



Rafael Araujo de Sousa

**Adaptatividade geométrica e numérica na geração
de malhas de elementos finitos em 2D e 3D**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre pelo Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-
Rio. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Luiz Fernando Campos Ramos Martha
Co-orientador: Antônio Carlos de Oliveira Miranda

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2007.



Rafael Araujo de sousa

**Adaptatividade geométrica e numérica na geração
de malhas de elementos finitos em 2D e 3D**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Luiz Fernando C. R. Martha

Presidente/Orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Carlos Alberto de Almeida

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

Prof. Marcelo de Andrade Dreux

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

Prof. Remo Magalhães de Souza

Departamento de Engenharia Civil - UFPA

Prof. William Wagner Matos Lira

Departamento de Engenharia Civil - UFAL

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial

do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 14 de Fevereiro de 2007.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Rafael Araujo de Sousa

Graduou-se em Engenharia Civil, pela Universidade Federal do Pará, em fevereiro de 2005. Durante a graduação atuou na área de estruturas na análise de vibrações em cabos considerando a rigidez à flexão, a rigidez ao cisalhamento e a inércia à rotação.

Ficha Catalográfica

De Sousa, Rafael Araujo

Adaptatividade geométrica e numérica na geração de
malhas de elementos finitos
em 2D e 3D

Geração de malhas adaptativas de elementos finitos/
Rafael Araujo de Sousa; orientador: Luiz Fernando C. R.
Martha ; co-orientador: Antônio Carlos de Oliveira
Miranda. – 2007.

138 f.:il.; 29,7cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia civil)–
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de
Janeiro, 2007.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia civil – Teses. 2. Elementos finitos. 3.
Análise adaptativa. 4. Geração de malha. 5.
Adaptatividade geométrica. I. Martha, Luiz Fernando
Campos Ramos. II. Miranda, Antônio Carlos de Oliveira.
III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

Aos meus pais, Stélio e Maria do Carmo;
Meu irmão, Allan Araujo de Sousa;
Minha avó, Paula Costa Ferreira Araujo.

Agradecimentos

Aos meus pais, Stélio Augusto Amorim de Sousa e Maria do Carmo Araujo de Sousa e a Deus, que me permitiram ingressar na universidade, um centro de conhecimento de valor imensurável, ao qual, infelizmente, poucos de nós em nosso país têm acesso.

A meu irmão Allan Araujo de Sousa; a minha avó, Paula Costa Ferreira Araujo e a todos meus tios e primos.

À Vanessa Ferreira, que esteve por muito tempo muito presente na minha vida e que até hoje tem influência sobre minhas decisões.

A todos os professores do departamento de engenharia civil da PUC-RIO, principalmente ao professor Luiz Fernando C. R. Martha pela orientação e pela oportunidade de trabalhar em um ambiente agradabilíssimo e em um tema tão interessante.

Ao Tecgraf pelo apoio financeiro e a todos meus amigos de lá: Joaquim Bento, William Lira, que sempre esteve disposto a me ajudar em todos instantes que o solicitei, Isabelle Telles *"paraense pai d'égua"*, Fábio Pereira *"companheiro do café da AFPUC"* e que também sempre se demonstrou pronto para me ajudar, ao Luiz Fernando Bitton, pelo incentivo em ingressar no Tecgraf e pela confiança depositada em mim, ao grande Antônio Miranda *"Caaaaramba"* pela grande ajuda e orientação no decorrer da dissertação e ao Marcos Arruda, que também me ajudou bastante e pela sua enorme paciência nas explicações e auxílios durante a implementação deste trabalho.

A todos meus colegas da pós graduação da PUC, especialmente a Amanda Jarek, Antônio Vicente *"Combatente"*, André Guedes *"Dedé Bambu"* e principalmente ao pessoal do Norte do Brasil (Pará e Amapá): Ygor Netto *"tio Chico"*, Renato Mendes *"Bolo"*, Plínio, Klessis, Jean *"Dado"* que me acompanha desde a graduação e ao grande Adenilson *"Mão toca"* parceiro do samba, dos bailes Funks, das disciplinas do mestrado e do esporte.

A todos os professores de engenharia civil da UFPa, em especial aos professores: José Perilo da Rosa Neto, José Raimundo Serra Pacha e principalmente ao Remo Magalhães de Souza, um grande professor, orientador e amigo, a quem tenho um grande sentimento de admiração, respeito e amizade. Ao Tiago Rodrigues da Silva, amigo do período da graduação.

A minha afilhada Arielle Bezerra Pinheiro, minha comadre Andréia Bezerra e ao meu grande amigo, compadre e xará Rafael Ferreira Pinheiro "*Cachacinha*" companheiro dos sambas e cervejas.

A todas outras amizades consolidadas durante minha vida: Fábio Luíz "*Chuck*" e toda a sua família, Bruno Flexa "*Tabajara*", Bruna Cristina "*preta Bru*", Francisco Rocha "*Bulldogru*", Igor Nunes "*Malaco*", Evandro Leomar "*Mano Brown*" e seu irmão Damião "*Jimmy*", etc.

A todos os poetas e compositores do samba, que sempre estiveram presentes durante toda esta estadia no Rio de Janeiro, tanto nos momentos de estudo quanto nos de lazer.

A CAPES, ao TECGRAF e a PUC-RIO por terem me dado a oportunidade de vir cursar a pós-graduação com as condições necessárias e suficientes para a sua conclusão.

Resumo

De sousa, Rafael Araujo.; Martha, Luiz Fernando C. R.

Adaptatividade geométrica e numérica na geração de malhas de elementos finitos em 2D e 3D. Rio de Janeiro, 2007. 138p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho apresenta uma metodologia para geração de malhas adaptativas de elementos finitos 2D e 3D usando modeladores geométricos com multi-regiões e superfícies paramétricas. A estratégia adaptativa adotada é fundamentada no refinamento independente das curvas, superfícies e sólidos. Inicialmente as curvas são refinadas, no seu espaço paramétrico, usando uma técnica de partição binária da curva (*binary-tree*). A discretização das curvas é usada como dado de entrada para o refinamento das superfícies. A discretização destas é realizada no seu espaço paramétrico e utiliza uma técnica de avanço de fronteira combinada com uma estrutura de dados do tipo *quadtree* para gerar uma malha não estruturada de superfície. Essas malhas de superfícies são usadas como dado de entrada para o refinamento dos domínios volumétricos. A discretização volumétrica combina uma estrutura de dados do tipo *octree* juntamente com a técnica de avanço de fronteira para gerar uma malha sólida não estruturada de elementos tetraédricos. As estruturas de dados auxiliares dos tipos *binary-tree*, *quadtree* e *octree* são utilizadas para armazenar os tamanhos característicos dos elementos gerados no refinamento das curvas, superfícies e regiões volumétricas. Estes tamanhos característicos são definidos pela estimativa de erro numérico associado à malha global do passo anterior do processo adaptativo. A estratégia adaptativa é implementada em dois modeladores: o *MTOOL* (2D) e o *MG* (3D), que são responsáveis pela criação de um modelo geométrico, podendo ter, multi-regiões, onde no caso 3D as curvas e superfícies são representadas por NURBS.

Palavras-chave

Elementos finitos; análise adaptativa; geração de malha; adaptatividade geométrica.

Abstract

De sousa, Rafael Araujo.; Martha, Luiz Fernando C. R.

Geometric and numerical adaptativity of 2D and 3D finite element meshes. Rio de Janeiro, 2007. 138p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work presents a methodology for adaptive generation of 2D and 3D finite-element meshes using geometric modeling with multi-regions and parametric surfaces. The adaptive strategy adopted in this methodology is based on independent refinements of curves, surfaces and solids. Initially, the model's curves are refined using a binary-partition algorithm in parametric space. The discretization of these curves is used as input for the refinement of adjacent surfaces. Surface discretization is also performed in parametric space and employs a *quadtrees*-based refinement coupled to an advancing-front technique for the generation of an unstructured triangulation. These surface meshes are used as input for the refinement adjacent volumetric domains. Volume discretization combines an *octree* refinement with an advancing-front technique to generate an unstructural mesh of tetrahedral elements. In all stages of the adaptive strategy, the refinement of curves, surface meshes and solid meshes is based on estimated numerical errors associated to the mesh of the previous step in the adaptive process. In addition, curve and surface refinement takes into account metric distortions between parametric and Cartesian spaces and high curvatures of the model's geometric entities. The adaptive strategies are implemented in two different modelers: *MTOOL* (2D) and *MG* (3D), which are responsible for the creation of a geometric model with multi-regions, where for case 3D the curves and surfaces are represented by NURBS, and for the interactive and automatic finite-element mesh generation associated to surfaces and solid regions. Numerical examples of the simulation of engineering problems are presented in order to validate the methodology proposed in this work.

Keywords

Finite elements; adaptive analysis; mesh generation; geometric adaptivity.

Sumário

1. Introdução	18
1.1. Revisão bibliográfica	22
1.2. Objetivos	27
1.3. Organização do texto	28
2. Base Teórica	29
2.1. Estratégia adaptativa	29
2.2. Estimativa de erro	30
2.3. Métodos de suavização	35
2.3.1. Zienkiewicz e Zhu – Hinton e Campbell (Z2-HC)	36
2.3.2. Superconvergent patch recovery (SPR)	37
2.4. Geração de malhas	39
2.4.1. Geração de malhas não-estruturadas	41
2.4.1.1. Triangulação de Delaunay	42
2.4.1.2. Decomposição espacial recursiva	43
2.4.1.3. Avanço de fronteira	44
3. Processo adaptativo	46
3.1. Resumo do processo adaptativo	46
3.2. Construção da <i>octree</i> / <i>quadtree</i> global baseada no erro numérico	49
3.3. Refinamento da <i>octree</i> / <i>quadtree</i> global baseado na adaptatividade geométrica das curvas	50
3.4. Refinamento da <i>octree</i> global baseado na adaptatividade geométrica das superfícies	54
3.5. Refinamento da <i>octree</i> / <i>quadtree</i> global para forçar disparidade de tamanho mínima	57
3.6. Refinamento das curvas	58
3.7. Discretização das superfícies	61
3.8. Algoritmo de geração de malhas volumétricas	62
3.9. Localização do tamanho característico H para os novos elementos	64
3.10. Considerações finais	66

4. Implementações do processo adaptativo	67
4.1. <i>MTOOL</i> (2D)	69
4.1.1. Adaptatividade no <i>MTOOL</i>	72
4.2. <i>MG</i> (3D)	77
4.2.1. Adaptatividade no <i>MG</i>	78
5. Exemplos	84
5.1. Exemplos em 2D (<i>MTOOL</i>)	85
5.1.1. Peça mecânica com um furo circular	86
5.1.2. Placa quadrada com furo quadrado	92
5.1.3. Viga curta em balanço	96
5.1.4. Placa com furo quadrado com dois materiais	102
5.1.5. Placa complexa com três furos circulares e um quadrado	107
5.1.6. Barragem	111
5.2. Exemplos em 3D (<i>MG</i>)	114
5.2.1. Viga curta em balanço	115
5.2.2. Placa com furo circular	118
5.2.3. Sólido com uma cavidade cilíndrica	121
5.2.4. Eixo cilíndrico	124
5.2.5. Pórtico misto	126
6. Conclusão	129
6.1. Vantagens do método	131
6.2. Desvantagens do método	132
6.3. Sugestões para trabalhos futuros	132
7. Referências bibliográficas	133

Lista de figuras

Figura 1 - Modelo geométrico bidimensional de uma peça mecânica	20
Figura 2 - Malha de elementos finitos criada sobre o modelo geométrico	21
Figura 3 - (a) malha original, (b) malha após o uso da estratégia do tipo h, (c) malha após o uso da estratégia do tipo p, (d) malha após o uso da estratégia do tipo r	30
Figura 4 - (a) mostra a contribuição de cada elemento, quadrilateral, para o valor de tensão, não suavizada, no nó adjacente aos mesmos, (b) mostra o valor da tensão suavizada no nó adjacente aos elementos quadrilaterais (Hinton&Campbell-[26])	37
Figura 5 - Notação da recuperação por patch: \odot nó que forma o patch; Δ pontos de amostragem; \bullet valores nodais determinados pelo procedimento de recuperação; \circ pontos nodais; r_i distância entre o ponto de amostragem i e o nó que forma o patch; Ω denota o domínio do problema e Ω_p indica o domínio do patch (Cavalcante-Neto J.B.-1998 [13])	38
Figura 6 - Tipos de malha (Batista V.H.F.-2005 [6])	40
Figura 7 - Malha de elementos finitos gerada por triangulação de Delaunay (Batista [6])	42
Figura 8 - Exemplo de geração de uma malha 2D de elementos finitos usando uma quadtree (Batista [6])	43
Figura 9 - Estrutura quadtree em forma de diagrama	44
Figura 10 - Exemplo de geração de uma malha 2D de elementos finitos usando avanço de fronteira (Batista V.H.F.-2005 [6])	45
Figura 11 - Fluxograma do novo processo adaptativo (2D e 3D)	47
Figura 12 - Curva a ser subdividida segundo os critérios geométricos	51
Figura 13 - (a) Ponto P0 é inserido (b) Inseri-se uma nova subdivisão, fazendo-se $P1 = P_m$ e P_m sendo a metade do novo trecho	52

Figura 14 - (a) Tubo com pressão interna, (b) Malha grosseira do modelo do tubo, (c) resultado do 1º passo do processo adaptativo usando apenas critérios baseados na estimativa de erro e (d) resultado do 1º passo do processo adaptativo usando os critérios de estimativa de erro e os critérios geométricos	53
Figura 15 - Processo de geração de malhas superficiais paramétricas em 3D (Lira [37])	54
Figura 16 - Superfície com as suas curvas de bordo considerando os parâmetros da adaptatividade geométrica das curvas	56
Figura 17 - Exemplo de uma malha em uma superfície 3D: (a) sem considerar informações sobre curvaturas; (b) quadtree auxiliar construída para realizar a adaptatividade geométrica da superfície da figura (c) e (c) malha da superfície após se considerar as suas curvaturas (Lira [37])	57
Figura 18 - (a) quadtree inicial sem refinamento que força a diferença mínima entre as células da octree / quadtree, (b) quadtree final com refinamento adicional que força a diferença mínima entre as células da octree / quadtree	58
Figura 19 - Refinamento de uma curva reta pela técnica de Decomposição Espacial Recursiva binária (binary-tree)	59
Figura 20 - (a) malha inicial com todas as curvas do tipo arco de círculo com dez subdivisões, (b) malha final com suas curvas com o número de subdivisão menor que dez	60
Figura 21 - Problema de refinamento em cantos quando o valor de h de cada elemento é associado ao seu centro geométrico	64
Figura 22 - Compara as malhas, referentes ao mesmo passo do processo adaptativo, com o valor de h de cada elemento associado ao seu centro geométrico (a) e com o valor de h associado aos vértices de cada elemento (b)	65
Figura 23 - Fluxograma mostrando o funcionamento do <i>MTOOL</i>	70
Figura 24 - Pseudo código da função <i>_MtoolAdaptiveQt</i>	73
Figura 25 - Pseudo-código da função que preenche o valor de h para elementos do tipo T3	75
Figura 26 - Pseudo-código da função que constrói a quadtree considerando ou não a adaptatividade baseada no erro numérico e na adaptatividade geométrica	76

Figura 27 - Pseudo código da função <i>_MtoolAdaptiveMesh</i>	76
Figura 28 - Pseudo código no <i>MG</i> que gerencia a gravação e leitura dos arquivos neutros	80
Figura 29 - Pseudo código no <i>MG</i> que mostra o método <i>mgRegenMeshes</i>	81
Figura 30 - Pseudo código no <i>MG</i> que mostra o método <i>mgAdapt_CreateMesh</i> , que é o método que gerencia todo o processo adaptativo	83
Figura 31 - Peça mecânica com um furo circular	86
Figura 32 - Comparação entre os métodos de suavização <i>Z2-HC</i> e <i>SPR</i> , utilizando-se elementos lineares (T3) usando apenas a adaptatividade numérica: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d)	88
Figura 33 - Exemplo 1 com T3 usando a adaptatividade geométrica e numérica: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d)	89
Figura 34 - Exemplo 1 com T3 e usando apenas a adaptatividade geométrica: malha inicial (a), malha seguinte (b)	90
Figura 35 - Exemplo 1 com T6 sem a adaptatividade geométrica mas com a adaptatividade numérica: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c)	90
Figura 36 - Exemplo 1 com T6 usando a adaptatividade geométrica e numérica: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c)	91
Figura 37 - Placa quadrada com furo quadrado	92
Figura 38 - Exemplo 2 com T3: malha inicial (a), malha seguinte (b,c,d)	93
Figura 39 - Exemplo 2 com T6: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c)	94
Figura 40 - Viga curta em balanço	96
Figura 41 - Exemplo 3 com T3: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d)	97
Figura 42 - Mostra a distribuição da razão de erro x_i entre os elementos da malha durante os passos do processo adaptativo	98
Figura 43 - Exemplo 3 com T6: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d)	99
Figura 44 - Placa quadrada com furo quadrado com dois materiais	102
Figura 45 - Exemplo 4 com T3: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d)	103
Figura 46 - Exemplo 4 com T6: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d)	104
Figura 47 - Placa complexa com três furos circulares e um quadrado	107
Figura 48 - Exemplo 5 com T3: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d)	108
Figura 49 - Exemplo 5 com T6: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c)	109
Figura 50 - Barragem bidimensional	111

Figura 51 - Exemplo 6 com T3: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d)	112
Figura 52 - Exemplo 6 com T6: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d)	113
Figura 53 - Viga curta em balanço	115
Figura 54 - Exemplo 1 com TETRA10: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c)	116
Figura 55 - Placa com furo circular	118
Figura 56 - Exemplo 2 com TETRA10: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c)	119
Figura 57 - Sólido com cavidade cilíndrica	121
Figura 58 - Exemplo 3 com TETRA10: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c)	122
Figura 59 - Eixo cilíndrico	124
Figura 60 - Exemplo 4 com TETRA10: malha inicial (a), malha seguinte (b)	125
Figura 61 - Pórtico misto 3D	126
Figura 62 - Exemplo 5 com TETRA10: malha inicial (a), malhas seguintes (b,c,d)	127

Lista de tabelas

Tabela 1 - Comparação dos resultados para a placa quadrada com furo quadrado	95
Tabela 2 - Comparação dos resultados para a viga curta em balanço	100
Tabela 3 - Comparação dos resultados para a placa quadrada com furo quadrado para dois materiais diferentes	105
Tabela 4 - Comparação dos resultados para a placa complexa com três furos circulares diferentes	110
Tabela 5 - Comparação dos resultados do exemplo bidimensional da Barragem, mostrando os valores obtidos por Zienkiewicz e o método proposto	114
Tabela 6 - Comparação dos resultados do exemplo da viga curta em balanço 3D	117
Tabela 7 - Comparação dos resultados do exemplo da placa 3D com furo circular	120
Tabela 8 - Comparação dos resultados do exemplo do sólido com uma cavidade cilíndrica	123
Tabela 9 - Comparação dos resultados do exemplo do eixo cilíndrico	125
Tabela 10 - Mostra os resultados obtidos para o exemplo do pórtico misto	128

Lista de símbolos

h	tamanho característico de cada elemento.
h_i	tamanho característico de cada elemento no passo anterior do processo.
\mathbf{x}_i	razão de erro de cada elemento.
D	matriz que define as tensões em função das deformações.
u	campo de deslocamentos.
\mathbf{e}	campo de deformações.
S	operador diferencial.
\mathbf{s}	campo de tensões.
q	vetor de carregamento.
t_p	vetor de forças prescritas.
N	funções de formas.
\hat{u}	valores nodais de deslocamento.
\tilde{u}	solução numérica dos deslocamentos.
K	matriz de rigidez.
E	módulo de elasticidade.
\mathbf{n}	coeficiente de Poisson.
Λ	funcional de energia.
f	vetor de forças nodais.
e	erro.
e_e	erro em deformações.
e_s	erro em tensões.
$\ e\ $	norma de energia do erro.
h	erro relativo.
h^*	máximo erro relativo.
\bar{h}	erro relativo corrente.
SPR	Superconvergent Recovery Patch.
$Z2-HC$	Zienkiewicz e Zhu – Hinton e Campbell.
MEF	Método dos Elementos Finitos.

MG	Mesh Generation.
FEMOOP	Finite Element Method – Object Oriented Programming.
MTOOL	Two-dimensional Mesh Tool.
ESAM	Extensible System Attributes Management.
CGC	Complete Geometric Complex.