

# 1 INTRODUÇÃO

Dentre os diversos ramos de estudo da Engenharia Civil, encontra-se a análise estrutural, que consiste, descrevendo-se de forma resumida, em analisar as tensões e deformações presentes em um corpo qualquer, quando o mesmo está submetido a ações externas, tais como carregamentos ou deslocamentos impostos. Para tanto, é necessário conhecer as propriedades mecânicas dos materiais da estrutura, tais como seu modelo constitutivo, que define, por exemplo, se o seu comportamento é linear-elástico ou não-linear e plástico, ou se é homogêneo ou heterogêneo. Outro item a ser considerado são as características de atuação das ações externas, que podem ser estáticas ou dinâmicas. De uma forma resumida, o problema matemático da análise estrutural consiste em resolver equações diferenciais de equilíbrio (estático ou dinâmico) e compatibilidade e relações constitutivas em um determinado domínio, com condições de contorno em termos de deslocamentos e forças que podem variar ao longo do tempo.

Na maioria dos casos práticos, não se consegue resolver esse problema matemático analiticamente, quer seja pela complexidade geométrica da estrutura, pela complexidade das relações constitutivas, pela complexidade das ações externas, ou pela combinação de todos esses fatores.

Na prática, esse problema é resolvido utilizando-se métodos numéricos, que fornecem uma solução aproximada do problema. Os métodos numéricos mais conhecidos para resolver o problema da análise estrutural são o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno. O mais difundido é o método dos elementos finitos (MEF). Uma razão para isto é a confiabilidade da solução numérica obtida e a relativa simplicidade da implementação computacional do método, possibilitando a elaboração de programas robustos.

Prazeres em 2005 [51] define formalmente o MEF da seguinte forma: “é um método numérico aproximado para solução de problemas em meios contínuos que são descritos através de equações diferenciais, sob determinadas condições de contorno e condições iniciais. Como o método utiliza pontos do domínio, é classificado como um método de domínio. Porém, falar de elementos

finitos é falar de uma forma bastante genérica, já que existem vários métodos de elementos finitos<sup>\*</sup>, dentre os quais, o método da rigidez direta ou método dos deslocamentos é o mais difundido”.

A idéia principal do MEF é subdividir o domínio em pequenas regiões (elementos) com uma topologia pré-definida (triângulos, quadriláteros, tetraedros, etc), onde o comportamento do campo de interesse (tensões ou deslocamentos) pode ser aproximado por funções simples, tais como polinômios ou funções harmônicas. Os valores do campo em questão nos vértices (nós) destes elementos são determinados pela solução numérica, donde através da interpolação destes valores obtêm-se os valores do campo dentro do referido elemento. Este processo de subdividir o domínio é conhecido como discretização do modelo, de tal forma, que o modelo discretizado resultante é denominado de malha de elementos finitos.

Cavalcante-Neto em 1998 [13] destaca outro aspecto importante do MEF, que é a definição do grau de refinamento da malha, “pois pelo fato das funções de aproximação dos campos dentro dos elementos serem relativamente simples é necessário aumentar o grau de refinamento em regiões de gradientes elevados do campo de solução. O problema disto é que o campo da solução é geralmente desconhecido. Práticas normais para resolver este problema, envolvem em aumentar o número de pontos de discretização no domínio computacional e resolver o sistema de equações resultantes para examinar a mudança relativa na solução numérica. Em geral, este procedimento consome tempo, depende da experiência do analista e pode guiar a interpretações erradas se a solução não tiver entrado em uma faixa assintótica de convergência”.

Este trabalho trata da geração de malha de elementos finitos para modelos estruturais bi e tridimensionais de forma automática e adaptativa, isto é, com refinamento da malha de acordo com o gradiente do campo da solução.

Além do problema da geração da malha de elementos finitos, existe o problema da criação do modelo geométrico da estrutura, de sua visualização e da visualização dos resultados numéricos da análise estrutural. Estes problemas são tratados pela Computação Gráfica, que também trata de técnicas de modelagem de sólidos [27]. Diversas fases são importantes na modelagem de sólidos, indo desde a interface com o usuário até as estruturas de dados que serão utilizadas. Portanto, é importante usar programas especiais, chamados de modeladores, que reproduzem, em formato digital, as formas geométricas dos

---

<sup>\*</sup> para mais detalhes ver [51,68]

objetos da simulação [42]. Neste trabalho dois modeladores geométricos foram usados: o *MTOOL* (2D) [47] e o *MG* (3D) [48], ambos desenvolvidos no Tecgraf/PUC-Rio (Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica). Mais detalhes sobre esses modeladores serão vistos no capítulo 4.

Processos adaptativos de análise utilizados em conjunção com ferramentas de modelagem de sólidos têm se tornado muito importantes para aumentar a confiabilidade do procedimento de análise, pois o tornam menos dependente da experiência do analista. Um processo adaptativo é um procedimento para avaliar o erro de discretização do modelo para uma dada solução e para melhorar esta discretização até se atingir uma tolerância de erro fornecida para a solução numérica. Portanto, é fundamental, dentro do contexto adaptativo, definir um método de estimativa do erro de discretização, além de técnicas de geração adaptativas de malhas em 2D e 3D.

De forma a caracterizar bem o problema que esta dissertação aborda, a Figura 1 mostra um modelo geométrico bidimensional de uma estrutura e a Figura 2 mostra uma malha de elementos finitos associada a este modelo.

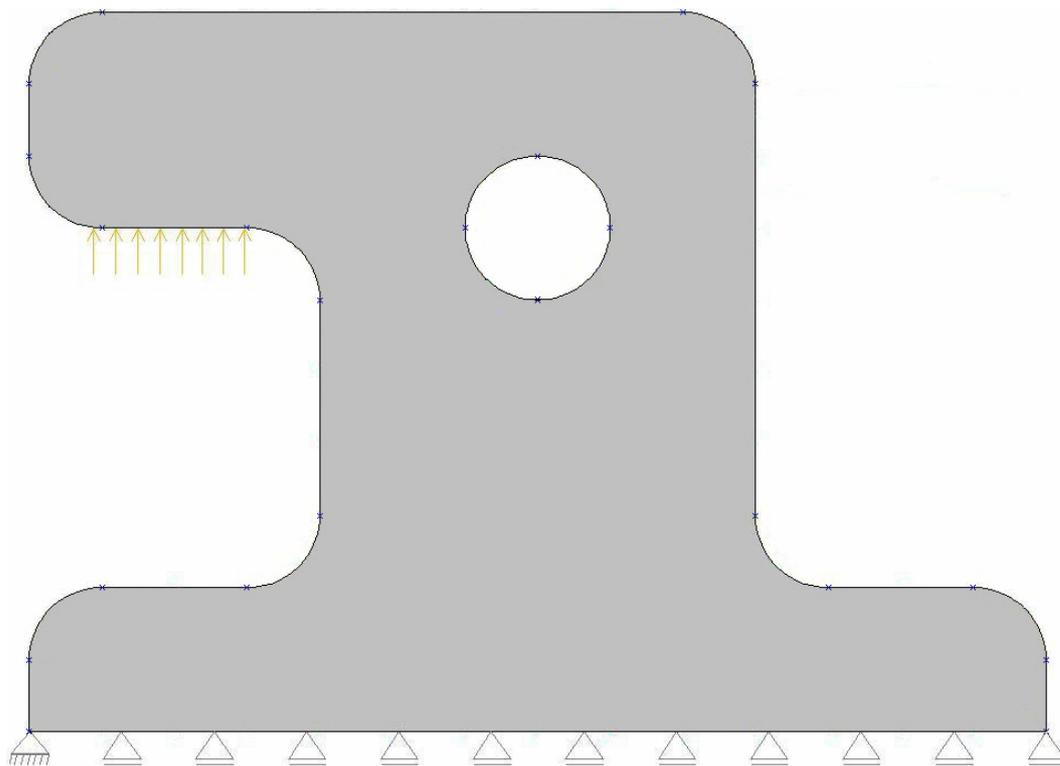


Figura 1 Modelo geométrico bidimensional de uma peça mecânica.

A Figura 1 mostra o modelo geométrico de uma peça mecânica, onde estão destacados segmentos de curvas de bordo e os vértices nas extremidades dos segmentos. As condições de contorno em termos de cargas distribuídas de bordo aplicadas e de restrições de apoio também estão indicadas.

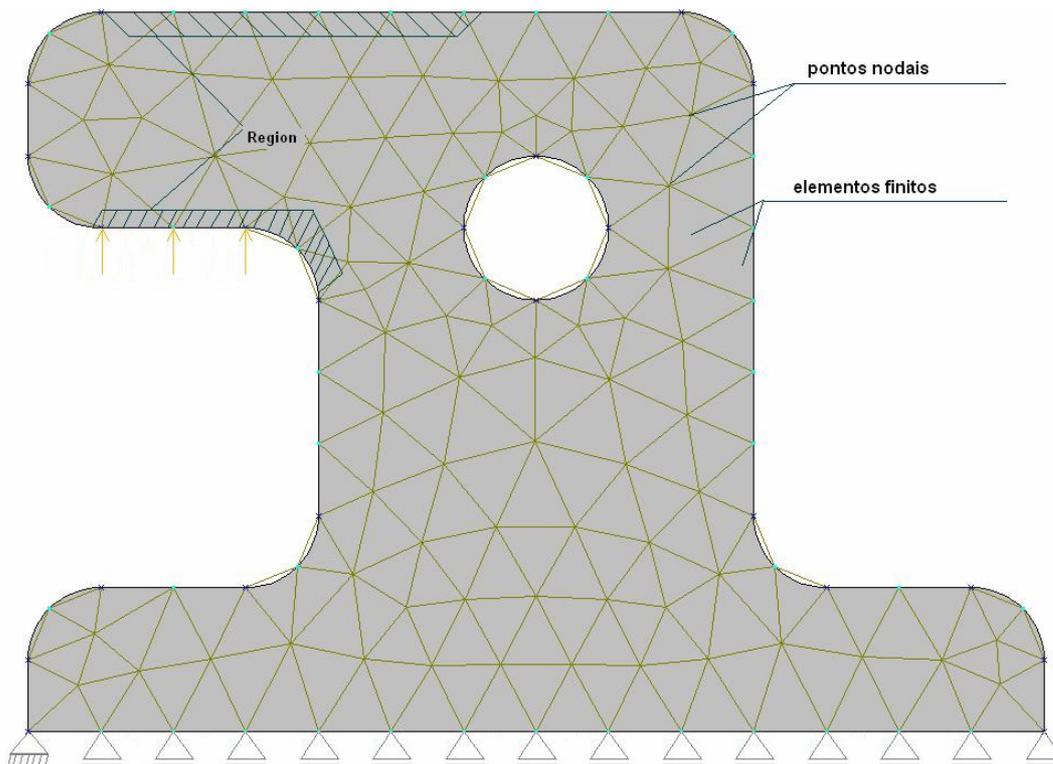


Figura 2 Malha de elementos finitos criada sobre o modelo geométrico.

A Figura 2 mostra a malha de elementos finitos correspondente ao modelo da peça mecânica da Figura 1. Estão destacadas as subdivisões de cada segmento de curva de bordo e a discretização do domínio em elementos finitos. Na malha de elementos finitos as cargas aplicadas e as restrições de apoio são transferidas de forma consistente para os pontos nodais (nós) da malha. As regiões hachuradas (*Region*), são regiões onde ocorrem concentrações de tensões. São estas regiões que devem ser mais refinadas, podendo para isto, diminuir o tamanho dos elementos (estratégia  $h$ ), aumentar o grau da função de interpolação (estratégia  $p$ ), realocar os nós existentes para que os mesmos fiquem mais próximos destas regiões (estratégia  $r$ ), ou usando uma combinação destas técnicas, como por exemplo (estratégia  $h-p$ ), (estratégia  $h-r$ ). Neste trabalho usou-se apenas a estratégia  $h$ . Para fazer isso, seria necessário que o analista tivesse alguma idéia de onde ocorrem às concentrações de tensões do modelo para refiná-lo onde for necessário. É nesse contexto que se mostra a importância do processo adaptativo, pois o analista não precisa ter conhecimento das regiões onde ocorrem às concentrações de tensões. No processo adaptativo, o refinamento (ou “desrefinamento”) das regiões é feito de forma automática em conformidade com a estimativa de erro adotada.

## 1.1. Revisão Bibliográfica

Em 1910 Richardson [52], utilizando diferenças finitas, publicou o primeiro artigo mostrando um procedimento geral para a estimativa de erro.

Na década de 50 com o uso do método dos elementos finitos surgiu um dos primeiros sistemas com aplicação em engenharia, o ICES (Integrate Civil Engineering) desenvolvido no MIT (Massachusetts Institute of Technology). Na década seguinte o surgimento do programa SAP (Structural Analysis Program) influenciou decisivamente no desenvolvimento do método.

No início da década de 60, as malhas usadas nas simulações de problemas de engenharia usando o MEF eram geradas manualmente e no decorrer desta década através do uso de computadores começou-se a simplificar a tarefa de discretizar domínios mais complexos, resultando no surgimento de um campo de pesquisa chamado de geração de malhas.

Apesar dos progressos na área de geração de malhas estarem diretamente relacionados com avanços de outras áreas, como por exemplo: geometria computacional, estruturas de dados, análise numérica, etc., as evoluções feitas nestas outras áreas, que foram significativas, não foi de mesma proporção aos métodos de geração de malhas, o que se tornou um fator limitante nas simulações de problemas no decorrer da década de 80. Tal obstáculo serviu de força motriz para que pesquisadores gastassem uma gama de esforços, embebidos em desenvolver algoritmos capazes de tratar domínios arbitrários. Thompson & Weatherill em 1992 [58] expõem detalhes dos métodos de geração de malhas existentes até o referido ano.

Nos anos 70 Babuska and Rheinboldt [4,5] consideraram resíduos locais para estimar o erro da análise de tal forma que um refinamento poderia ser feito apenas em elementos onde tivessem ocorrido erros grandes.

Em 1971 Brauchli & Oden [10] usaram um procedimento baseado em média e na projeção  $L_2$  para estimar o erro da análise, procedimento que tinha fácil implementação em qualquer código de elementos finitos. Este método foi usado para recuperar os gradientes e bons estimadores de erro foram obtidos. Já em 1987, Zienkiewicz e Zhu [62] introduziram um estimador de erro baseado na obtenção de valores melhorados dos gradientes (tensões) usando alguns processos de recuperação de tensão disponível. Em 1992, Zienkiewicz e Zhu [63-66] fundamentados no trabalho de Brauchli e Oden desenvolveram o *SPR* (*Superconvergent Patch Recovery*), que é um procedimento de suavização de gradientes sobre grupos (*patches*) locais de elementos, onde um procedimento

de mínimos quadrados é aplicado a um campo de gradiente polinomial de ordem mais elevada em relação ao gradiente considerado em pontos de amostragem superconvergentes, obtidos através do cálculo de elementos finitos. Posteriormente, Boroomand e Zienkiewicz [8] apresentaram um novo método superconvergente, que satisfaz as condições de equilíbrio em uma forma fraca mas não requer nenhum conhecimento de pontos superconvergentes (*REP* [13]).

Com base nestas duas formulações, Zienkiewicz, em 2004, [67] divide os estimadores de erro em dois tipos diferentes: os que são fundamentados em resíduos e os que utilizam processo de recuperação dos patches. Objetivando verificar a melhor das duas formulações, Babuska e um grupo de pesquisadores da universidade do Texas (Austin) fizeram exaustivos testes e produziram uma metodologia geral. Zienkiewicz [67] nomeia este método como *Babuska patch test*. Babuska propôs um valor para cada estimador de erro com um índice de robustez e depois muitos outros testes concluíram que o índice de robustez foi definitivamente ótimo para os métodos de recuperação mostrando a superioridade destes em relação à formulação baseada em resíduos. Neste mesmo artigo, Zienkiewicz comenta que apesar dos estimadores de erros existentes fornecerem excelentes resultados eles são uma fonte de pesquisa ilimitada.

A energia de deformação foi um dos primeiros acréscimos ao processo de recuperação, o qual foi proposto por Fraeijns de Veubeke [20-22]. Neste trabalho mostra-se que o procedimento padrão (deslocamento) resultaria em uma energia de deformação menor que a verdadeira energia contida na estrutura, ou seja, o cálculo da energia de deformação pelos processos de recuperação sempre subestimam o valor real da energia de deformação. Conseqüentemente muitos testes baseados na energia complementar foram usados como tentativa de melhorar a obtenção da energia de deformação, porém este processo resultou em muitas dificuldades. Zienkiewicz chegou até a sugerir alguns aperfeiçoamentos, mas a metodologia não forneceu uma boa forma prática para fornecer a energia de deformação de uma análise estrutural.

Cavalcante-Neto [12] propôs um sistema integrado para análise de elementos finitos em 2D. Sistema que foi dividido em um pré-processador, para a geração das malhas, um módulo de análise e um pós-processador, para a visualização dos resultados. Neste trabalho o estimador de erro utilizado foi o de recuperação e a suavização das tensões foi feita através do projetor de Hinton e Campbell [26] e utilizando como técnicas para a geração de malha a decomposição espacial recursiva *quadtree* numa parte do domínio, *binary-tree*

no contorno do modelo e entre o domínio e o contorno usa-se a contração de contorno segundo o critério de Delaunay.

Lo em 1991 [40] apresentou um algoritmo para a discretização em triângulos de domínios planares arbitrários, gerando malhas de elementos finitos baseadas na técnica de triangulação de Delaunay e com o gerador de malhas desenvolvido pelo próprio Lo. A técnica utilizada na geração de malha e o gerador de malhas usados neste trabalho podem ser vistos com maiores detalhes em outros dois trabalhos do mesmo autor [38,39].

Beall & Shephard em 1996 [7] propuseram uma estrutura de dados baseada em uma hierarquia topológica, fornecendo desta forma uma estrutura de dados robusta para ser utilizada no processo adaptativo.

Sydenstricker *et al* em 2004 [57] apresentaram uma estimativa de erro *a-posteriori* de tensão para problemas com materiais heterogêneos com variações súbitas das propriedades elásticas.

Souza [56] fundamentado no trabalho de Meyer *et al* [46] propôs uma técnica de adaptatividade de geração de malha fundamentada apenas em critérios geométricos. Outro trabalho voltado para a qualidade da malha sem considerar a análise numérica de elementos finitos, mas que usa como estimador de erro a projeção  $L2$  é o de Grosso *et al* [25]. Outros trabalhos que fazem refinamento de malha considerando apenas a adaptatividade geométrica são os três artigos de Schreiner *et al* [53-55], propondo uma técnica de remalhamento de superfície e uma nova técnica de avanço de fronteira. O trabalho de Peixoto *et al* [49], onde é proposto um método de extração de malhas adaptativas e o trabalho de Kim *et al* [30] mostraram uma técnica de refinamento adaptativo em elementos finitos com enfoque para fluidos. Dentro do contexto de geração de malha, baseado apenas na adaptatividade geométrica, é importante ressaltar que o método clássico para extração de malhas a partir de volumes é o *Marching Cubes*<sup>\*</sup>.

Em 2001 Mackerle [41] divulgou uma exaustiva coleta de artigos publicados sobre estimativa de erro e adaptatividade em elementos finitos, desde 1990 até 2000. Neste trabalho Mackerle apenas comenta os tipos de estimadores de erro e os processos adaptativos já existentes, bem como as suas várias aplicações, fornecendo posteriormente uma vasta lista de artigos relacionados a cada tópico abordado.

---

<sup>\*</sup> <http://www.exaflop.org/docs/marchcubes>

O processo adaptativo em 2D já está bem estabelecido no meio científico, o que não ocorre para o caso 3D, fato também observado por A Merrouche *et al* [ 1 ], onde a parte relacionada à modelagem geométrica e geração de malha é muito mais complicada. Portanto, dos trabalhos pesquisados percebeu-se uma preocupação em desenvolver técnicas de geração de malhas mais eficientes e técnicas de otimização aplicadas ao processo de estimativa de erro. Abaixo, segue um pequeno resumo dos trabalhos que tratam exclusivamente sobre geração de malhas e adaptatividade 3D.

Frey *et al* em 1994 [23] apresentaram um algoritmo de geração de malha 3D adaptado para geometrias complexas.

Lee & Lo em 1997 [31] apresentaram um procedimento automático para o refinamento adaptativo em 3D. Neste trabalho os autores objetivaram eliminar alguns problemas observados no processo de suavização Superconvergent patch recovery (*SPR*), possibilitando obter campos de tensões suavizados mais “confiáveis” para problemas de elasticidade 3D.

Golias & Dutton em 1997 [24] apresentaram um método para a geração de tetraedros, baseado na triangulação de Delaunay. O método consiste em um procedimento de divisão de tetraedros e num método de otimização de malhas de tetraedros, fundamentado em uma organização topológica, usando a triangulação de Delaunay para gerar os tetraedros.

Lee & Lo em 1999 [32] usaram técnicas de otimização para obter melhorias no esforço computacional do processo de refinamento adaptativo de malhas de elementos finitos.

Cavalcante-Neto [13] estendeu seu trabalho anterior de 2D para 3D, migrando da linguagem de programação C para a C++, a qual é fundamentada na técnica de Programação Orientada a Objetos. Neste trabalho os métodos de suavização usados foram o *SPR* [63-66] e o *REP* [13].

Lee *et al* em 2000 [33] propuseram um algoritmo de refinamento de malha de elementos finitos 3D onde é possível converter malhas com elementos lineares em malhas com elementos quadráticos ou cúbicos. Foram testados os aumentos na ordem dos seguintes tipos de elementos finitos: tetraedro, pirâmide, hexaedro e prisma.

Lee em 2002 [34] propôs um novo algoritmo de geração de malha para gerar malhas em superfícies 3D, que é fundamentado em um novo modelo geométrico.

Aymone em 2003 [3] apresentou aspectos referentes às formulações Euleriana (descrição espacial) e Lagrangiana (descrição material) em algoritmos de geração de malhas em 3D.

Choi *et al* em 2004 [18] apresentaram um algoritmo para geração de malhas tetraédricas com refinamento local, fundamentado na técnica de avanço de fronteira, juntamente com uma técnica de otimização, fornecendo desta forma melhorias locais nas malhas (onde houver concentrações de tensões).

Lee & Xu em 2005 [35] apresentaram um novo algoritmo de geração de malha 3D para estruturas de paredes finas, este algoritmo é dividido em duas partes: na primeira fase gera-se uma malha de superfície no meio da estrutura de parede fina, posteriormente se usa esta malha para gerar a malha sólida 3D através de extrusão.

Hughes *et al* em 2005 [28] introduziram um novo tipo de análise, chamado por eles de análise *Isogeometric*, que é baseada em NURBS. A principal característica deste novo tipo de análise é a representação exata dos elementos por NURBS e o uso do conceito isoparamétrico para definir variáveis, como por exemplo: deslocamento, temperatura, etc.

Zuo *et al* em 2005 [68] apresentaram um método para eliminar dificuldades associadas ao remalhamento de malhas 3D em domínios de qualquer forma geométrica com ou sem descontinuidade geométrica. O novo algoritmo gera malhas de tetraedros em modelos com ou sem trincas.

Boussetta *et al* em 2006 [9] apresentaram um processo adaptativo para malhas de elementos finitos. Este processo não refaz a malha, mas sim combina um melhoramento local das arestas e nós vizinhos dos elementos que possuem um alto erro. Este processo também é válido para problemas com grande deformação. Os autores usaram o *SPR* [63-66] como método de suavização. Eles estabeleceram um limite máximo de elementos, alegando uma maior robustez do método proposto.

Acharjee & Zabarar em 2006 [2] apresentaram uma extensão do método de sensibilidade contínua (CSM) para 3D, esta extensão desenvolve equações de sensibilidade a partir de diferenciações das equações que governam o problema.

## 1.2. Objetivos

O enfoque deste trabalho é o de propor um novo processo adaptativo, fundamentado no refinamento independente das curvas, superfícies e sólidos. Além disto, o trabalho visa implementar as técnicas de geração de malha em 2D e 3D desenvolvidas inicialmente pelos trabalhos de Cavalcante-Neto [12,13], utilizando estimadores de erro baseados no processo de recuperação dos *patches* com uma nova metodologia na geração de malhas adaptativas de elementos finitos 2D e 3D com modeladores geométricos com multi-regiões e superfícies paramétricas, usando técnicas de decomposição espacial recursiva: *binary-tree* (1D), *quadtree* (2D) e *octree* (3D) juntamente com avanço de fronteira. Dentro do contexto de adaptatividade esse trabalho permite que o processo adaptativo ocorra respeitando a geometria do modelo de tal forma que que curvas e superfícies do modelo numérico sejam mais próximas das curvas e superfícies do modelo real.

Como objetivos específicos, citam-se:

- Geração adaptativa de malha em 2D, usando uma *quadtree* global.
- Geração adaptativa de malhas em 2D respeitando a geometria.
- Geração adaptativa de malha em 3D, usando uma *octree* global.
- Geração adaptativa de malhas em 3D respeitando a geometria.
- Conseguir refinar localmente regiões da malha que apresentem erros elevados ou que apresentem elementos de má qualidade de forma.
- Conseguir “desrefinar” localmente regiões da malha que não apresentem erros elevados ou também que não apresentem elementos de má qualidade de forma.

### 1.3. Organização do Texto

O capítulo 2 destina-se a apresentar a teoria utilizada em todo o processo adaptativo, desta forma ele está dividido em quatro seções: a primeira abordará as estratégias adaptativas, a segunda abordará a técnica de estimativa de erro utilizada, a terceira tratará das técnicas de suavização e a última mostrará as principais técnicas de geração de malhas.

No capítulo 3 se detalha o processo adaptativo utilizado neste trabalho, mostrando a técnica de geração de malha, a estratégia adaptativa, os critérios da adaptatividade geométrica, a construção da *octree* / *quadtree* global.

O capítulo 4 destina-se a apresentar as implementações feitas para a realização do trabalho, ou seja, mostra a parte interativa com o usuário do programa, assim como a parte da implementação referente à adaptatividade, usando o *MTOOL* [47] para 2D e o *MG* [48] para o caso 3D. Os detalhes referentes a todo processo de modelagem também são apresentados neste capítulo.

O capítulo 5 apresenta alguns exemplos padronizados na literatura técnica, objetivando desta forma validar a proposta apresentada pelo respectivo trabalho.

O capítulo 6 apresenta, por fim, as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.