a adaptatividade geométrica durante o processo adaptativo.

<i>Z2-HC</i>	<i>SPR</i>
	
(a) NN = 74, NE = 110 GDL = 141, $\bar{\eta} = 35.28 \%$	(a) NN = 74, NE = 110 GDL = 141, $\bar{\eta} = 35.40 \%$
	
(b) NN = 955, NE = 1772 GDL = 1890, $\bar{\eta} = 10.98 \%$	(b) NN = 1067, NE = 1985 GDL = 2112, $\bar{\eta} = 11.77 \%$

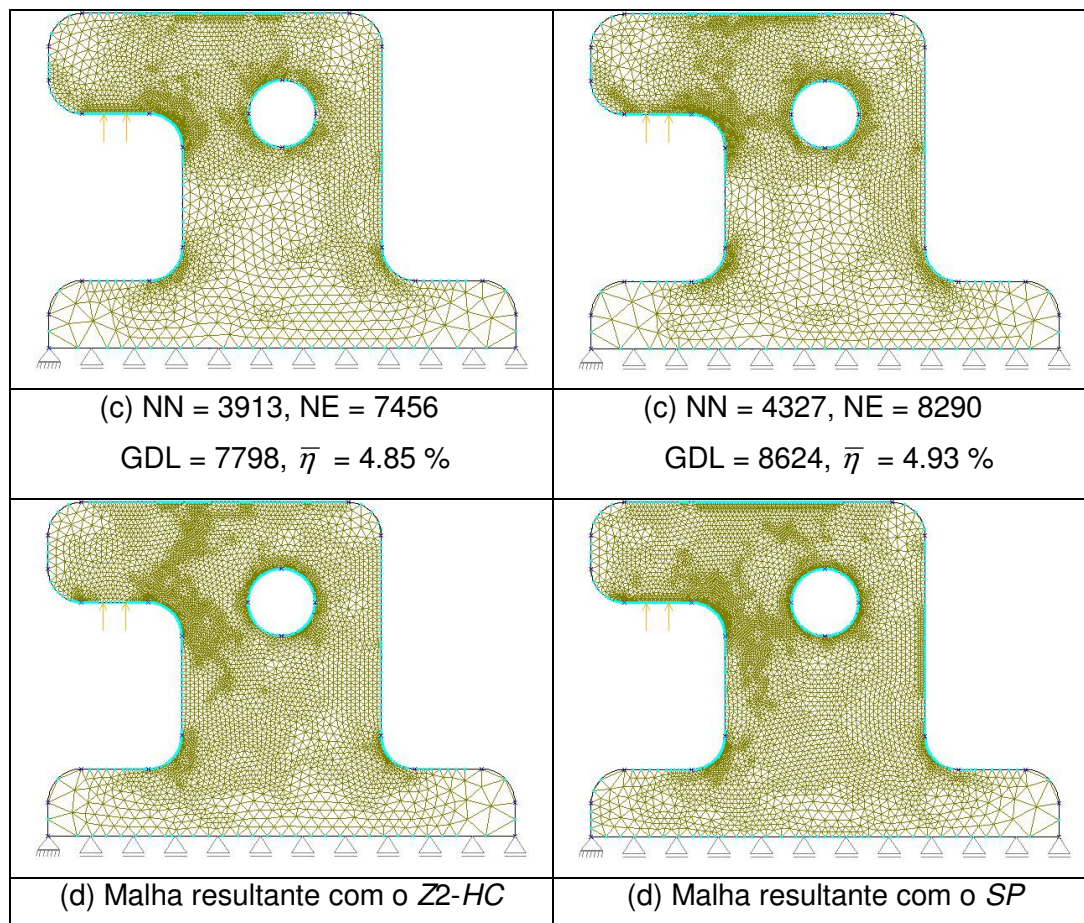


Figura 32 Comparação entre os métodos de suavização *Z2-HC* e *SPR*, utilizando-se elementos lineares (T3) usando apenas a adaptatividade numérica: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d).

Na Figura 32 percebe-se que o método *Z2-HC* [62], que é menos complexo matematicamente e por isso é bem conhecido no meio técnico apresenta resultados bem próximos ao *SPR* [63-66]. Desta forma, todos os outros exemplos serão apresentados apenas usando-se o *Z2-HC* [62] como método de suavização, pois também, não é o objetivo deste trabalho comparar os métodos de suavização existentes.

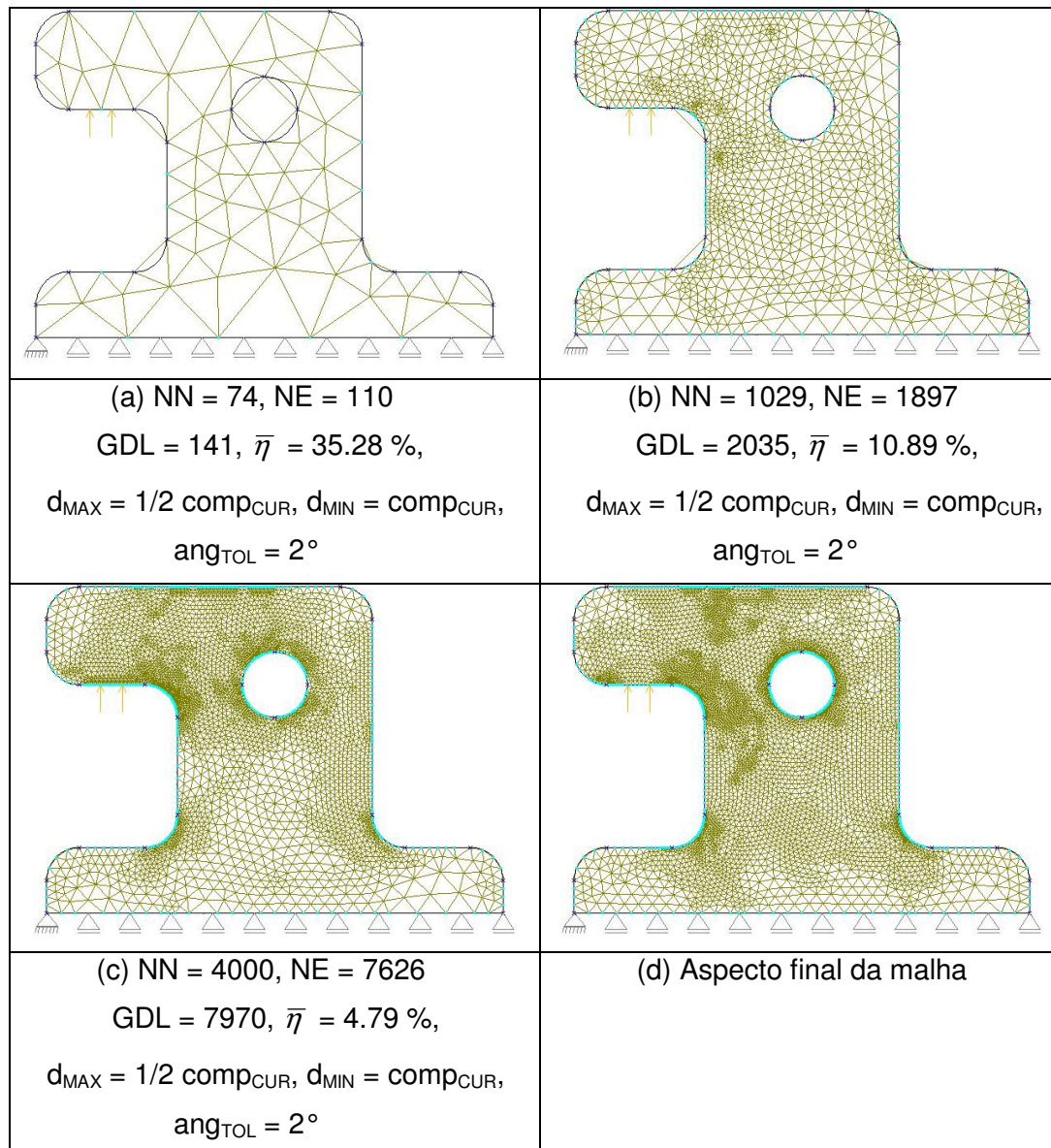


Figura 33 Exemplo 1 com T3 usando a adaptatividade geométrica e numérica: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d).

Nos resultados da Figura 33 pode-se perceber que as curvas de bordo próximas a regiões que não apresentam grande concentrações de tensões foram mais refinadas do que as mesmas curvas quando se usou somente a adaptatividade numérica. Isto acontece justamente pelo uso da adaptatividade geométrica, pois desta forma se gera um número maior de elementos na malha e consecutivamente a análise de erro converge mais rapidamente.

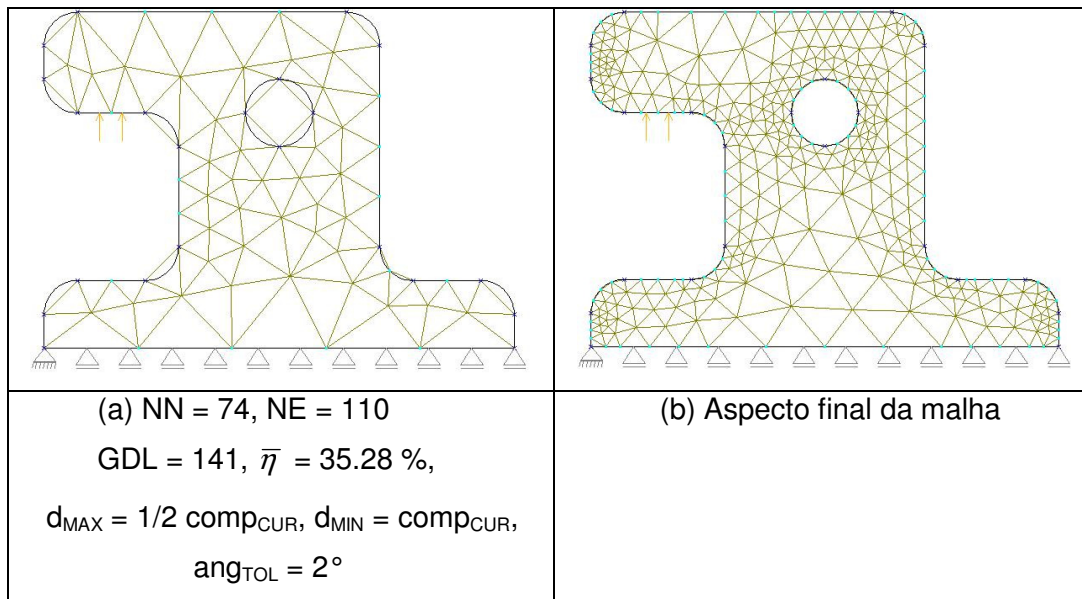


Figura 34 Exemplo 1 com T3 e usando apenas a adaptatividade geométrica: malha inicial (a), malha seguinte (b).

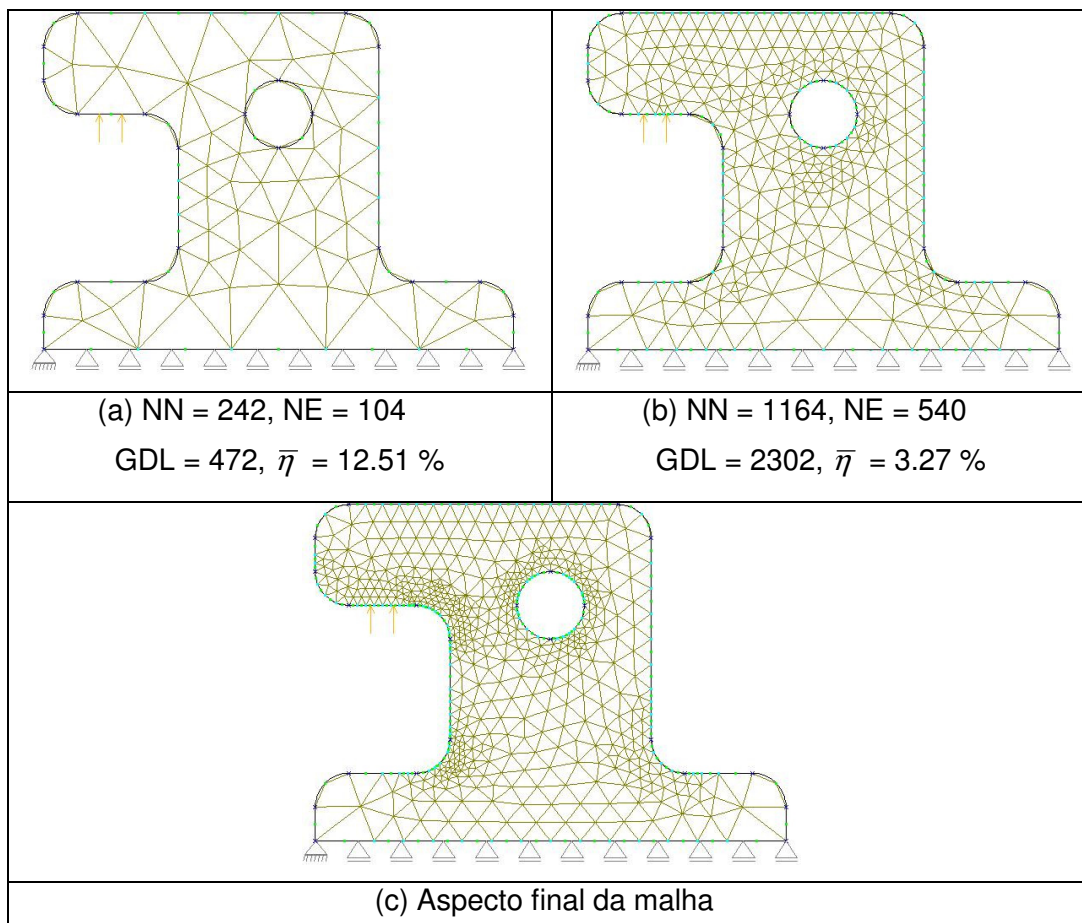


Figura 35 Exemplo 1 com T6 sem a adaptatividade geométrica mas com a adaptatividade numérica: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c).

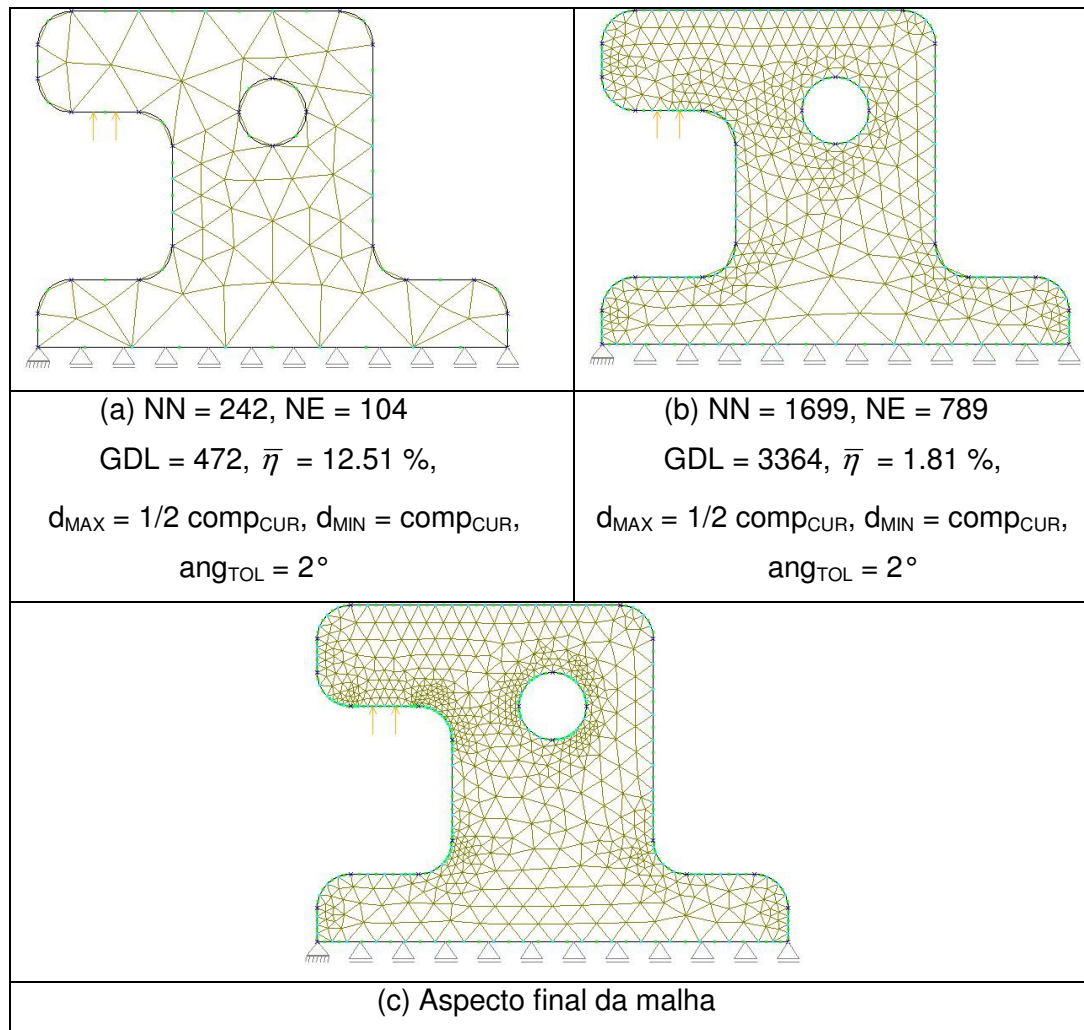


Figura 36 Exemplo 1 com T6 usando a adaptatividade geométrica e numérica: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c).

Observando a Figura 36.b e c com a Figura 36.b e c, percebe-se que a principal diferença entre as malhas, na sua respectiva ordem do processo adaptativo, é o grau de refinamento das curvas do tipo arco de círculo. Dessa forma, nas malhas em que se considerou a adaptatividade geométrica, obteve-se um maior número de elementos e consequentemente uma convergência mais rápida.

5.1.2. Placa quadrada com furo quadrado

O segundo exemplo analisado é uma placa quadrada com um furo quadrado, submetida a um carregamento lateral unitário. Devido às condições de simetria apenas um quarto da placa foi modelado. Este exemplo é mostrado para demonstrar a aplicabilidade do processo adaptativo proposto para multiregiões. Considerou-se estado plano de tensões, com módulo de elasticidade $E = 10^5$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ e espessura $e = 1$. Neste exemplo, considerou-se três regiões, para que fosse possível ter condições iniciais iguais as que foram obtidas por Cavalcante-Neto [13]. A Figura 37 mostra as características do problema.

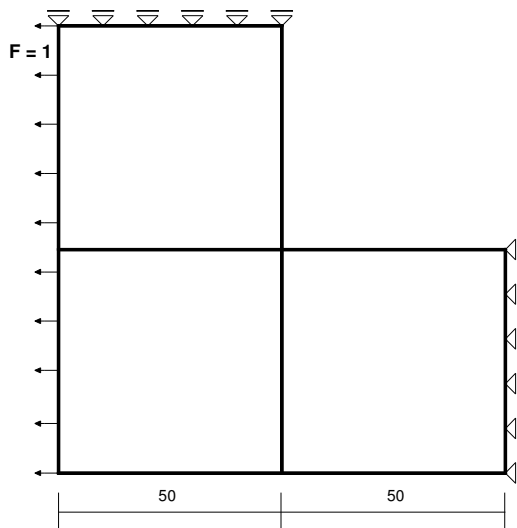


Figura 37 Placa quadrada com furo quadrado.

Para este exemplo foram necessários três passos do processo adaptativo usando o T3 e apenas dois passos usando o T6 para satisfazer a equação (17). No trabalho de Cavalcante-Neto [12], também foram necessários três passos para os dois tipos de elementos satisfazerem a referida equação.

A Figura 38 e a Figura 39 mostram os aspectos das malhas com os elementos lineares (T3) e quadráticos (T6) com as suas características, número de nós (NN), número de elementos (NE) e graus de liberdade (GDL).

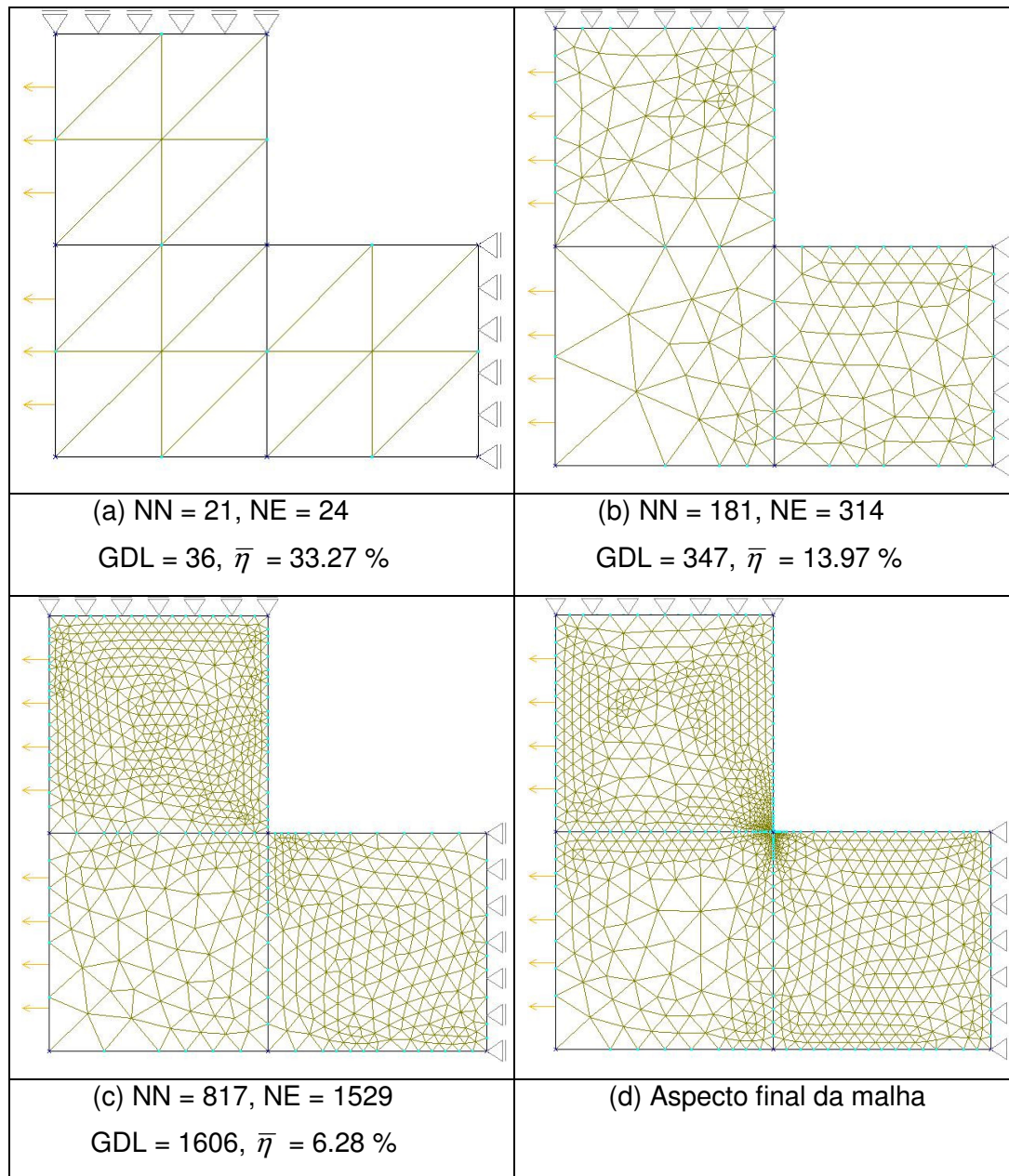


Figura 38 Exemplo 2 com T3: malha inicial (a), malha seguinte (b,c,d).

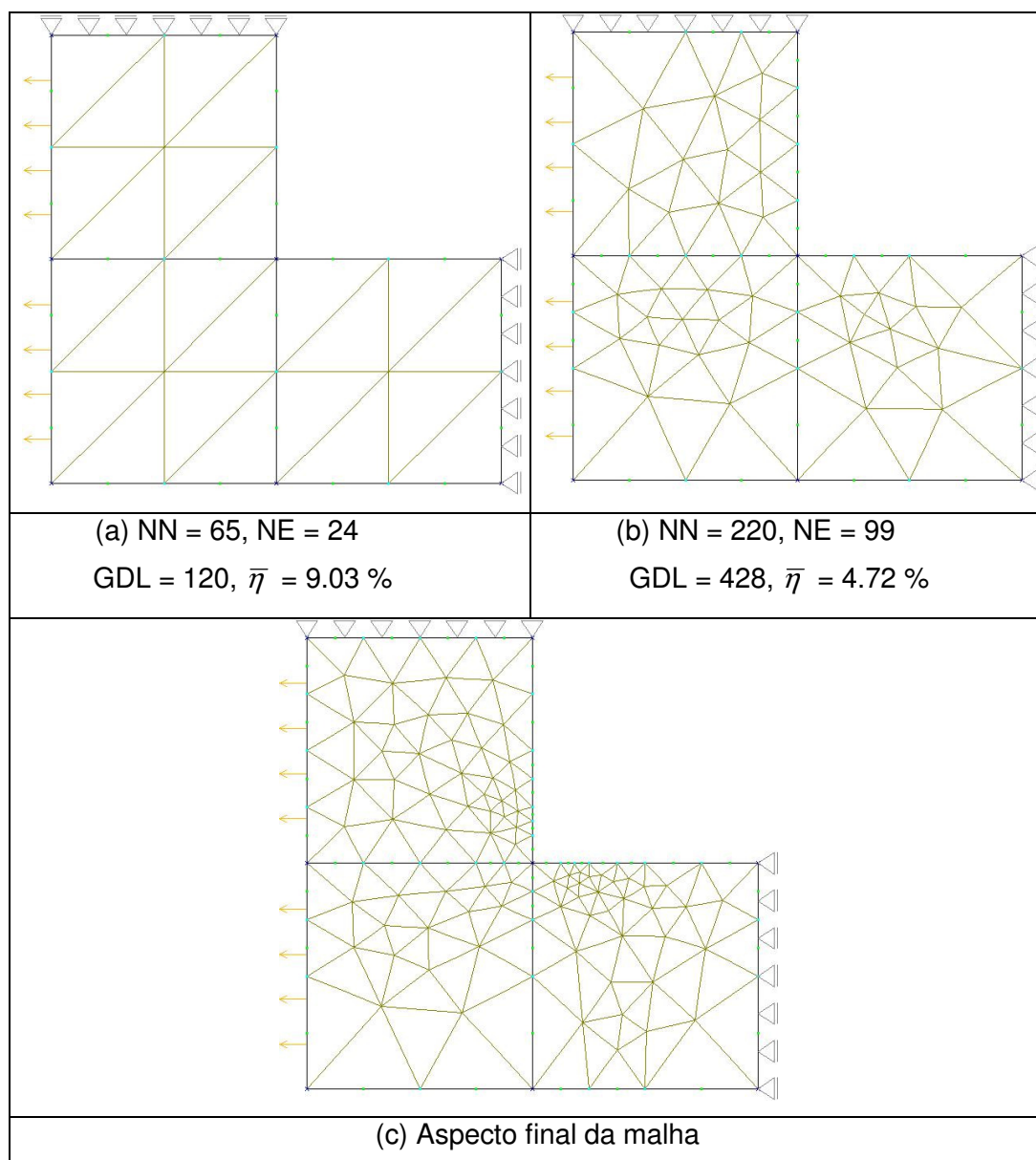


Figura 39 Exemplo 2 com T6: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c).

A Tabela 1 compara os resultados obtidos deste trabalho com os de Cavalcante-Neto [12].

Tabela 1 Comparação dos resultados para a placa quadrada com furo quadrado.

	Cavalcante-Neto	Processo adaptativo proposto
1º	Elemento linear (T3)	
NN	21	21
NE	24	24
GDL	36	36
$\bar{\eta}$	33.27 %	33.27 %
2º	Elemento linear (T3)	
NN	240	181
NE	413	314
GDL	464	347
$\bar{\eta}$	13.45 %	13.97 %
3º	Elemento linear (T3)	
NN	693	817
NE	1265	1529
GDL	1365	1606
$\bar{\eta}$	7.77 %	6.28 %
1º	Elemento quadrático (T6)	
NN	65	65
NE	24	24
GDL	120	120
$\bar{\eta}$	9.02 %	9.03 %
2º	Elemento quadrático (T6)	
NN	141	220
NE	60	99
GDL	272	428
$\bar{\eta}$	5.77 %	4.72 %

Na Tabela 1, a primeira coluna contém os números correspondentes ao passo do processo adaptativo.

Os valores do erro corrente $\bar{\eta}$ obtidos pelo processo adaptativo proposto reduzem mais rapidamente. Isto pode ser visto pelos valores de $\bar{\eta}$ em cada passo do processo. Apenas no segundo passo do caso linear foi que a formulação proposta apresentou um valor de $\bar{\eta}$ maior que o resultado obtido por Cavalcante-Neto.

5.1.3. Viga curta em balanço

O terceiro exemplo é uma viga curta em balanço sob carregamento distribuído unitário no seu bordo superior. Considera-se para a solução deste problema estado plano de deformação com módulo de elasticidade $E=1$, coeficiente de Poisson $\nu=0.3$ e espessura $e=1$. A Figura 40 mostra as características do problema.

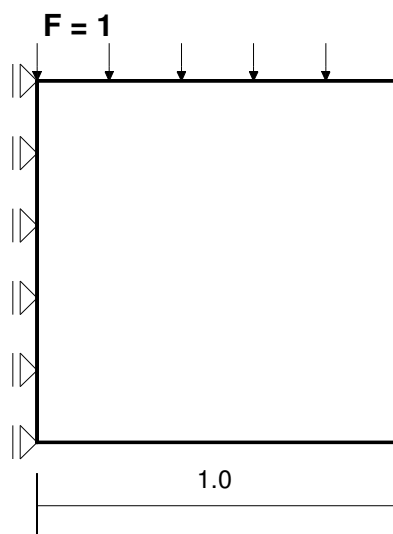


Figura 40 Viga curta em balanço.

Para este exemplo foram necessários três passos do processo adaptativo tanto usando o T3 quanto o T6 para satisfazer a equação (17). No trabalho de Cavalcante-Neto [12] também foram necessários três passos para que as malhas com os dois tipos de elementos pudessem satisfazer a referida equação.

A Figura 41 e a Figura 43 mostram os aspectos das malhas com os elementos lineares (T3) e quadráticos (T6) com as suas características, número de nós (NN), número de elementos (NE) e graus de liberdade (GDL).

Este exemplo também é muito bom para ilustrar como ocorre a distribuição das razões de erro (ξ_i) entre os elementos da malha conforme a evolução do processo adaptativo. Desta forma, a Figura 42 mostra esta distribuição de erro conforme uma tabela de cores referente aos valores de (ξ_i) para cada elemento. Como o processo adaptativo se propõe a homogeneizar estes valores para todos os elementos, espera-se que no final do processo a figura esteja praticamente de uma cor só.

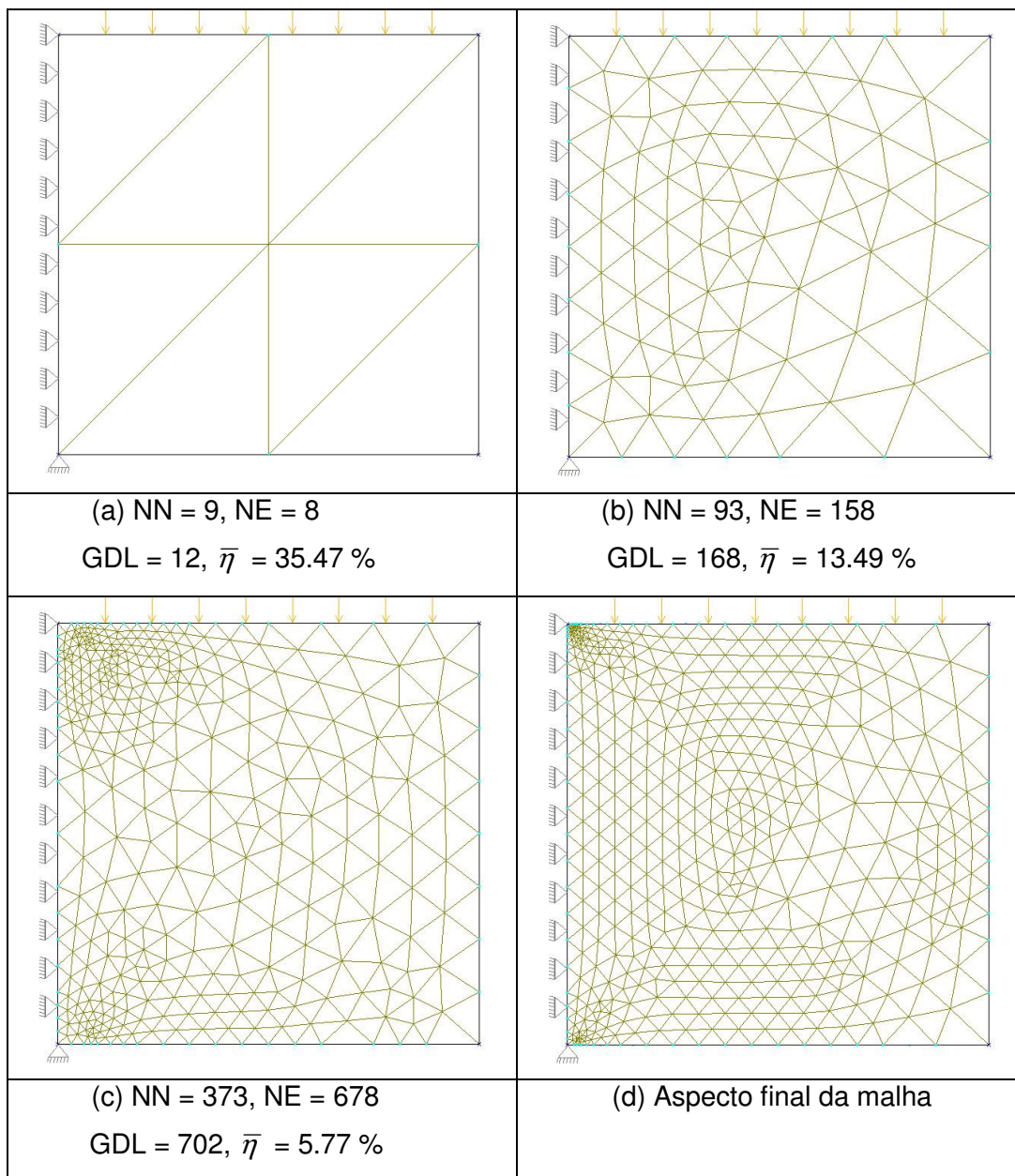


Figura 41 Exemplo 3 com T3: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d).

Na Figura 41.b a malha não está mostrando maior discretização nos cantos que apresentam concentração de tensões (canto esquerdo superior e inferior), o que só começa a ser verificado a partir da Figura 41.c, quando o critério de convergência já é atendido, conforme a equação (17).

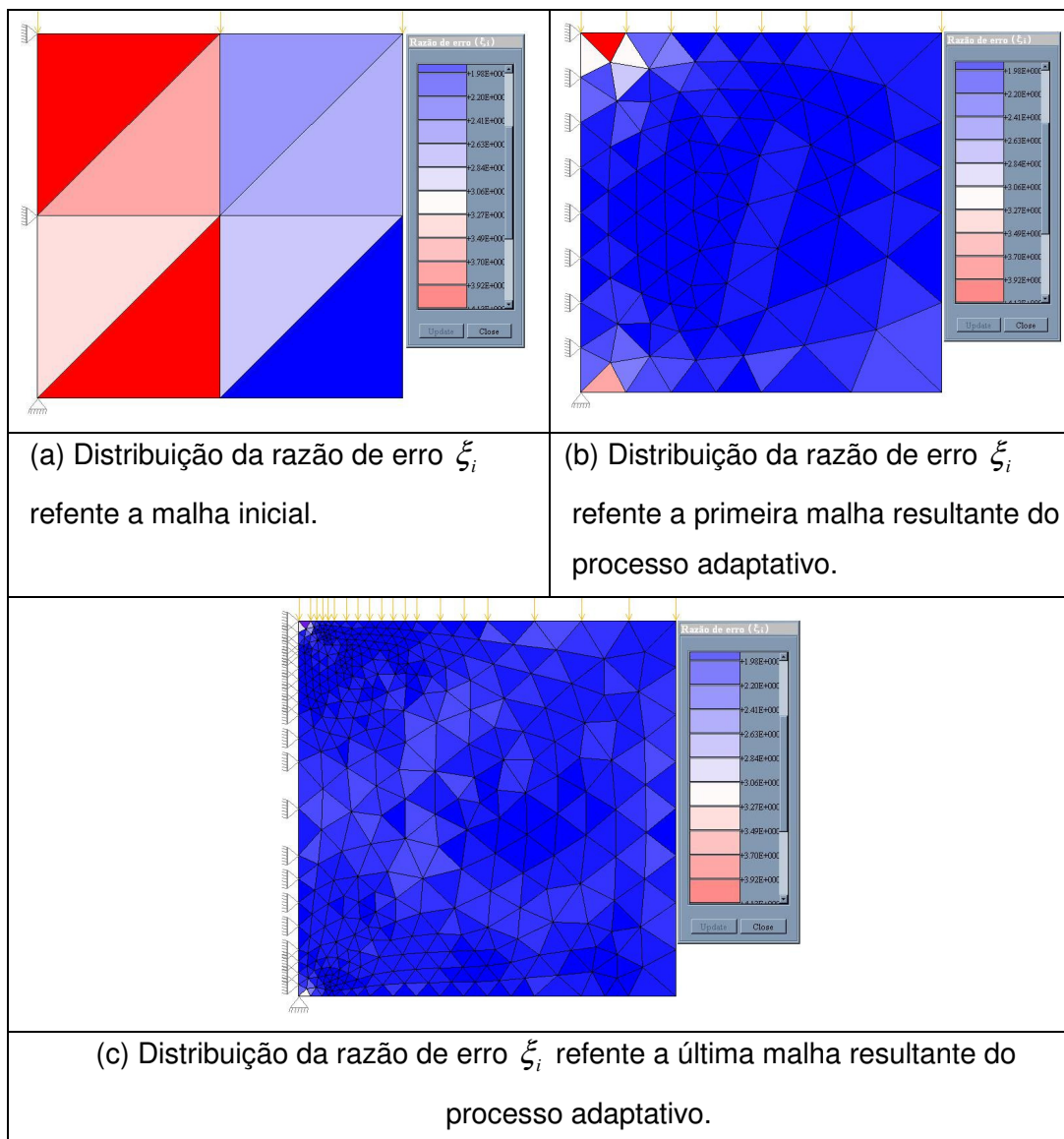


Figura 42 Mostra a distribuição da razão de erro ξ_i entre os elementos da malha durante os passos do processo adaptativo.

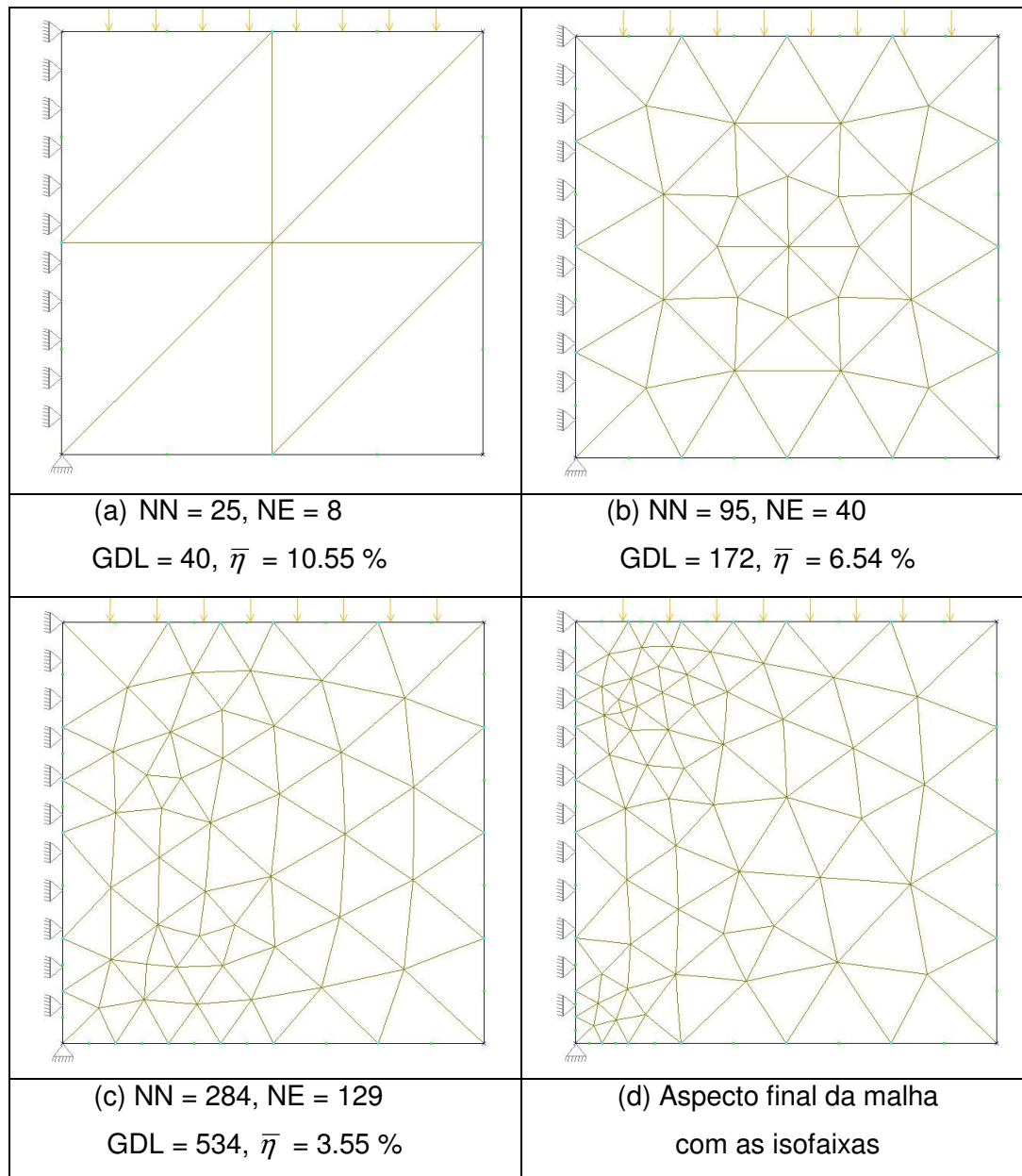


Figura 43 Exemplo 3 com T6: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d).

Na Figura 43.b a malha não está apresentando maior discretização nos cantos que apresentam concentração de tensões (canto esquerdo superior e inferior), o que só é observado a partir da Figura 43.d quando já foi satisfeito o critério de convergência, conforme a equação (17).

A Tabela 2 compara os resultados obtidos deste trabalho com os de Cavalcante-Neto [12].

Tabela 2 Comparação dos resultados para a viga curta em balanço.

	Cavalcante-Neto	Processo adaptativo proposto
1º	Elemento linear (T3)	
NN	9	9
NE	8	8
GDL	12	12
$\bar{\eta}$	35.19 %	35.47 %
2º	Elemento linear (T3)	
NN	128	93
NE	214	158
GDL	230	168
$\bar{\eta}$	11.80 %	13.49 %
3º	Elemento linear (T3)	
NN	525	373
NE	940	678
GDL	970	702
$\bar{\eta}$	5.64 %	5.77 %
1º	Elemento quadrático (T6)	
NN	25	25
NE	8	8
GDL	40	40
$\bar{\eta}$	11.08 %	10.55 %
2º	Elemento quadrático (T6)	
NN	68	95
NE	27	40
GDL	118	172
$\bar{\eta}$	6.15 %	6.54 %
3º	Elemento quadrático (T6)	
NN	141	284
NE	60	129
GDL	256	534
$\bar{\eta}$	3.83 %	3.55 %

Os valores do erro corrente $\bar{\eta}$ obtidos pelo processo adaptativo proposto reduzem mais lentamente para o caso linear e mais rapidamente para o caso quadrático. Isto pode ser visto pelos valores de $\bar{\eta}$ em cada passo do processo. Apenas no segundo passo, do caso quadrático, foi que o valor de $\bar{\eta}$ da formulação proposta foi maior do que o valor obtido por Cavalcante-Neto.

5.1.4. Placa com furo quadrado com dois materiais

O quarto exemplo é a mesma placa do exemplo 2, mas considerando dois materiais diferentes. Este exemplo é mostrado para demonstrar a aplicabilidade do processo adaptativo proposto para regiões de materiais distintos. A diferença é dada no módulo de elasticidade das regiões, onde uma ficou sendo o triplo da outra, tal que $E_1 = 10^5$, $E_2 = 3 \cdot 10^5$, o coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ e espessura $e = 1$ para ambos os materiais. A Figura 44 mostra as características do problema.

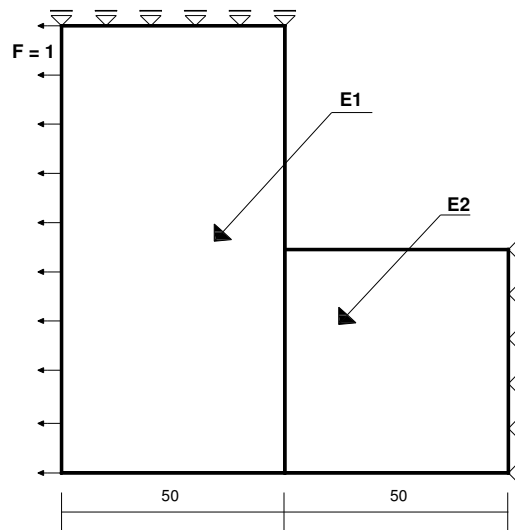


Figura 44 Placa quadrada com furo quadrado com dois materiais.

Para este exemplo foram necessários três passos do processo adaptativo tanto usando o T3 quanto usando o T6 para satisfazer a equação (17). No trabalho de Cavalcante-Neto [12] foram necessários três passos para que as malhas com os dois tipos de elementos pudessem satisfazer a referida equação.

A Figura 45 e a Figura 46 mostram os aspectos das malhas com os elementos lineares (T3) e quadráticos (T6) com as suas características, número de nós (NN), número de elementos (NE) e graus de liberdade (GDL).

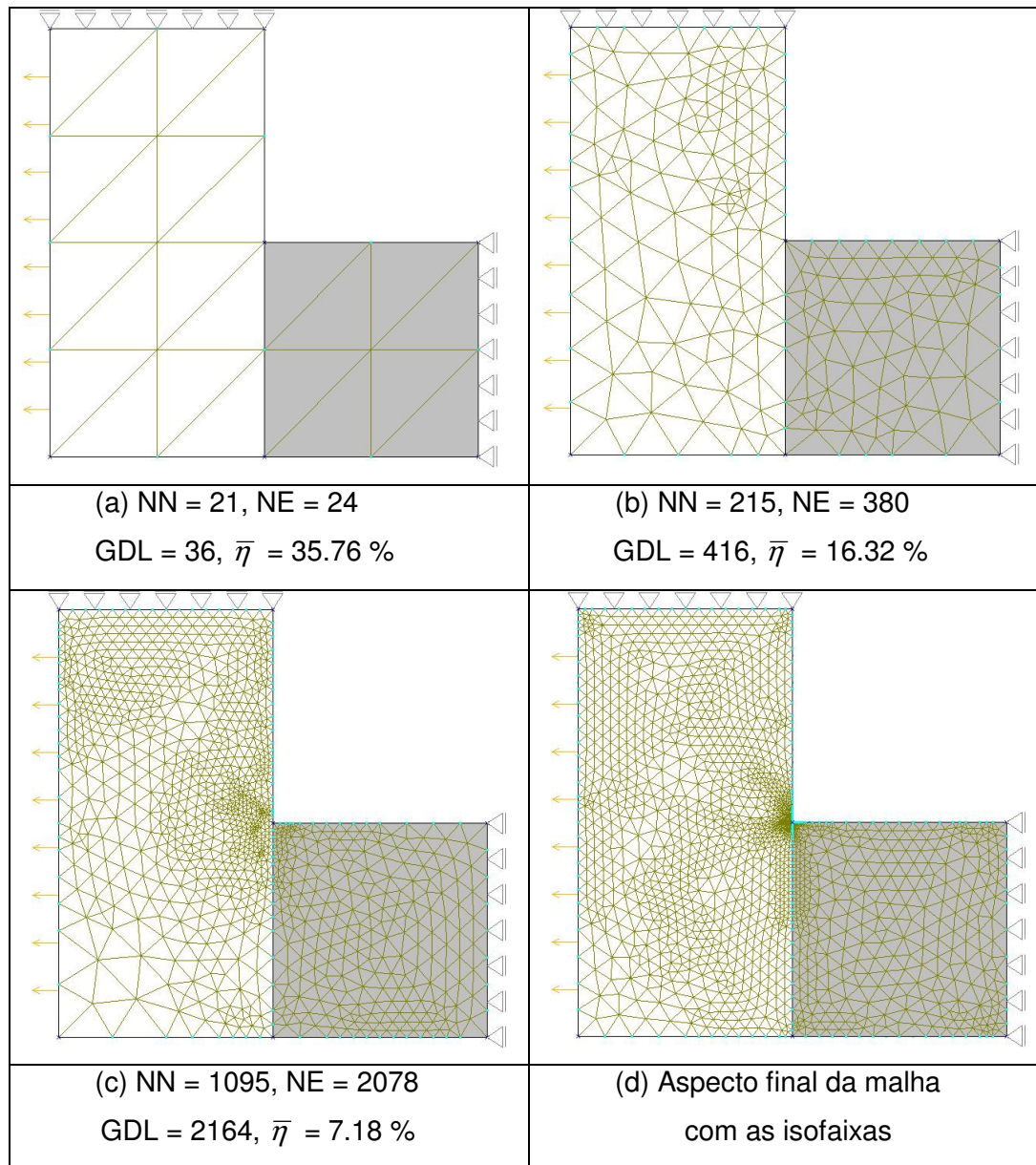


Figura 45 Exemplo 4 com T3: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d).

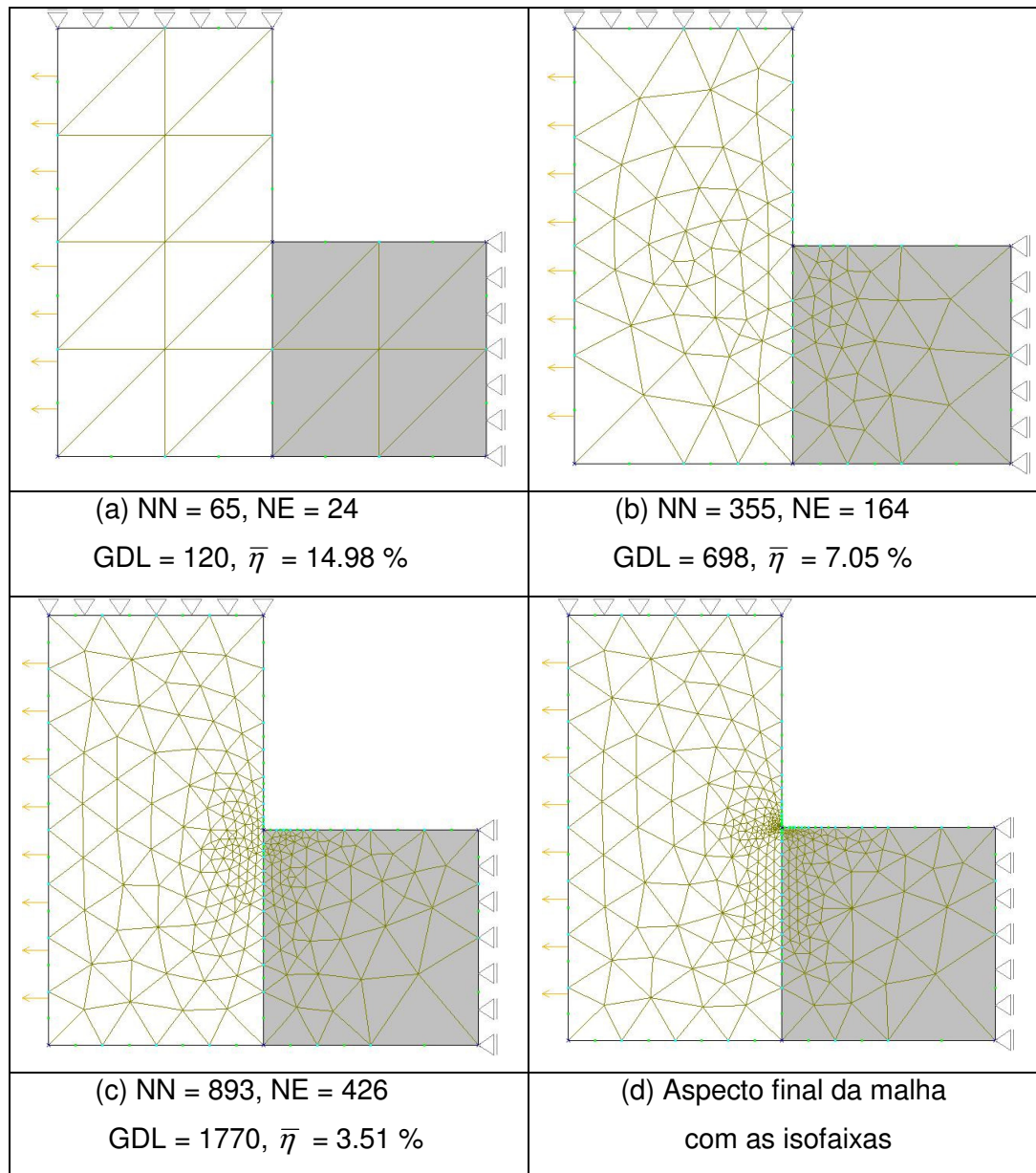


Figura 46 Exemplo 4 com T6: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d).

A Tabela 3 compara os resultados obtidos deste trabalho com os de Cavalcante-Neto [12].

Tabela 3 Comparação dos resultados para a placa quadrada com furo quadrado com dois materiais diferentes.

	Cavalcante-Neto	Processo adaptativo proposto
1º	Elemento linear (T3)	
NN	21	21
NE	24	24
GDL	36	36
$\bar{\eta}$	35.76 %	35.76 %
2º	Elemento linear (T3)	
NN	286	215
NE	503	380
GDL	558	416
$\bar{\eta}$	14.41 %	16.32 %
3º	Elemento linear (T3)	
NN	1077	1095
NE	1999	2078
GDL	2135	2164
$\bar{\eta}$	7.33 %	7.18 %
1º	Elemento quadrático (T6)	
NN	65	65
NE	24	24
GDL	120	120
$\bar{\eta}$	19.37 %	14.98 %
2º	Elemento quadrático (T6)	
NN	308	355
NE	141	164
GDL	606	698
$\bar{\eta}$	6.57 %	7.05 %
3º	Elemento quadrático (T6)	
NN	629	893
NE	296	426
GDL	1246	1770
$\bar{\eta}$	3.26 %	3.51 %

Nesta tabela pode-se perceber que para o caso linear, ambas as formulações fornecem o mesmo valor de $\bar{\eta}$ para o primeiro passo, no segundo passo o valor obtido de $\bar{\eta}$ foi maior para a formulação proposta. Já para o terceiro passo, o valor de $\bar{\eta}$ obtido pela formulação proposta, foi menor.

No caso quadrático apenas no primeiro passo o valor de $\bar{\eta}$ obtido pela formulação proposta foi menor que o valor encontrado por Cavalcante-Neto.

5.1.5. Placa complexa com três furos circulares e um quadrado

O quinto exemplo é a análise de uma placa complexa com três furos circulares e um quadrado sob um carregamento lateral unitário. Este exemplo é importante para mostrar a eficácia do processo adaptativo proposto para problemas com geometria complexa. Considera-se para a solução deste problema estado plano de deformação com $E = 10^5$, $\nu = 0.3$ e espessura $e = 1$. A Figura 47 mostra as características do problema.

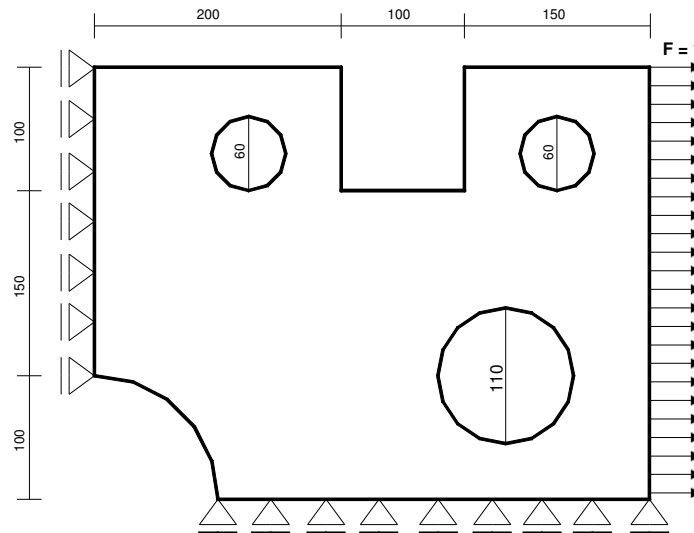


Figura 47 Placa complexa com três furos circulares e um quadrado.

Para este exemplo foram necessários três passos do processo adaptativo quando se usou o T3 e dois passos quando se usou o T6 para satisfazer a equação (17). No trabalho de Cavalcante-Neto [12] também foram necessários três passos para satisfazer a referida equação. Esse autor só analisou este problema para o caso quadrático (T6).

A Figura 48 e a Figura 49 mostram os aspectos das malhas com os elementos lineares (T3) e quadráticos (T6) com as suas características, número de nós (NN), número de elementos (NE) e graus de liberdade (GDL).

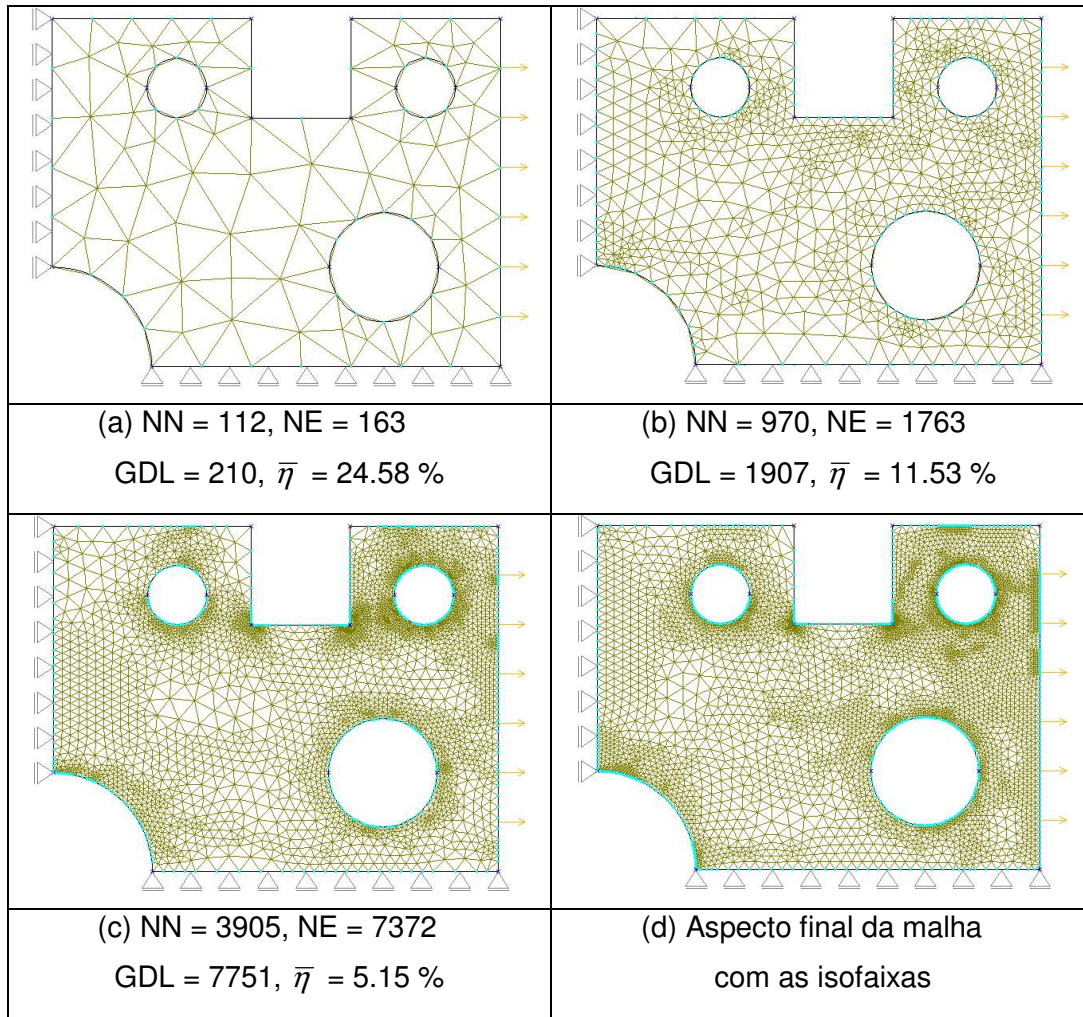


Figura 48 Exemplo 5 com T3: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d).

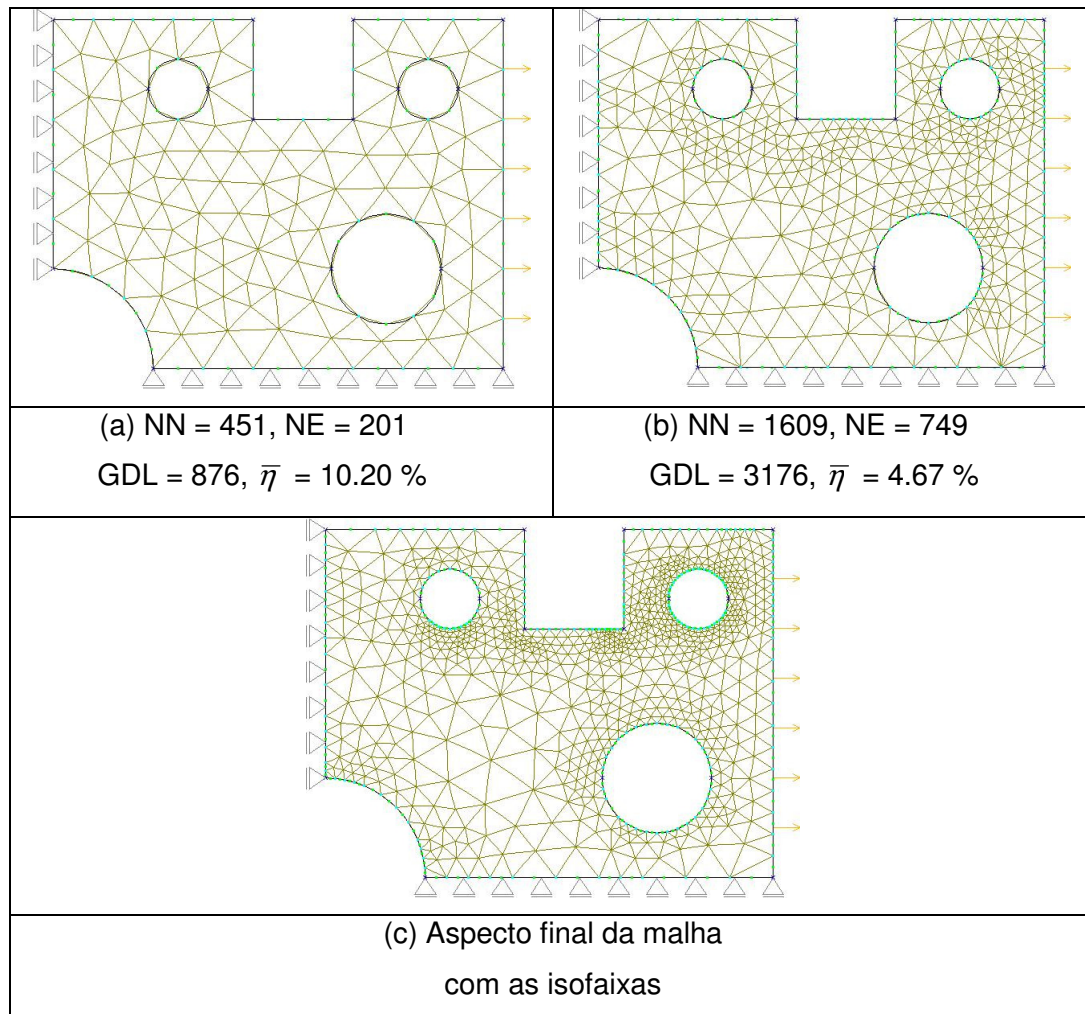


Figura 49 Exemplo 5 com T6: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c).

A Tabela 4 compara os resultados obtidos para o caso quadrático deste trabalho com os de Cavalcante-Neto [12].

Tabela 4 Comparação dos resultados para a placa complexa com três furos circulares e um quadrado.

	Cavalcante-Neto	Processo adaptativo proposto
1º	Elemento linear (T6)	
NN	275	451
NE	113	201
GDL	524	876
$\bar{\eta}$	12.47 %	10.20 %
2º	Elemento linear (T6)	
NN	953	1609
NE	431	749
GDL	1878	3176
$\bar{\eta}$	5.71 %	4.67 %

Percebe-se que no processo adaptativo proposto os valores de $\bar{\eta}$ obtidos a cada passo são menores do que os obtidos por Cavalcante-Neto, porém como as características iniciais não foram equivalentes, não se pode afirmar com certeza em qual caso se obteve a convergência de forma mais rápida.

5.1.6. Barragem

O sexto exemplo é a análise de uma barragem bidimensional submetida a pressão hidrostática. Este exemplo é importante para mostrar a eficácia da utilização do processo adaptativo proposto para problemas com geometria complexa. Este exemplo também foi analisado por Zienkiewicz [66]. Considera-se para a solução deste problema estado plano de deformação com $E = 1$, $\nu = 0.3$ e espessura $e = 1$. A Figura 50 mostra as características do problema.

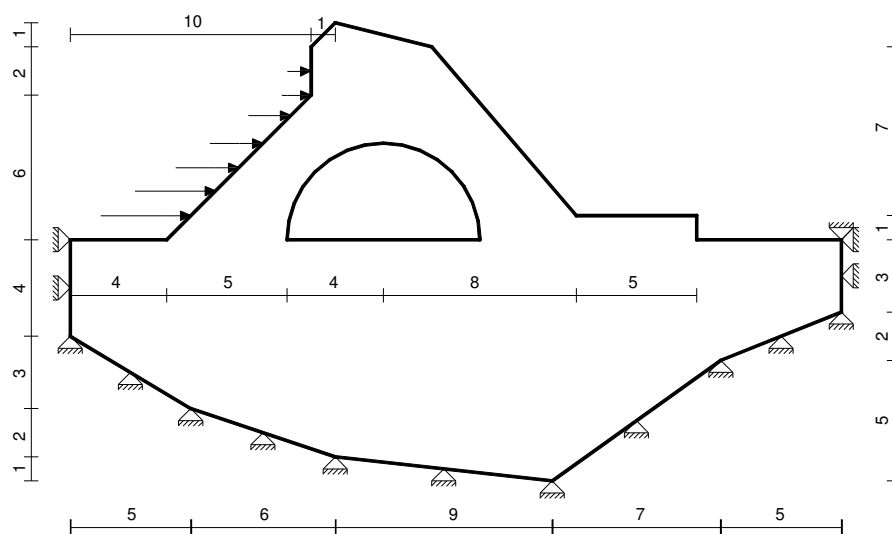


Figura 50 Barragem bidimensional.

Para este exemplo foram necessários três passos do processo adaptativo tanto quando se usou elementos do tipo T3 como quando se usou o T6. O mesmo número de passos foi obtido por Zienkiewicz [66] para elementos quadráticos, porém o número de elementos gerados pelo método proposto é bem maior, fato que pode ser observado na Tabela 5.

A Figura 51 e a Figura 52 mostram os aspectos das malhas com os elementos lineares (T3) e quadráticos (T6) com as suas características, número de nós (NN), número de elementos (NE) e graus de liberdade (GDL).

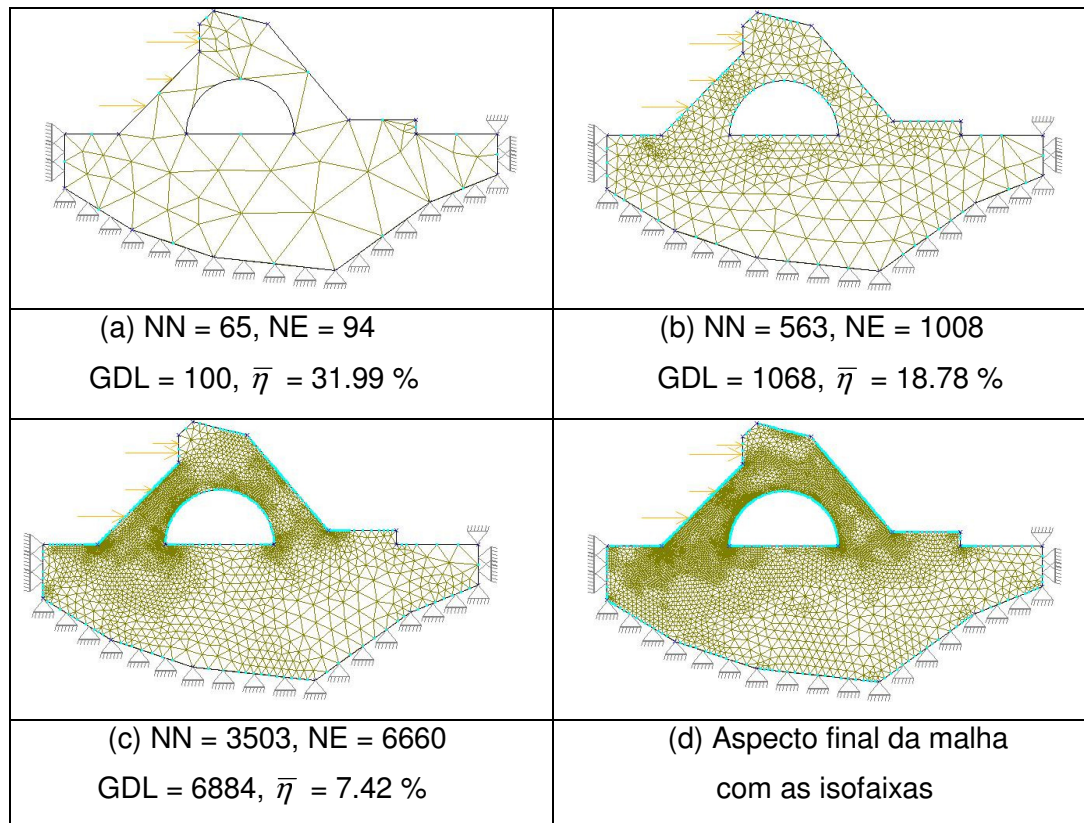


Figura 51 Exemplo 6 com T3: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d).

A Figura 51.c mostra a malha do processo adaptativo. Nesta mesma figura, pode-se observar a influência da qualidade do elemento linear, pois mostra um refinamento em regiões em que não ocorrem altas concentrações de tensões, o que ocorre em menor intensidade para os elementos quadráticos, conforme a Figura 52.b.

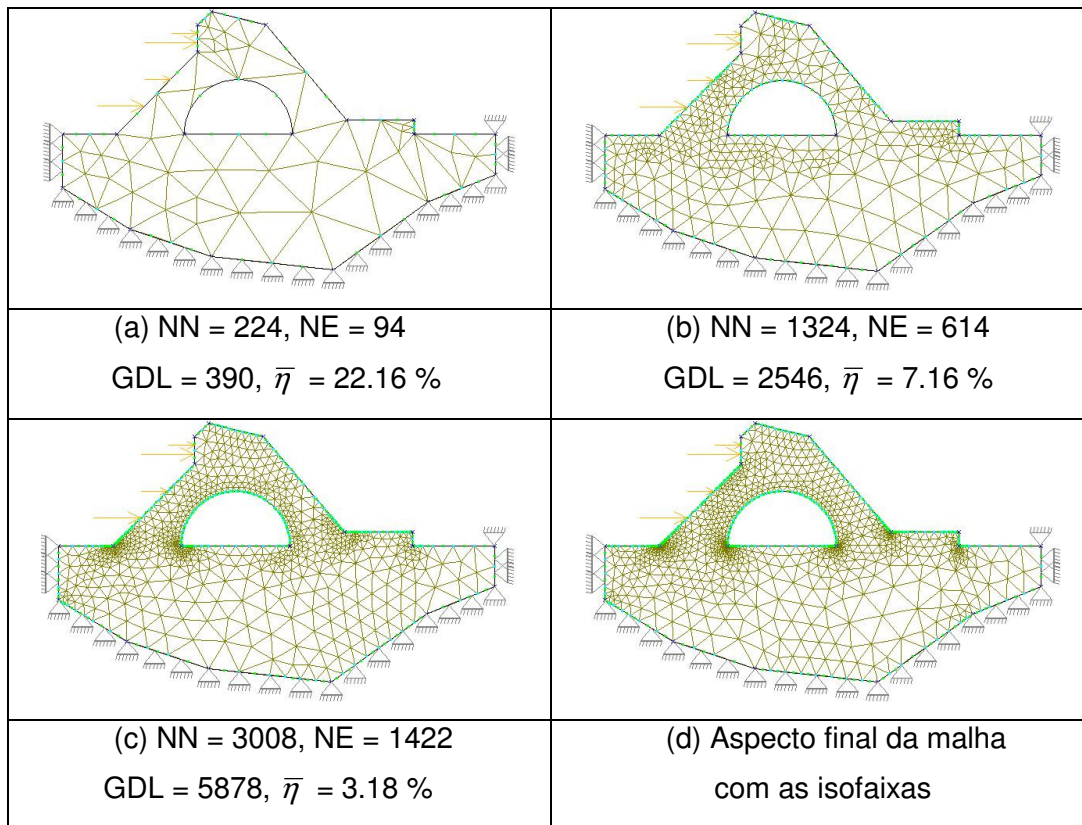


Figura 52 Exemplo 6 com T6: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d).

A Tabela 5 compara os resultados obtidos para o caso quadrático deste trabalho com os de Zienkiewicz [66].

Tabela 5 Comparação dos resultados do exemplo bidimensional da barragem, mostrando os valores obtidos por Zienkiewicz e o método proposto.

	Zienkiewicz	Processo adaptativo proposto
1º	Elemento quadrático (T6)	
NN	—	224
NE	—	94
GDL	728	390
$\bar{\eta}$	16.50 %	22.16 %
2º	Elemento quadrático (T6)	
NN	—	1324
NE	—	614
GDL	1764	2546
$\bar{\eta}$	4.90 %	7.16 %
3º	Elemento quadrático (T6)	
NN	—	3008
NE	—	1422
GDL	—	5878
$\bar{\eta}$	—	3.18 %

Percebe-se que no processo adaptativo proposto os valores de $\bar{\eta}$ obtidos a cada passo são maiores do que os obtidos por Zienkiewicz. Mas como as características iniciais não foram equivalentes, não se pode afirmar com certeza em qual caso se obteve a convergência de forma mais rápida.

5.2. Exemplos em 3D (MG)

Foram usados cinco exemplos com o objetivo de validar a implementação do processo adaptativo no MG [48]. Em todos os exemplos se fez apenas análise para elementos quadráticos (TETRA10).

Deve-se ressaltar que os exemplos que também foram analisados por Cavalcante-Neto [13], não foram analisados de forma completamente automática, requerendo do usuário interferências em cada passo para a construção das malhas.

5.2.1. Viga curta em balanço

O primeiro exemplo é uma viga curta em balanço, fixa em uma extremidade e submetida a uma pressão distribuída vertical na sua extremidade livre. Este problema também foi analisado por Cavalcante-Neto [13]. Adotou-se o valor de $\eta^* = 5\%$, considerando para a solução deste problema módulo de elasticidade $E = 1$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. A Figura 53 mostra as características do problema.

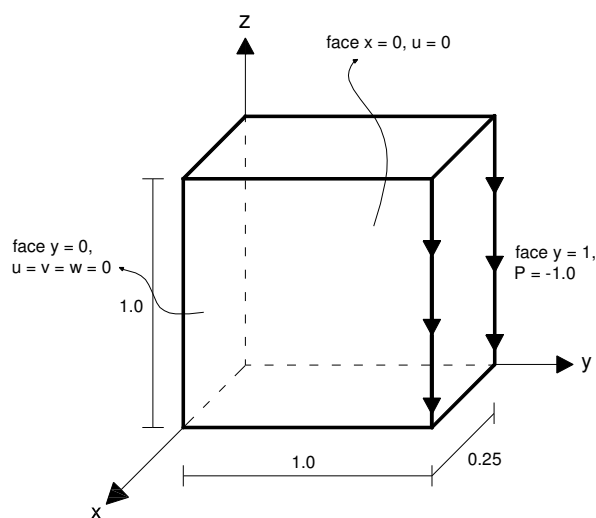


Figura 53 Viga curta em balanço.

Para este exemplo foram necessários dois passos do processo adaptativo. O mesmo número de passos foi obtido por Cavalcante-Neto [13], porém o número de elementos gerados pelo método proposto é bem maior, fato que pode ser observado na Tabela 6.

A Figura 54 mostra o aspecto das malhas para cada passo do processo adaptativo com os elementos quadráticos (TETRA10) e com as suas características, número de nós (NN), número de elementos (NE) e graus de liberdade (GDL).

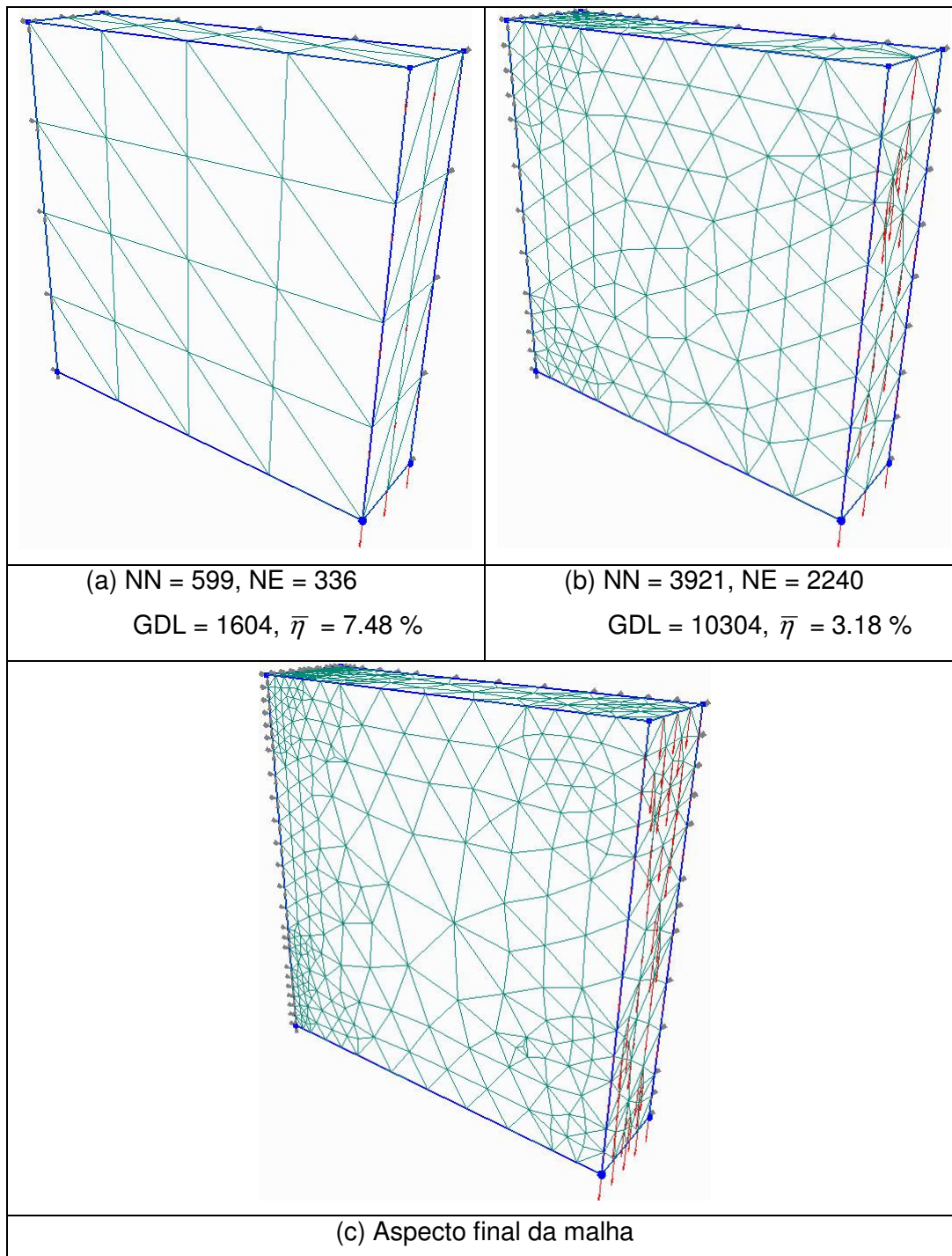


Figura 54 Exemplo 1 com TETRA10: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c).

A Tabela 6 compara os resultados obtidos para o caso quadrático deste trabalho com os de Cavalcante-Neto [13].

Tabela 6 Comparação dos resultados do exemplo da viga curta em balanço 3D.

	Cavalcante-Neto	Processo adaptativo proposto
1º	Elemento quadrático (TETRA10)	
NN	386	599
NE	177	336
GDL	807	1604
$\bar{\eta}$	7.90 %	7.48 %
2º	Elemento quadrático (TETRA10)	
NN	1122	3921
NE	609	2240
GDL	2625	10304
$\bar{\eta}$	4.20 %	3.18 %

Na Tabela 6 a primeira coluna contém os números correspondentes ao passo do processo adaptativo e os dados com as características das malhas.

Percebe-se que no processo adaptativo proposto os valores de $\bar{\eta}$ obtidos a cada passo são menores do que os obtidos por Cavalcante-Neto. Porém o número de elementos é maior. Portanto, como as características iniciais não foram equivalentes, não se pode afirmar com certeza em qual caso se obteve a convergência de forma mais rápida.

5.2.2. Placa com furo circular

O segundo exemplo é uma placa fina com um furo circular, submetida a uma tensão axial. Devido à simetria, apenas um quarto da placa foi analisado. Este problema também foi analisado por Cavalcante-Neto [13]. Adotou-se o valor de $\eta^* = 5\%$, considerando para a solução deste problema módulo de elasticidade $E = 10E + 06$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$. A Figura 55 mostra as características do problema.

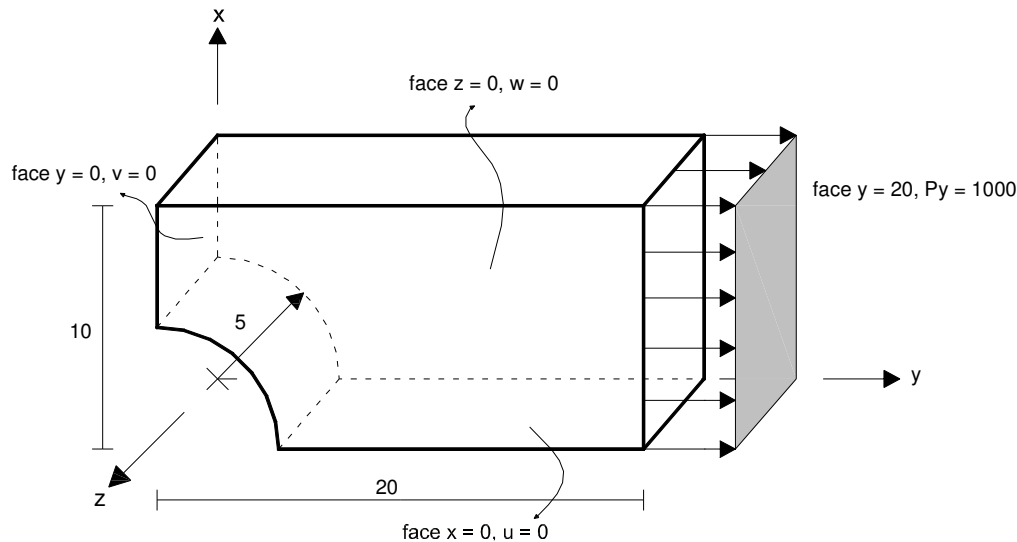


Figura 55 Placa com furo circular.

Para este exemplo foram necessários dois passos do processo adaptativo, um passo a menos do que obteve Cavalcante-Neto [13]. Porém, o número de elementos gerados pelo método proposto é bem maior, fato que pode ser observado na Tabela 7.

A Figura 56 mostra o aspecto das malhas para cada passo do processo adaptativo com os elementos quadráticos (TETRA10) e com as suas características, número de nós (NN), número de elementos (NE) e graus de liberdade (GDL).

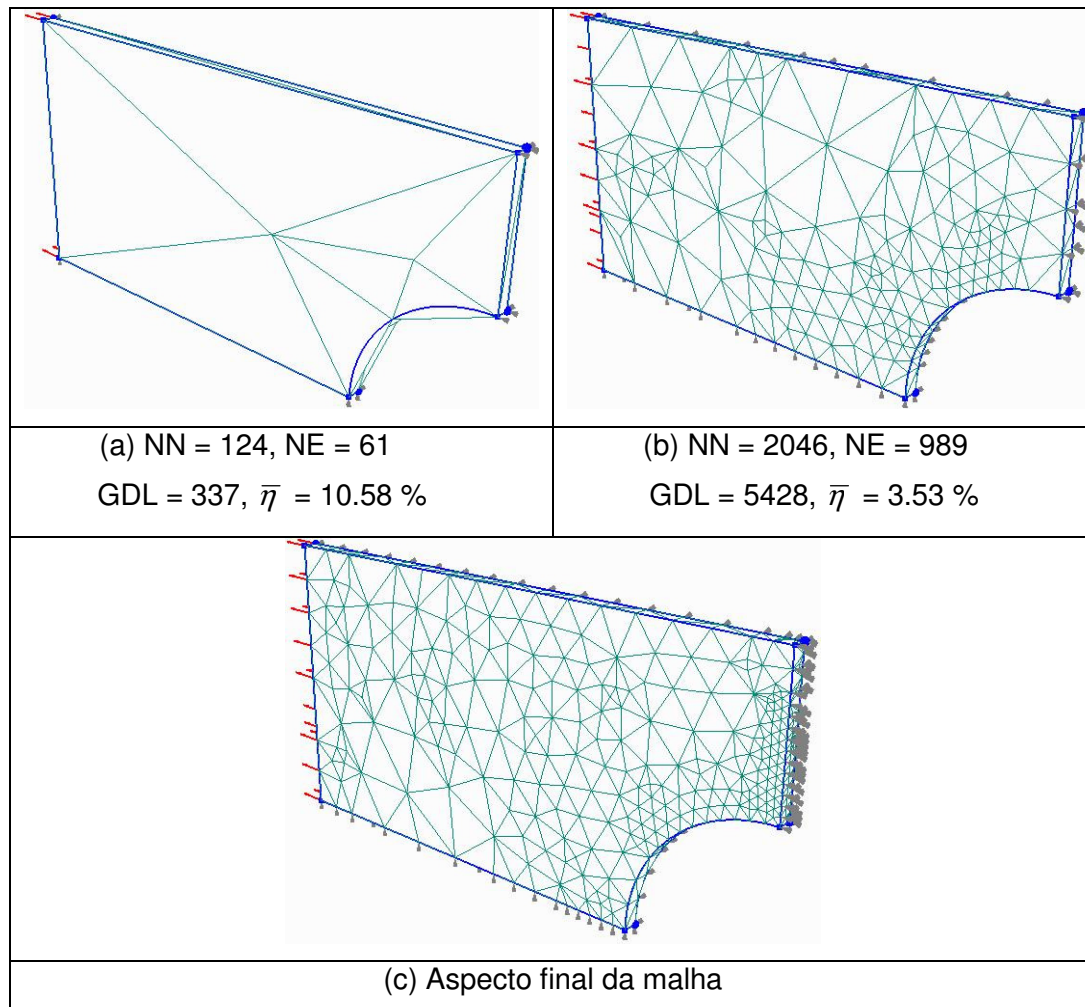


Figura 56 Exemplo 2 com TETRA10: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c).

A Tabela 7 compara os resultados obtidos para o caso quadrático deste trabalho com os de Cavalcante-Neto [13].

Tabela 7 Comparação dos resultados do exemplo da placa 3D com furo circular.

	Cavalcante-Neto	Processo adaptativo proposto
1º	Elemento quadrático (TETRA10)	
NN	45	124
NE	12	61
GDL	54	337
$\bar{\eta}$	10.50 %	10.58 %
2º	Elemento quadrático (TETRA10)	
NN	313	2046
NE	160	989
GDL	684	5428
$\bar{\eta}$	6.50 %	3.53 %

Como as características iniciais não foram equivalentes, não se pode afirmar em qual caso se obteve a convergência de forma mais rápida. Até porque no primeiro passo a formulação de Cavalcante-Neto apresenta o valor de $\bar{\eta}$ menor, mas no passo seguinte já apresenta o valor de $\bar{\eta}$ maior.

5.2.3. Sólido com uma cavidade cilíndrica

O terceiro exemplo é um sólido com uma cavidade cilíndrica, submetida a uma pressão axial. Este problema também foi analisado por A Merrouche [1], adotando o valor de $\eta^* = 8\%$, considerando para a solução deste problema módulo de elasticidade $E = 1$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. A Figura 57 mostra as características do problema.

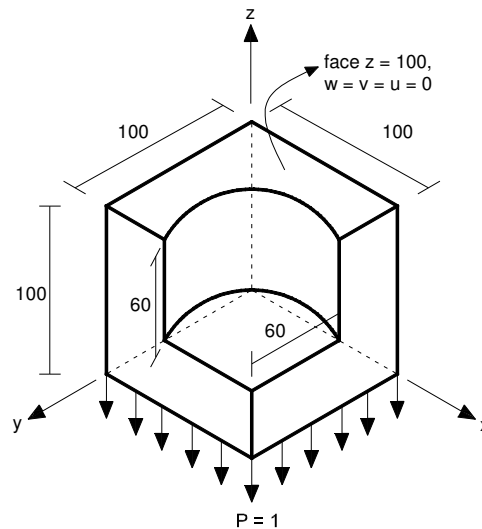


Figura 57 Sólido com cavidade cilíndrica.

Para este exemplo foram necessários dois passos do processo adaptativo. A Merrouche [1] obteve convergência após cinco passos.

A Figura 58 mostra o aspecto das malhas para cada passo do processo adaptativo com os elementos quadráticos (TETRA10) e com as suas características, número de nós (NN), número de elementos (NE) e graus de liberdade (GDL).

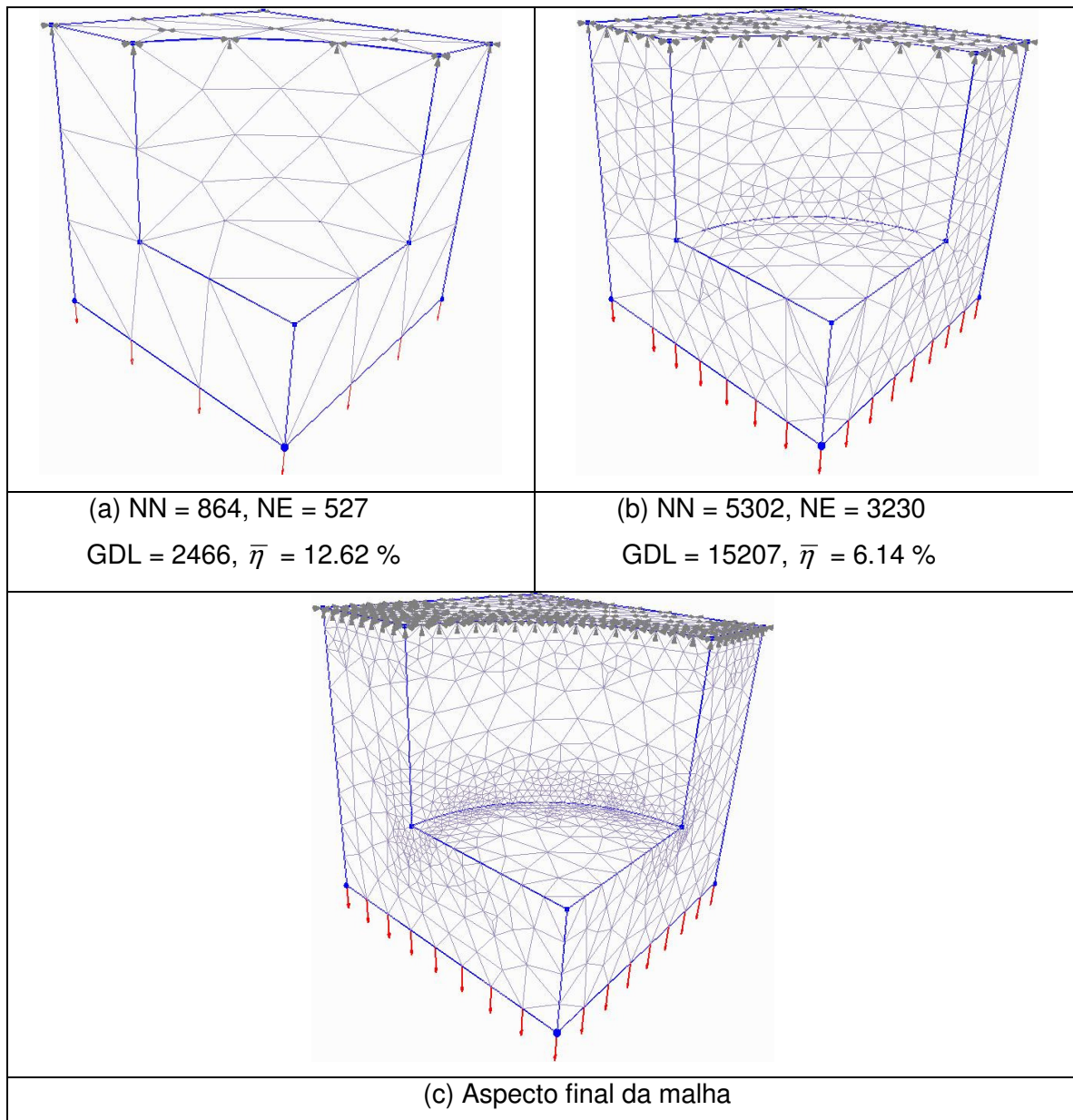


Figura 58 Exemplo 3 com TETRA10: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c).

A Tabela 8 compara os resultados obtidos para o caso quadrático deste trabalho com os de A Merrouche [1].

Tabela 8 Comparação dos resultados do exemplo do sólido com uma cavidade cilíndrica.

	A Merrouche	Processo adaptativo proposto
1º	Elemento quadrático (TETRA10)	
NN	—	864
NE	140	527
GDL	—	2466
$\bar{\eta}$	23.50 %	12.62 %
2º	Elemento quadrático (TETRA10)	
NN	—	5302
NE	—	3230
GDL	—	15207
$\bar{\eta}$	—	6.14 %

No trabalho de A Merrouche [1], só são apresentados os números de elementos e o erros correntes $\bar{\eta}$ correspondentes ao passo inicial e final. Do último passo os valores obtidos foram os seguintes: $NE = 26643$ e $\bar{\eta} = 7.50\%$.

Como as características iniciais não foram equivalentes, não se pode afirmar em qual caso se obteve a convergência de forma mais rápida.

5.2.4. Eixo cilíndrico

O quarto exemplo é um eixo cilíndrico, uniformemente carregado em uma extremidade e preso em outra. Devido a simetria, apenas um quarto do problema foi modelado. Este problema também foi analisado por A Merrouche [1], adotando o valor de $\eta^* = 8\%$, considerando para a solução deste problema módulo de elasticidade $E = 1$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. A Figura 59 mostra as características do problema.

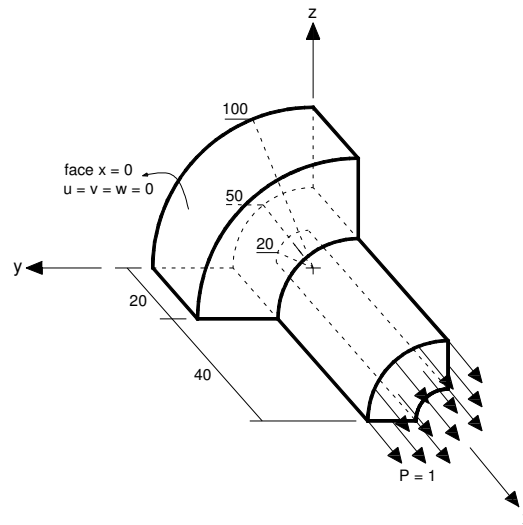


Figura 59 Eixo cilíndrico.

Para este exemplo foi necessário apenas um passo do processo adaptativo. A Merrouche [1] obteve convergência após quatro passos.

A Figura 60 mostra o aspecto das malhas para cada passo do processo adaptativo com os elementos quadráticos (TETRA10) e com as suas características, número de nós (NN), número de elementos (NE) e graus de liberdade (GDL).

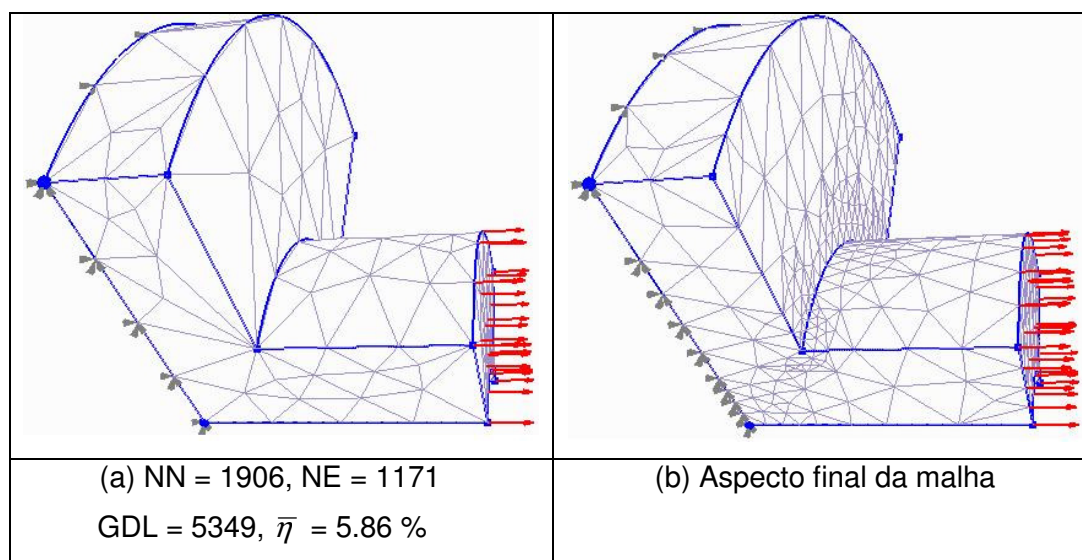


Figura 60 Exemplo 4 com TETRA10: malha inicial (a), malha seguinte (b).

A Tabela 9 compara os resultados obtidos para o caso quadrático deste trabalho com os resultados obtidos por de A Merrouche [1].

Tabela 9 Comparação dos resultados do exemplo do eixo cilíndrico.

	A Merrouche	Processo adaptativo proposto
1º	Elemento quadrático (TETRA10)	
NN	—	1906
NE	184	1171
GDL	—	5349
$\bar{\eta}$	21.50 %	5.86 %

No trabalho de A Merrouche [1], só são apresentados os números de elementos e o erros correntes $\bar{\eta}$ correspondentes ao passo inicial e final. Do último passo os valores obtidos foram os seguintes: $NE = 32985$ e $\bar{\eta} = 7.00\%$.

Como as características iniciais não foram equivalentes, não se pode afirmar em qual caso se obteve a convergência de forma mais rápida.

5.2.5. Pórtico misto 3D

O quinto exemplo é um pórtico misto, composto por três barras, sendo cada barra composta de um material diferente. O pórtico é uniformemente carregado em uma extremidade e preso em outra. Como o exemplo tem apenas a finalidade de mostrar a aplicabilidade do processo adaptativo para problemas com multiregiões, adotaram-se propriedades hipotéticas para os materiais. Sendo assim, atribui-se os seguintes valores para os módulos de elasticidade: $E_1 = 1$, $E_2 = 2$ e $E_3 = 3$ e os seguintes valores para os coeficientes de Poisson $\nu_1 = 0.2$, $\nu_2 = 0.3$ e $\nu_3 = 0.4$. As dimensões, as condições de contorno e atributos do problema são mostrados na Figura 61. Adotou-se o valor de $\eta^* = 5\%$.

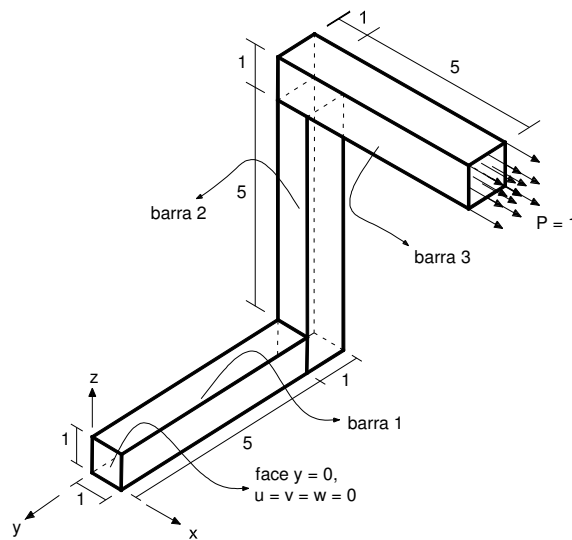


Figura 61 Pórtico misto 3D.

Para este exemplo foram necessários três passos do processo adaptativo.

A Figura 62 mostra o aspecto das malhas para cada passo do processo adaptativo com os elementos quadráticos (TETRA10) e com as suas características, número de nós (NN), número de elementos (NE) e graus de liberdade (GDL).

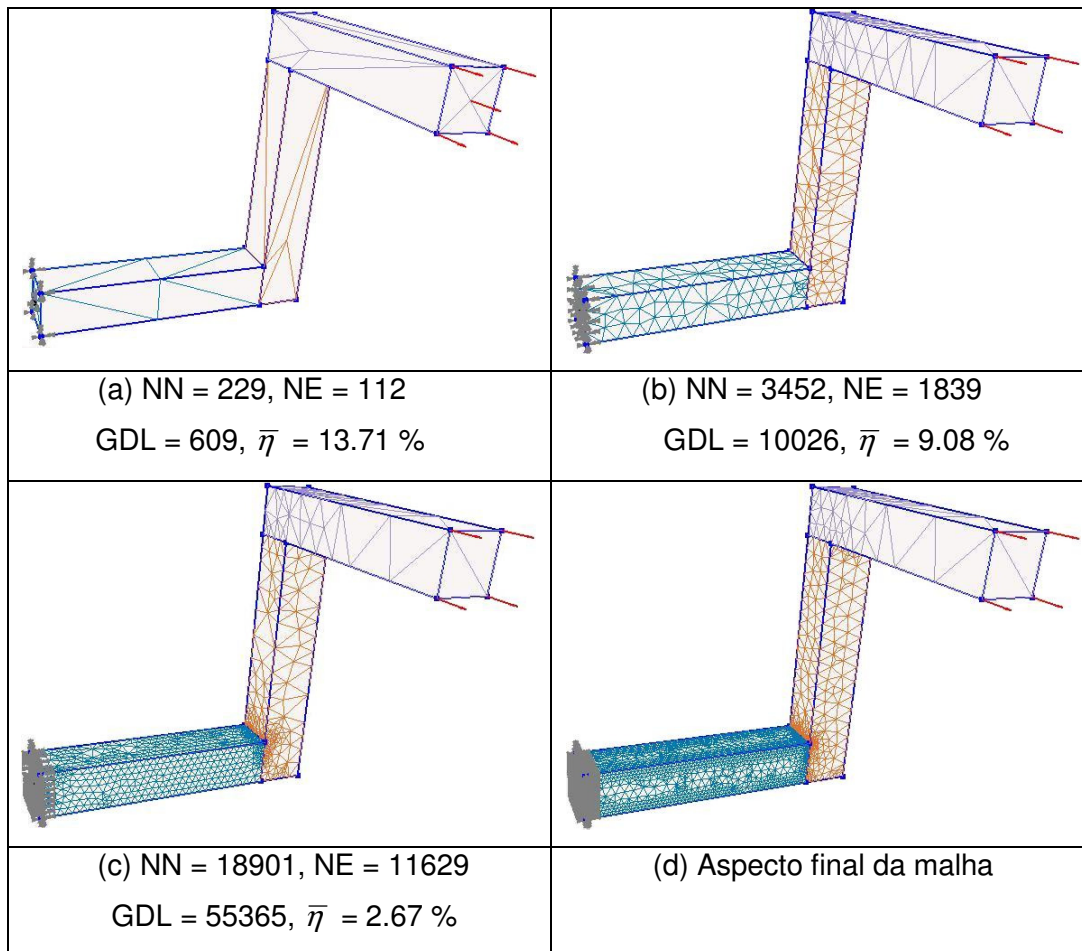


Figura 62 Exemplo 5 com TETRA10: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d).

É possível observar na Figura 62 um gradativo refinamento nas regiões onde ocorrem elevadas variações de tensões, como por exemplo a barra 1 que está submetida à flexão, cisalhamento e torção é bem mais refinada que as outras. A barra 2 que está submetida à flexão e cisalhamento é pouco menos refinada que a barra 1 e a barra 3 que está submetida apenas a tração foi a menos refinada durante o processo adaptativo.

A Tabela 10 mostra os resultados obtidos em cada passo do processo adaptativo.

Tabela 10 Mostra os resultados obtidos para o exemplo do pórtico misto.

	Processo adaptativo proposto
1º	Elemento quadrático (TETRA10)
NN	229
NE	112
GDL	609
$\bar{\eta}$	13.71 %
2º	Elemento quadrático (TETRA10)
NN	3452
NE	1839
GDL	10026
$\bar{\eta}$	9.08 %
3º	Elemento quadrático (TETRA10)
NN	18901
NE	11629
GDL	55365
$\bar{\eta}$	2.67 %