

4

Aspectos Avançados de Singularidades

4.1

Sela-Nó em Dimensão 2

4.1.1

Propriedades Básicas

Conforme foi visto anteriormente, para uma folheação $\mathcal{F}$ (ou campo vetorial) com uma singularidade do tipo sela-nó em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ existe uma troca de coordenadas holomorfa, através da qual $\mathcal{F}$ pode ser dada pela seguinte 1-forma (i.e, Forma Normal de Dulac).

$$\omega(y_1, y_2) = [y_1(1 + \lambda y_2^p) + y_2 R(y_1, y_2)] dy_2 - y_2^{p+1} dy_1 ,$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}^*$ e a ordem de R em $(0, 0)$ com relação a y_1 é pelo menos $p + 1$.

Consideremos a seguinte troca de coordenadas *formal*:

$$(y_1, y_2) \mapsto (\varphi(y_1, y_2), y_2) , \quad (4-1)$$

levando ω em sua forma normal formal $\omega_{p,\lambda}$, onde $\varphi(y_1, y_2) = y_1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(y_1)y_2^i$, e

$$\omega_{p,\lambda}(y_1, y_2) = [y_1(1 + \lambda y_2^p)] dy_2 - y_2^{p+1} dy_1 .$$

A existência de uma tal troca formal de coordenadas se resume a um caso particular do caso de dimensão 3, analisado na seção anterior. Revendo o argumento com um pouco mais de cuidado, observamos que as funções $a_1(y_1)$ são holomorfas em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$, apesar da troca de coordenadas *não* ser necessariamente convergente. Ou seja, as 1-formas, ω e $\omega_{p,\lambda}$ *não* são holomorficamente conjugadas, em geral.

Exemplo: Consideremos o seguinte exemplo dado por Euler:

$$(y - x^2)dx - x^2dy = 0 .$$

Observe que ela admite uma solução formal dada por

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n+1},$$

que não converge em nenhuma vizinhança de 0.

Nesta seção iremos discutir o problema da classificação analítica de selas-nó, seguindo (Ma-R). Nosso objetivo é resumir os principais pontos de (Ma-R), evidenciando o papel das normalizações setoriais e abordando os invariantes analíticos que surgem com a “troca de setores”.

Denominamos um *setor* V com *vértice* em 0, um setor angular de ângulo $\theta < 2\pi$, intersectado com a bola $B_r \subset \mathbb{C}$ centrada em $0 \in \mathbb{C}$ de raio r .

Seja f uma função holomorfa em $U \times V$, onde U é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$ e $V \subseteq \mathbb{C}$ é um setor com vértice em 0. Dizemos que f possui uma *expansão assintótica* em $0 \in \mathbb{C}$, se dado $\hat{f} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(y_1)y_2^i$, para cada $y_1 \in U$ e todo $n \in \mathbb{N}$, existir $A_n(y_1) > 0$ tal que

$$|f(y_1, y_2) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r(y_1)y_2^r| \leq A_n(y_1)y_2^n.$$

A idéia é que determinadas séries formais podem ser realizadas como expansões assintóticas de funções holomorfas, definidas em setores de ângulos $\theta < 2\pi$ e de raio r suficientemente pequeno. Em outras palavras, elas não estão definidas em uma vizinhança de zero, pois se este fosse o caso, a série teria que convergir, já que coincidiria com a série de Taylor das funções.

O próximo teorema devido ao trabalho em conjunto de H. Hukuara, T. Kimura, T. Matuda (H-K-M) implica que, embora em geral as 1-formas ω e $\omega_{p,\lambda}$ não sejam holomorficamente conjugadas em vizinhanças de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, elas o são em setores convenientemente escolhidos.

Teorema 4.1.1 (Hukuara-Kimura-Matuda (H-K-M)) *Seja φ uma série formal conforme definido em (4-1), i.e., a troca de coordenadas que leva ω em $\omega_{p,\lambda}$. Então para cada setor $V \in \mathbb{C}$ de ângulo menor que $\frac{2\pi}{p}$, existe uma aplicação holomorfa limitada*

$$\begin{aligned} \Phi_V : B_r \times (V \setminus \{0\}) &\rightarrow \mathbb{C} \times (V \setminus \{0\}) \\ (y_1, y_2) &\mapsto (\varphi_v(y_1, y_2), y_2), \end{aligned}$$

tal que:

1. $\Phi_V^* \omega \wedge \omega_{p,\lambda} = 0$;

2. φ é uma expansão assintótica em $0 \in \mathbb{C}$ de φ_v .

Φ_V chamada aplicação normalizante.

Simplificando, consideremos o caso particular em que $p = 1$. Note que os casos em que $p > 1$ podem ser lidados de maneira similar, exceto que o número de setores necessários para que se cubra a bola centrada em $0 \in \mathbb{C}$ aumenta. O procedimento geral seria uma generalização do caso $p = 1$.

Segundo o Teorema de Hukuara-Kimura-Matuda 4.1.1, é possível cobrir uma vizinhança B_r de $0 \in \mathbb{C}$ com dois setores de ângulos menores que 2π . Para fixar idéias, vamos supor que $V_1 = B_r \cap \{z \in \mathbb{C}; \arg \in [0, 5\pi/4) \cup (7\pi/4, 2\pi]\}$ e $V_2 = B_r \cap \{z \in \mathbb{C}; \arg \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, 2\pi]\}$. Observe que $V_1 \cap V_2$ possui duas componentes conexas. A bissetriz de uma delas é o semi-eixo real positivo, assim iremos denotá-lo por V^+ . Analogamente denotaremos por V^- , a componente cuja bissetriz é o semi-eixo real negativo.

Consideremos a folheação induzida pela equação $\omega_{1,\lambda} = 0$ em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Seja $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$) a folheação restrita a $B_r \times V_1$ (resp. $B_r \times V_2$). Naturalmente, $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ coincidem na interseção dos domínios, então denotamos a folheação em $B_r \times V^+$ (resp. $B_r \times V^-$) por $\mathcal{F}^+$ (resp. $\mathcal{F}^-$). O Teorema 4.1.1 garante a existência de aplicações normalizantes H_1 e H_2 definidas em $B_r \times (V_1 \setminus \{0\})$ e $B_r \times (V_2 \setminus \{0\})$, respectivamente.

No que se segue, nosso objetivo é o de entender o comportamento das aplicações que são responsáveis pela troca de setores. Primeiramente, a troca de setores $H_1 \circ H_2^{-1}$ dá origem a dois difeomorfismos, que denotaremos por g^+ e g^- , dependendo se estamos analisando a troca dos setores de $\mathcal{F}^+$ para $\mathcal{F}^-$ ou de $\mathcal{F}^-$ a $\mathcal{F}^+$. A proposição seguinte nos dá uma caracterização para estas funções.

Proposição 4.1.2 *O difeomorfismo $g^+ = H_1 \circ H_2^{-1}|_{V^+}$ é uma translação e o difeomorfismo $g^- = H_1 \circ H_2^{-1}|_{V^-}$ é tangente à identidade.*

Antes de começarmos a demonstração da proposição, daremos uma abordagem geométrica para g^+ e g^- . Observe que as soluções de $\omega_{1,\lambda} = 0$, i.e, as folhas da folheação são dadas por

$$y_1(y_2) = c \cdot y_2^\lambda \cdot \exp\left(\frac{-1}{y_2}\right), \quad (4-2)$$

para $c \in \mathbb{C}$. De forma que cada folha de $\mathcal{F}^+$ (resp. $\mathcal{F}^-$) está em correspondência com $c \in \mathbb{C}$. Em outras palavras, o espaço das folhas é isomorfo a $\mathbb{C}$, sendo parametrizado pelas constantes $c \in \mathbb{C}$. Portanto, g^+ (ou g^- , conforme $\text{Re}(x) > 0$ ou $\text{Re}(x) < 0$) está definido em $\mathbb{C}$ e $g^+(c)$ (ou $g^-(c)$) é a folha correspondente quando trocamos de setores.

O que se segue é clássico após (Ma-R), entretanto seguimos a discussão em (R1). Consideremos o grupo dos automorfismos $\Lambda_{\omega_{1,\lambda}}(V)$, tal que cada elemento é um difeomorfismo ϕ definido em um setor V com as seguintes propriedades:

1. $\phi(y_1, y_2) = (\varphi(y_1, y_2), y_2)$,
2. ϕ é uma expansão assintótica da identidade,
3. ϕ preserva a folheação $\mathcal{F}$ induzida por $\omega_{1,\lambda} = 0$.

Assim, a aplicação normalizante obtida no Teorema 4.1.1 *não* é unicamente determinada. De fato, se H_1 é uma aplicação normalizante em $B_r \times (V_1 \setminus \{0\})$, então $H_1 \circ \phi$, com $\phi \in \Lambda_{\omega_{1,\lambda}}(B_r \times V_1)$ também admite a troca de coordenadas (4-1) como expansão assintótica. Ou seja, a aplicação normalizante está unicamente definida a menos de uma composição com um elemento de $\Lambda_{\omega_{1,\lambda}}(V)$. É por isso que a troca $H_1 \circ H_2^{-1}$ *não* é a identidade, em geral. Na realidade, a troca é uma *expansão assintótica da identidade*. Mais precisamente, trata-se de um elemento de $\Lambda_{\omega_{1,\lambda}}(B_r \times V_1)$. O case especial em que a “colagem” das folhas é a identidade é exatamente o caso em que a forma normal formal é holomorficamente conjugada a Forma Normal de Dulac.

Um elemento $\phi(y_1, y_2) = (y_1 + b_0(y_2) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(y_2)y_1^i, y_2)$ está em $\Lambda_{\omega_{1,\lambda}}(V)$, se for assintótico à identidade e se preservar a folheação. Esta última condição implica que

$$d\phi(X) = X(\phi),$$

onde $X = (y_1(1 + \lambda y_2), y_2^2)$, i.e, o campo vetorial associado a $\omega_{1,\lambda} = 0$. Além disso, ϕ é assintótico à identidade se e somente se as funções $b_j(y_2)$ forem assintóticas à função nula quando y_2 tende a $0 \in \mathbb{C}$. Levando em conta estas considerações, podemos mostrar o resultado.

Prova da Proposição 4.1.2. Conforme foi visto anteriormente, a troca de setores $\phi = H_1 \circ H_2^{-1}$ é um elemento de $\Lambda_{\omega_{1,\lambda}}$. De fato, o Teorema 4.1.1 garante que as condições 1 e 2 são satisfeitas. Quanto à terceira, observamos que H_i ($i = 1, 2$) são tais que

$$dH_i(Y) = X(H_i)$$

onde X é como antes e $Y = (y_1(1 + \lambda y_2) + y_2 R(y_1, y_2), y_2^2)$. Logo,

$$\begin{aligned} d(H_1 \circ H_2^{-1})(X)(H_1 \circ H_2^{-1})^{-1} &= dH_1 \circ dH_2^{-1}(X)H_2 \circ H_1^{-1} \\ &= dH_1 \circ dH_2^{-1} \circ dH_2(Y) \circ H_1^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= dH_1(Y) \circ H_1^{-1} \\
&= X(H_1) \circ H_1^{-1} \\
&= X.
\end{aligned}$$

Portanto, a folheação é preservada. Usando o fato que $\phi = H_1 \circ H_2^{-1}$ preserva a folheação, obtêm-se

$$\begin{aligned}
&\left(y_1(1 + \lambda y_2) \left(1 + \sum_j j b_j(y_2) y_1^{j-1} \right) + y_2^2 b'_0(y_2) + y_2^2 \sum_j b'_j(y_2) y_1^j, y_2^2 \right) = \\
&\left(\left[y_1 + b_0(y_2) + \sum_j b_j(y_2) y_1^j \right] (1 + \lambda y_2), y_2^2 \right),
\end{aligned}$$

o que nos leva à seguinte equação diferencial ordinária:

$$b'_j(y_2) y_2^2 + b_j(y_2) (j-1)(1 + \lambda y_2) = 0.$$

Uma solução desta equação é dada por

$$b_j(y_2) = c_j \exp\left(\frac{j-1}{y_2}\right) \frac{1}{y_2^{(j-1)\lambda}},$$

onde c_j é a condição inicial.

Assim, para $j \geq 1$, têm-se

$$\begin{cases} \lim_{y_2 \rightarrow 0^+} b_j(y_2) = \infty \\ \lim_{y_2 \rightarrow 0^-} b_j(y_2) = 0 \end{cases}$$

Por outro lado, a hipótese de ϕ ser assintótica à identidade implica que quando $y_2 \rightarrow 0$, $b_j(y_2)$ é assintótico à função nula. Estas duas condições somente são válidas simultaneamente quando $y_2 \in V^+$ se $c_j = 0$ para $j \geq 1$. Finalmente, observamos que

$$\begin{cases} \lim_{y_2 \rightarrow 0^+} b_0(y_2) = 0 \\ \lim_{y_2 \rightarrow 0^-} b_0(y_2) = \infty \end{cases}$$

um argumento análogo implica que $c_0 = 0$ quando $y_2 \in V^-$. Assim, chegamos à seguinte conclusão

$$\begin{cases} \text{if } y_2 \in V^+, & g^+ = \phi(y_1, y_2)|_{V^+} = (y_1 + c_0, y_2) \\ \text{if } y_2 \in V^-, & g^- = \phi(y_1, y_2)|_{V^-} = (y_1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(y_2) y_1^i, y_2) \end{cases}$$

E o resultado segue. $\square$

Consideremos agora duas folheações com singularidades sela-nó que são holomorficamente conjugadas. É interessante estudar a relação entre os seus difeomorfismos responsáveis pelas trocas de setores (no caso em que $p = 1$ nós os denotamos por g^+ e g^-). Veremos que se as selas-nó são holomorficamente conjugadas, então os difeomorfismos que fazem as trocas de setores são conjugados por um automorfismo do espaço das folhas.

Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ folheações holomorficamente conjugadas, dadas pelas 1-formas ω_1 e ω_2 , respectivamente. Ou seja, existe um difeomorfismo H que leva as folhas de $\mathcal{F}_1$ nas folhas de $\mathcal{F}_2$. Também existem trocas formais de coordenadas h_1 e h_2 que levam ω_1 e ω_2 , respectivamente, em formas normais formais $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$. Conforme vimos anteriormente, apesar de h_1 (resp. h_2) não ser analítico em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$, existem setores em que a série converge e as funções g_1^+ , g_1^- (resp. g_2^+ , g_2^-) que “colam” as folhas dos setores V^+ e V^- (no caso de $p = 1$).

Definiremos a seguinte relação de equivalência: dois difeomorfismos f e $\tilde{f}$ são ditos equivalentes (e denotados por $f \sim \tilde{f}$) se existe $\sigma \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ com $\sigma'(0) = 1$ tal que:

$$\tilde{f} = \sigma^{-1} \circ f \circ \sigma.$$

Em outras palavras, funções conjugadas pertencem à mesma classe de equivalência. Neste sentido, se as folheações são holomorficamente conjugadas, as funções de transição g_1^+ e g_1^- são equivalentes, respectivamente, a g_2^+ e g_2^- . De fato, observe que a função $\sigma = h_2 \circ H \circ h_1^{-1} \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ é um automorfismo do espaço das folhas (que é isomorfo a uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$ conforme observado pela Fórmula 4-2) tangente à identidade. Denotando por $\sigma_+ = \sigma|_{V^+}$ e $\sigma_- = \sigma|_{V^-}$ segue que $g_1^+ = \sigma_+^{-1} \circ g_2^+ \circ \sigma_+$ e $g_1^- = \sigma_-^{-1} \circ g_2^- \circ \sigma_-$.

Em resumo os tipos analíticos de sela-nó com $p = 1$ estão em correspondência com as classes de equivalência dos difeomorfismos g^+ e g^- . Como a classe de conjugação das translações é óbvia, vemos que a informação está totalmente contida na conjugação do difeomorfismo g^- tangente à identidade. Logo, é natural estudarmos o espaço modular dos difeomorfismos de $(\mathbb{C}, 0)$ tangentes à identidade, de forma a termos realmente invariantes para singularidades do tipo sela-nó.

4.1.2

Automorfismos de $(\mathbb{C}, 0)$ Tangentes à Identidade

Agora iremos estudar os automorfismos σ de $(\mathbb{C}, 0)$ tangentes à identidade que foram utilizados na relação de equivalência na seção anterior. A descrição

desses espaços modulares foi feita independentemente por Ecalte e Voronin. Seguiremos a construção dada por Voronin para o caso prototípico, $p = 1$.

Mais precisamente, faremos uma classificação analítica de aplicações do conjunto $\mathcal{A} = \{f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) ; f(z) = z + az^2 + \dots, a \neq 0\}$. Como sempre, definimos duas aplicações $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ como sendo equivalentes se e somente se existir um difeomorfismo holomorfo H tal que $H \circ f_1 = f_2 \circ H$. Aqui iremos descrever estas classes de equivalência.

Começamos com alguns resultados de Análise e definições que serão utilizadas ao longo desta seção.

Definição 4.1.3 *Um homeomorfismo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ é quasiconforme se*

$$|f_{\bar{z}}| \leq k|f_z|$$

para $k < 1$ em quase todo ponto.

A função $h_f = f_{\bar{z}}/f_z$ é denominada a *característica* da aplicação quasiconforme f , e

$$K_f(z_0) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\sup_{|z-z_0|=r} |f(z) - f(z_0)|}{\inf_{|z-z_0|=r} |f(z) - f(z_0)|}.$$

é o *desvio quasiconforme* da aplicação f no ponto z_0 . Observe que se g for quasiconforme com característica $h_g = h_f$, então $g \circ f^{-1}$ é conforme.

Proposição 4.1.4 *Uma aplicação é quasiconforme em Ω se e somente se $K_f(z_0) < \infty$ para todo $z_0 \in \Omega$ e $K = \|K_f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$.*

Teorema 4.1.5 (Teorema Mensurável de Riemann) *Para qualquer função mensurável h tal que $\|h\|_{L^\infty} < 1$, existe uma aplicação quasiconforme f do plano $\mathbb{C}$ em si mesmo, tendo h como função característica $h = h_f$.*

A seguir, vamos considerar o caso específico da função $f_0(z) = z/(1-z)$ em $\mathcal{A}$. Observe que a inversão $A_0(z) = -1/z$ conjugua f_0 conformemente à translação $T(z) = z + 1$ em $\mathbb{C}^*$, isto é,

$$A_0 \circ f_0 = T \circ A_0. \quad (4-3)$$

Veremos que esta última observação de fato vale em geral. Ou seja, para cada função f pertencente a $\mathcal{A}$, existem certos domínios de $\mathbb{C}$ em que f é *quasiconformemente* conjugada a T . Provamos isto usando os seguintes dois resultados.

Teorema 4.1.6 (A. Shcherbakov) *Seja $f \in \mathcal{A}$, $f_0(z) = z/(1-z)$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe δ e um homeomorfismo $H(z) = z + h(z)$ do disco K_δ (de raio δ) em si mesmo tal que:*

$$H \circ f_0 = f \circ H \text{ em } K_\delta \quad (4-4)$$

$$|h(z_1) - h(z_2)| < \varepsilon |z_1 - z_2|, \quad z_j \in K_\delta \quad (4-5)$$

Este teorema basicamente afirma que toda função tangente à identidade é conjugada, em um disco suficientemente pequeno a f_0 por uma aplicação de Lipschitz com constante de Lipschitz próxima de 1.

Lema 4.1.7 *Suponha que para o homeomorfismo $H(z) = z + h(z)$, a Estimativa (4-5) é válida para $\varepsilon < 1$, então H é quasiconforme em K_δ .*

Prova. Este lema segue diretamente da Proposição 4.1.4. De fato, nestas condições, o desvio quasiconforme de H , $K(z_0)$ é tal que $K(z_0) \leq (1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ para $z \in K_\delta$. $\square$

Proposição 4.1.8 *Para cada $f \in \mathcal{A}$ existem domínios $R, L \in \mathbb{C}$ e uma aplicação quasiconforme G definida em $R \cup L$, satisfazendo*

- $G \circ T = f \circ G$ em R ,
- $G \circ T^{-1} = f^{-1} \circ G$ em L .

Escolhemos ε , $0 < \varepsilon < 1$ e pelo Teorema 4.1.6, obtêm-se um homeomorfismo $H : K_\delta \rightarrow K_\delta$, conjugando f e f_0 como em (4-4). Além disso, pelo Lema 4.1.7, ele é quasiconforme.

Seja $R = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im} z| > c, \operatorname{Re} z > c\}$ para um número complexo fixado $c = 1/\rho$, para $\rho < \delta$.

A aplicação $G = H \circ A_0^{-1}$ em R está bem-definida e é quasiconforme, sendo a composição de uma aplicação conforme com uma quasiconforme. Seja $\Omega_1 = G(R)$. Segue de (4-3) e (4-4) que G é precisamente a conjugação desejada. Em conclusão, f é quasiconformemente conjugada a uma translação.

Além disso, como $T(R) \subset R$, Ω_1 é invariante por f (i.e., $f(\Omega_1) \subset \Omega_1$). Analogamente, podemos definir um domínio Ω_2 que seja invariante por f^{-1} . Mais precisamente, $\Omega_2 = G(L)$ onde $L = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im} z| > c, \operatorname{Re} z < -c\}$ com c igual ao anterior. Naturalmente, no domínio L , f^{-1} é quasiconformemente conjugada à translação T^{-1} . O que estabelece a proposição. $\square$

Equivalentemente, pode-se definir domínios R e L de forma que suas fronteiras sejam suaves (cf. (Car-G)). Nestas circunstâncias, $A_0^{-1}(R)$ é a conhecida região no formato de um cardióide (cf. Seção 3.2.2).

O seguinte lema, garante a existência de coordenadas analíticas A_1 e A_2 definida nos domínios Ω_1 e Ω_2 . No que se segue, podemos traçar um paralelo entre o caso sela-nó, analisado na seção anterior, e a “colagem” dos domínios Ω_1 e Ω_2 . Neste sentido, ainda estamos considerando conjugações que não estão definidas em toda uma vizinhança da origem. No caso sela-nó, obtivemos normalizações setoriais através do Teorema de Hukuara-Kimura-Matuda. O análogo a este teorema na presente situação é o seguinte

Lema 4.1.9 (Lema Básico) *Sejam R e Ω_1 como antes. Considere a translação $T(z) = z + 1$ e o homeomorfismo quasiconforme G_1 do domínio R em Ω_1 . Suponha que f é analítica em Ω_1 e tal que*

$$G_1 \circ T = f \circ G_1. \quad (4-6)$$

Então existe uma aplicação analítica $A_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo

1. A_1 é univalente em Ω_1 .
2. $A_1 \circ f = T \circ A_1$.
3. Se A'_1 é outra aplicação analítica em Ω_1 verificando as condições 1 e 2, então existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $A'_1 = A_1 + c$ em Ω_1 .

Observe que um lema análogo pode ser formulado para a existência de uma aplicação analítica $A_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ com as modificações óbvias.

Prova. Conforme visto, $f \in \mathcal{A}$ é equivalente a uma translação. Este lema assegura que a equivalência é, de fato, analítica.

O espaço quociente R/T é conformemente equivalente ao plano perfurado $\mathbb{C}^*$, com projeção $\pi_0 : R \rightarrow \mathbb{C}^*$. Como G_1 é uma aplicação analítica satisfazendo (4-6), as órbitas de f são discretas e $\Omega_1/f = S$ é uma Superfície de Riemann. Seja $\tilde{\pi} : \Omega_1 \rightarrow S$ a projeção do espaço quociente. De (4-6), obtemos um homeomorfismo quasiconforme $\tilde{G} : \mathbb{C}^* \rightarrow S$ entre os espaços quocientes.

Afirmção 1 : Se existe uma aplicação conforme $B : S \rightarrow \mathbb{C}^*$ então existe uma aplicação analítica $A_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ verificando 1, 2 and 3.

De fato, observe que Ω_1 é um recobrimento de $\mathbb{C}^*$ com projeção holomorfa $\pi = B \circ \tilde{\pi}$. Entretanto, o recobrimento universal de $\mathbb{C}^*$ é $\mathbb{C}$ com projeção $\hat{\pi}$. Como Ω é um recobrimento simplesmente conexo de $\mathbb{C}^*$ então existe uma inclusão $A : \Omega_1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\pi = \hat{\pi} \circ A$. Esta aplicação satisfaz 1, 2 e 3 (para mais detalhes confira (Vo)).

Afirmção 2 : Se existe uma aplicação quasiconforme $\tilde{G} : \mathbb{C}^* \rightarrow S$, então S é conformemente equivalente a $\mathbb{C}^*$.

Como $\tilde{G}^{-1} : S \rightarrow U$ é uma aplicação quasiconforme de S em um domínio U , a característica h do seu inverso independe da escolha de um parâmetro

local em S , e $\|h\|_{L_\infty(U)} = k < 1$. Definindo, $h|_{\mathbb{C} \setminus U}$, h ainda é mensurável e $\|h\|_{L_\infty(U)} = k$. Pelo Teorema 4.1.5 existe um homeomorfismo quasiconforme F de $\mathbb{C}$ em si mesmo com característica h e podemos supor que $F(0) = 0$. De forma que a aplicação $B = F \circ \tilde{G}^{-1} : S \rightarrow \mathbb{C}^*$ é conforme. $\square$

Agora analisamos as funções que fazem a troca de setores, i.e., os análogos a $g_\pm$ no caso sela-nó.

Seja $\Phi_\pm = A_2 \circ A_1^{-1}|_{V_\pm}$, onde $V_+ = \Omega_1 \cap \Omega_2|_{\{z: \text{Im } z > 0\}}$ e $V_- = \Omega_1 \cap \Omega_2|_{\{z: \text{Im } z < 0\}}$.

Observação 4.1.10 Não é obvio, mas com algum esforço, é possível obter uma expressão para $\Phi_\pm$, mais precisamente, $\Phi_\pm(z) = z + \sum_{k \geq 0} c_k^\pm \exp(\pm 2\pi i k z)$ (cf. (Vo)).

Para cada $f \in \mathcal{A}$ associamos um par $\Phi_\pm$ de funções holomorfas. Como estamos interessados em estudar as classes de equivalência de elementos de $\mathcal{A}$, é natural compreender as relações entre as aplicações $\Phi_\pm$ e $\tilde{\Phi}_\pm$ associadas a difeomorfismos conjugados f , e $\tilde{f}$, respectivamente. A vantagem da construção precedente reside no fato que as aplicações de transição correspondentes estão relacionadas de uma maneira particularmente simples.

De fato, pelo Lema 4.1.9 temos A_1 e, analogamente, existe A_2 tais que:

$$\begin{aligned} A_1 \circ f &= T \circ A_1 \\ A_2 \circ f^{-1} &= T^{-1} \circ A_2. \end{aligned}$$

Por hipótese, $f = H_0^{-1} \circ \tilde{f} \circ H_0$ de forma que

$$\begin{aligned} A_1 \circ H_0^{-1} \circ \tilde{f} &= T \circ A_1 \circ H_0^{-1} \\ A_2 \circ H_0^{-1} \circ \tilde{f}^{-1} &= T^{-1} \circ A_2 \circ H_0^{-1} \end{aligned}$$

Suponha que $\tilde{A}_1$ seja dada pelo Lema 4.1.9 para $\tilde{f}$. Então pelo item 3 deste mesmo lema, segue que

$$A_1 \circ H_0^{-1} \equiv \tau_1 \circ \tilde{A}_1.$$

Similarmente,

$$A_2 \circ H_0^{-1} \equiv \tau_2 \circ \tilde{A}_2,$$

onde τ_1 e τ_2 são translações. Então

$$\Phi_\pm = A_2 \circ A_1^{-1}|_{V_\pm}$$

$$\begin{aligned}
&= \tau_2 \circ \tilde{A}_2 \circ H_0 \circ H_0^{-1} \circ \tilde{A}_1^{-1} \circ \tau_1^{-1} \\
&= \tau_2 \circ \tilde{\Phi}_{\pm} \circ \tau_1^{-1}.
\end{aligned}$$

Em conclusão, obtivemos o seguinte

Teorema 4.1.11 *Se f e $\tilde{f}$ pertencem à mesma classe de equivalência analítica, então as funções de transição $\Phi_{\pm}$ e $\tilde{\Phi}_{\pm}$ são conjugadas por uma translação.*

Observação 4.1.12 O leitor deve ter percebido que, começando com o problema de classificar selas-nó, iteramos duas vezes o procedimento de “normalização setorial”. Talvez isso dê a impressão de que não fizemos nenhum progresso efetivo no sentido de descrever concretamente o espaço modular. Entretanto, este não é o caso. De fato, no caso sela-nó, usamos as normalizações setoriais obtidas pelo Teorema de Hukuara-Kimura Matuda a fim de ter difeomorfismos g^+ , g^- em que classes de conjugação determinam o tipo analítico de uma sela-nó. A dificuldade é que g^- é tangente à identidade mas *não* é unicamente determinado. Apenas a classe de conjugação de g^- em $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ é canônica, no sentido em que ela é unicamente determinada. Assim, em uma comparação “concreta” entre duas selas-nó, seríamos reduzidos a ter que decidir se dois difeomorfismos tangentes à identidade “distintos” são conjugados em $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. A resposta para esse problema não é de maneira alguma óbvia. A fim de lidar com esta questão, novamente aplicamos normalizações setoriais (desta vez, obtidas pelo Lema Básico) para se ter novas funções $\phi_{\pm}$. A vantagem seta segunda normalização é que $\phi_{\pm}$ estão “quase” unicamente determinados, no sentido que dois deles são conjugados por uma translação. Em particular, é fácil decidir se dois deles definem ou não o mesmo ponto no espaço modular correspondente.

4.2

Redução de Singularidades em Dimensão 2

Até agora estivemos analisando apenas campos vetoriais com singularidades simples. Porém, ficará evidente ao longo desta seção, que existe um método particularmente efetivo de lidar com singularidades de ordem superior. O Teorema de Seidenberg basicamente afirma que através da composição de um número finito de aplicações de “blow-up”, é possível reduzir a ordem de uma singularidade isolada até que se obtenha uma superposição de singularidades simples. Nesta seção pretendemos mostrar como isso é feito.

Esta exposição está fortemente inspirada no tratamento apresentado em (M-M), que, por sua vez, é uma mistura do trabalho original de A. Seidenberg (Se) e o de de Ven den Essen.

Começamos fixando notações e com algumas definições. Seja $\mathcal{F}$ a folheação singular holomorfa associada ao campo vetorial holomorfo X com uma singularidade isolada em $(0, 0)$. Ou, podemos pensar em termos de 1-formas, afinal, a 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ e o campo $X(x, y) = B(x, y)\frac{\partial}{\partial x} - A(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ definem a mesma folheação $\mathcal{F}$.

Os *autovalores* de $\omega = Adx + Bdy$ em $(0, 0)$ são definidos como sendo os autovalores λ_1, λ_2 de X .

Lembramos que o “blow-up” da 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ nas coordenadas (x, t) é dado por:

$$\pi^*(\omega) = [A_k(1, t) + tB_k(1, t) + x(t\tilde{b}(x, t) + \tilde{a}(x, t))]dx + x[B_k(1, t) + x\tilde{b}(x, t)]dt.$$

Nas coordenadas (t, y) obtemos

$$\pi^*(\omega) = y[A_k(t, 1) + y\tilde{a}(t, y)]dt + [B_k(t, 1) + tA_k(t, 1) + y(\tilde{b}(t, y) + t\tilde{a}(t, y))]dy,$$

onde

$$\tilde{a}(x, t) = A_{k+1}(1, t) + xA_{k+2}(1, t) + \cdots = \frac{1}{x^k}a(x, tx),$$

e $a(x, tx) = \sum_{n \geq k} A_n(x, tx)$, usando A_k para denotar a componente homogênea de grau k da série de Taylor de A centrada em $(0, 0)$. Adotamos uma notação análoga para B .

Seja $J_{(0,0)}^1(\omega) = A_1(x, y)dx + B_1(x, y)dy$, e defina C_ω como sendo o subconjunto do divisor excepcional $E \approx \mathbb{CP}(1)$ formado pelas singularidades da “nova” folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ (i.e, a folheação associada a $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$, onde π é a aplicação de blow-up). Observe que no caso não-dicrítico ($A_1(1, t) + tB_1(1, t)$ não é identicamente nulo), o conjunto C_ω é dado pelas soluções de $A_1(1, t) + tB_1(1, t) = 0$. Seja μ_c a ordem da singularidade $c \in C_\omega$.

Suponha que F seja uma aplicação definida em $U \subset \mathbb{C}^2$ com uma singularidade em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. A *ordem* de F em 0, denotada por $\nu_0(F)$ é o grau da primeira componente homogênea não-trivial da série de Taylor de F com centro na origem. Também definimos a ordem de um campo vetorial (conforme feito na Seção 2.4). Se $X(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$ é singular em $(0, 0)$ a *ordem* de X é o mínimo entre as ordens de F e G . Analogamente, é possível definir a *ordem* da 1-forma ω em 0.

Considere duas curvas algébricas V e W

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; f(x, y) = 0\}, \quad W = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; g(x, y) = 0\},$$

suponha que elas se intersectam em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Lembramos que se g for irredutível, então existe uma normalização local (Parametrização de Puiseux)

$$\gamma : t \mapsto (t^k, \sum_{n=m}^{\infty} a_n t_n),$$

para um certo k e $m < k$. O *número de interseção* de V e W em $(0,0)$ é definido como sendo

$$I(f, g; 0) = \nu_0(f \circ \gamma).$$

Se g não for irredutível e $g = g_1^{\alpha_1} \dots g_p^{\alpha_p}$, onde $g_1, \dots, g_p$ são irredutíveis, então o *número de interseção* de V e W em $(0,0)$ é dado por

$$I(f, g; 0) = \sum_{i=1}^p \alpha_i I(f, g_i; 0).$$

Finalmente, definimos o *número de interseção* da 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ como sendo

$$I_0(\omega) = I(A, B; 0).$$

Agora podemos enunciar o teorema de Seidenberg.

Teorema 4.2.1 (Seidenberg) *Seja $\mathcal{F}$ a folheação singular holomorfa associada à 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ definida em $U \in \mathbb{C}^2$ com uma singularidade isolada em $(0,0)$. Existe uma aplicação própria analítica $\pi : V \rightarrow U$ (obtida por uma composição de blow-ups) de uma variedade complexa bidimensional V em U , tal que:*

- $\pi^{-1}(0,0) = E$, onde E é o divisor excepcional de V ;
- $\pi : V \setminus E \rightarrow U \setminus \{(0,0)\}$ é um difeomorfismo holomorfo;
- $\nu_p(\pi^*(\omega)) \leq 1$ para todo $p \in V$

Em outras palavras, o “blow-up” de U é uma variedade complexa V tal que todos os seus pontos p são regulares ou singularidades simples.

Prova. Suponha que $(0,0)$ seja a única singularidade de ω em U . Seja k a ordem de ω em $(0,0)$. Se $k > 1$, utilizamos o procedimento de blow-up, descrito na Seção 2.4. Em outras palavras, existe uma aplicação própria $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $\pi(x, t) = (x, tx)$, com $\pi^{-1}(0,0) = E$, onde E é o divisor excepcional. Além disso, o blow-up de ω nas coordenadas (x, t) é dado por

$$\tilde{\omega} = \pi^*\omega = [A_k(1, t) + tB_k(1, t) + x(\tilde{t}\tilde{b}(x, t) + \tilde{a}(x, t))]dx + x[B_k(1, t) + x\tilde{b}(x, t)]dt. \quad (4-7)$$

Conforme visto anteriormente, o comportamento de $\tilde{\omega}$ varia significativamente na vizinhança de E dependendo se $A_k(1, t) + tB_k(1, t)$ é identicamente nulo ou não. Analizando estes dois casos, não é difícil obter igualdades que relacionam o número de interseção de ω com a sua ordem em $(0, 0)$ (confira (M-M)).

- Se $A_k(1, t) + tB_k(1, t)$ não for identicamente nulo, então

$$I_0(\omega) = k^2 - k + 1 + \sum_{c \in E} I_c(\tilde{\omega}). \quad (4-8)$$

lembramos que neste caso o divisor excepcional é invariante pela folheação.

- Se $A_k(1, t) + tB_k(1, t) \equiv 0$, então

$$I_0(\omega) = k^2 + k - 1 + \sum_{c \in E} I_c(\tilde{\omega}). \quad (4-9)$$

Este é o caso dicrítico, i.e, as folhas da folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ associada a $\tilde{\omega}$ são regulares e transversas a E .

Existem duas possibilidades, ou a 1-forma $\tilde{\omega}$ possui apenas singularidades simples e pontos regulares em $\pi^{-1}(U)$, e o teorema está provado. Ou ainda existem pontos $c \in \pi^{-1}(U)$, tais que $\nu_c(\tilde{\omega}) > 1$.

No último caso, primeiramente definimos

$$V_1 = \pi^{-1}(U), \quad \pi_1 = \pi|_{V_1} : V_1 \rightarrow U.$$

A seguir, simultâneamente fazemos o blow-up de todos os pontos $c \in E \subset V_1$ tais que $\nu_c(\tilde{\omega}) > 1$. Seja $\pi_2 : V_2 \rightarrow V_1$ a aplicação correspondente a estes blow-ups. Então definimos

$$\pi^2 = \pi_1 \circ \pi_2 : V_2 \rightarrow U$$

Por indução, construímos aplicações $\pi_i : V_i \rightarrow V_{i-1}$, fazendo o blow-up de todos os pontos c de V_{i-1} tais que $\nu_c((\pi^{i-1})^*(\omega)) > 1$, onde

$$\pi^{i-1} = \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_{i-1}.$$

As Equações (4-8) e (4-9) garantem que este procedimento é finito. De fato, apesar dos dois comportamentos distintos que $\tilde{\mathcal{F}}$ possa assumir, em ambos os casos, o número de interseção I_c decresce se $k > 1$. Assim, repetindo este procedimento, haverá um i suficientemente grande, tal que para todo c em V_i , $\nu_c((\pi^i)^*(\omega)) \leq 1$. $\square$

A seguir, trataremos do caso em que a folheação $\mathcal{F}$ possui apenas singularidades simples. Realizando aplicações de blow-ups adicionais, é possível obter uma expressão mais simples para a 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ associada a $\mathcal{F}$. Esta 1-forma correspondente não pode ser simplificada realizando mais aplicações de blow-up. Por isso elas são chamadas de “irredutíveis”.

Teorema 4.2.2 *Considere a folheação singular holomorfa associada à 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ definida em $U \in \mathbb{C}^2$ com uma singularidade isolada em $(0,0)$. Seja $\pi : V \rightarrow U$ a aplicação de blow-up obtida pelo Teorema 4.2.1. Então para cada $p \in V$ onde $\nu_p(\pi^*(\omega)) = 1$, existe uma carta coordenada (u, v) centrada em p tal que:*

$$\pi^*(\omega) = [\lambda_1 + (\cdots)v]du - [\lambda_2 + (\cdots)]udv, \quad (4-10)$$

onde $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, e $\lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1$ não pertencem a $\mathbb{N}$. Ou,

$$\pi^*(\omega) = [v + (\cdots)]du. \quad (4-11)$$

Começamos enunciando o seguinte

Lema 4.2.3 *Suponha que a 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ seja não-dicrítica. Se existir $c \in \mathbb{CP}(1)$, tal que $\mu_c = 1$, então $J^1(\tilde{\omega}_c) = \tilde{A}_1dx + \tilde{B}_1dy \neq 0$. Em outras palavras, o blow-up de ω em c , $\tilde{\omega}_c$, não eleva a ordem $\mu_{\pi^{-1}(c)}$. Além disso, $\tilde{\omega}_c$ possui um autovalor não-nulo.*

Prova do Teorema 4.2.2. Suponhamos que a ordem de ω em $(0,0)$ seja $k = 1$. De acordo com os autovalores de ω , existem 5 situações distintas que devem ser analisadas separadamente:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$;
3. $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1$ pertencem a $\mathbb{N}$;
4. $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1$ não pertencem a $\mathbb{N}$;
5. $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

Observe que os casos 4 e 5 correspondem precisamente às situações refletidas pelas Equações (4-10) e (4-11), respectivamente. Agora mostraremos que fazendo o blow-up da variedade em certos pontos, os 3 casos anteriores se reduzem aos casos 4 ou 5.

Caso 1

Nesta situação, a matriz jacobiana do campo vetorial $X = (B, -A)$ em $(0, 0)$ é semelhante a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, $J_{(0,0)}^1(\omega) = ydy$, de forma que o conjunto C_ω é formado pelo ponto $c = (1, 0)$ e $\mu_c = 2$.

Agora fazemos o blow-up da folheação em c , obtendo

$$\tilde{\omega}_c = [t^2 + x(t\tilde{b}(x, t) + \tilde{a}(x, t))]dx + x[t + x\tilde{b}(x, t)]dt,$$

Suponha que $A_2(1, t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2$.

Observe que a ordem de $\tilde{\omega}$ pode ser 1 ou 2 dependendo se α_1 é igual a zero ou não. Analizemos as duas possibilidades separadamente

– **(1.a)** $\alpha_1 \neq 0$

Neste caso, $\nu(\tilde{\omega}) = 1$ e para simplificar a notação, denotamos $\tilde{\omega}$ por:

$$\eta = [y^2 + x(y\tilde{b}(x, y) + \tilde{a}(x, y))]dx + x[y + x\tilde{b}(x, y)]dy,$$

Observe que C_ω é dado pela equação

$$\alpha_1 x^2 = 0,$$

logo formado pelo ponto $c = (0, 1)$ com $\mu_c = 2$. Agora realizamos o procedimento de blow-up em c e nas coordenadas (t, y) , $t = x/y$ obtemos

$$\tilde{\eta}_c = y[\alpha_1 t + y(1 + \dots)]dt + [\alpha_1 t^2 + y(2t + \dots)]dy.$$

Portanto, $C_{\tilde{\eta}_c}$ é dado pela equação

$$ty(3y + 2\alpha_1 t) = 0,$$

logo contendo apenas pontos simples. Aplicando o Lema 4.2.3, conclui-se que nestas coordenadas $\lambda_1 \neq 0$. Assim, reduzimos ω a uma 1-forma que não pertence ao **Caso 1**.

– **(1.b)** $\alpha_1 = 0$

Neste caso, $\nu(\tilde{\omega}) = 2$, como antes, denotamos $\tilde{\omega}$ por η . O conjunto C_η é dado por

$$x(2y^2 + \gamma xy + \delta x^2) = x(y - a_1x)(y - a_2x) = 0,$$

para certas constantes γ, δ, a_1 e a_2 .

- Se $a_1 \neq a_2$ aplicamos o Lema 4.2.3 e chegamos à mesma conclusão anterior.
- Se $a_1 = a_2 = a \neq 0$ então

$$\tilde{\eta} = [(t - a)^2 + x(\cdots)]dx + x[t + x(\cdots)]dt.$$

Então a matriz jacobiana associada a $\tilde{\omega}$ é $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$, portanto admitindo um autovalor não-nulo.

- Se $a = 0$ então o ponto $c = (1, 0) \in C_\eta$, tem multiplicidade $\mu_c = 2$ e

$$\tilde{\eta}_c = [2t^2 + x(\cdots)]dx + x[t + x(\cdots)]dt$$

Logo, $\tilde{\eta}$ ainda é do mesmo tipo que η . Observe que pelo Teorema 4.2.1 $\nu(\tilde{\eta}) = 1$. Portanto esta possibilidade nos leva ao **Caso (1.a)**.

Em conclusão, sempre existe um meio de fazer o blow-up de ω de maneira que ambos os seus autovalores sejam diferentes de *zero*.

Caso 2

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lambda = 1$. Assim, existem basicamente duas possibilidades a serem consideradas:

- A matriz jacobiana do campo vetorial X em $(0, 0)$ é semelhante a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nesta situação, $J_{(0,0)}^1(\omega) = ydx - xdy$. Trata-se, portanto do caso dicrítico. Fazendo o blow-up de ω em cada $c \in \mathbb{CP}(1)$, observe que $\tilde{\omega}_c$ não possui singularidades ($\nu_p(\tilde{\omega}_c) = 0$ para todo $p \in V$).

- A matrix jacobiana do campo vetorial X em $(0, 0)$ é semelhante a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aqui, $J_{(0,0)}^1(\omega) = -xdx + (x+y)dy$, e o conjunto C_ω resume-se ao ponto $c = (1, 0)$ com $\mu_c = 2$. Fazendo o blow-up de ω em c obtêm-se:

$$\tilde{\omega}_c = [t^2 + x(\cdots)]dx + x[1 + t + x(\cdots)]dt$$

Observe que a matriz jacobiana associada a $\tilde{\omega}$ em c é equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Isto corresponde ao **Caso 5**, de forma que ω se reduz à Equação (4-11).

Caso 3

Neste caso, $J_{(0,0)}^1(\omega) = -\lambda_2 y dx + \lambda_1 x dy$. Podemos supor que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = n$. Assim, ω pode ser escrito como

$$\omega = [-ny + (\cdots)]dx + [x + (\cdots)]dy.$$

Observe que existem exatamente dois pontos em C_ω , mais precisamente $c_1 = (1, 0)$ e $c_2 = (0, 1)$. Realizando o procedimento de blow-up ω em c_1 nas coordenadas (x, t) , $t = y/x$ obtêm-se

$$\tilde{\omega}_{c_1} = [t(1 - n) + x(\cdots)]dx + x[1 + x(\cdots)]dt$$

de forma que a matriz jacobiana é dada por:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ * & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n - 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, ω se reduz à 1-forma com autovalores $\tilde{\lambda}_1 = 1$ e existem três possibilidades para $\tilde{\lambda}_2$:

- Se $n = 0$ então $\tilde{\lambda}_2 = -1$ e a redução de ω pertence ao **Caso 4**.
- Se $n = 1$ então $\tilde{\lambda}_2 = 0$ e a redução de ω pertence ao **Caso 5**.
- Se $n > 1$ então $\tilde{\lambda}_2 = n - 1$ e fazendo o blow-up $n - 1$ vezes, temos que a redução de ω pertence ao **Caso 2**.

Analizemos agora o procedimento de blow-up de ω em c_2 nas coordenadas (t, y) , $t = y/x$ onde

$$\tilde{\omega}_{c_2} = y[-n + y(\cdots)]dt + [t(1 - n) + y(\cdots)]dy.$$

Assim, a matriz jacobiana é dada por:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 - n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

- Se $n = 0$ então $\tilde{\lambda}_1 = 1$ e $\tilde{\lambda}_2 = 0$, logo a redução de ω pertence ao **Caso 5**.
- Se $n = 1$ então $\tilde{\lambda}_1 = 0$ e $\tilde{\lambda}_2 = 1$, logo a redução de ω pertence ao **Caso 5**.
- Se $n > 1$ então $\tilde{\lambda}_1 < 0$ e $\tilde{\lambda}_2 > 0$, logo a redução de ω pertence ao **Caso 4**.

Isto completa a demonstração do teorema. $\square$

4.3

Existência de Integrais Primeiras

Ilustraremos com um problema concreto uma aplicação das técnicas utilizadas na seção anterior. Nesta seção faremos a demonstração detalhada de um teorema fundamental de J.-F. Mattei e R. Moussu (M-M) acerca da existência de integrais primeiras para determinadas folheações.

Lembramos que uma *integral primeira* holomorfa para uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ é uma função holomorfa não-constante $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ que é constante quando restrita às folhas de $\mathcal{F}$. Se ω representa a 1-forma que define $\mathcal{F}$, f é tal que $\omega \wedge df = 0$. Equivalentemente, as folhas de $\mathcal{F}$ são as componentes irredutíveis das superfícies de nível de f .

Nesta seção, pretendemos caracterizar topologicamente folheações que admitem uma integral primeira holomorfa. Trata-se do principal resultado de (M-M).

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa definida em $U \subset \mathbb{C}^2$, com uma singularidade isolada em $(0, 0)$. Suponha que f seja uma integral primeira holomorfa para $\mathcal{F}$. Então as seguintes condições são válidas:

1. Apenas um número *finito* de folhas de $\mathcal{F}$ acumulam em $(0, 0)$.
2. As folhas de $\mathcal{F}$ são fechadas como subconjuntos de $U \setminus \{(0, 0)\}$.

De fato, se uma tal função existe, o conjunto $f^{-1}(0)$ é o conjunto das separatrizes de $\mathcal{F}$. Lembramos que uma separatriz é apenas uma curva analítica irredutível, invariante por $\mathcal{F}$, contendo a singularidade. Mas f possui necessariamente um número finito de fatores irredutíveis, i.e. $f = g_1^{k_1} \dots g_n^{k_n} H$ (onde $H(0, 0) \neq 0$). Logo o número de separatrizes também tem que ser finito, já que são dadas pelas equações $\{g_i = 0\}$. Este é precisamente o conteúdo da Condição 1.

Como f é constante quando restrito às folhas, a Condição 2 também é válida. Em particular, uma folha L de $\mathcal{F}$ que não esteja contida no conjunto $f^{-1}(0)$ não pode se acumular em uma separatriz. Iremos utilizar esta observação frequentemente ao longo do texto.

Reciprocamente, uma folheação satisfazendo as Condições 1 e 2 admite uma integral primeira. Este é o conteúdo do seguinte teorema, que desempenhará um papel fundamental nesta seção.

Teorema 4.3.1 (Mattei-Moussu (M-M)) *Considere a folheação holomorfa $\mathcal{F}$ definida em $U \subset \mathbb{C}^2$ com uma singularidade isolada em $(0,0)$. Suponha que ela satisfaça as seguintes condições:*

1. *Apenas um número finito de folhas de $\mathcal{F}$ acumulam em $(0,0)$.*
2. *As folhas de $\mathcal{F}$ são fechadas como subconjuntos de $U \setminus \{(0,0)\}$.*

Então $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira holomorfa não-constante $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.

Antes de dar início à demonstração do teorema, considere duas folheações holomorfas com singularidades isoladas, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ definidas em uma vizinhança U da origem. Dizemos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são *topologicamente equivalentes* se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow U$, tal que $h(0,0) = (0,0)$ levando as folhas de $\mathcal{F}$ nas folhas de $\mathcal{F}'$. Segue do teorema acima que a existência de uma integral primeira holomorfa obedece o seguinte critério topológico: se $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira, então $\mathcal{F}'$ também admite.

Podemos dizer que a demonstração do Teorema 4.3.1 consiste de três etapas:

Parte 1: Se $\mathcal{F}$ satisfaz as Condições 1 e 2, então realizando sucessivas aplicações de blow-up (confira a Seção 4.2), as únicas singularidades irredutíveis encontradas na árvore de Seidenberg são aquelas em que ambos os autovalores λ_1 e λ_2 , e, além disso, $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$. Dizemos que estas singularidades pertencem ao *domínio de Siegel*.

Parte 2: Estudo de $\mathcal{F}$ em uma vizinhança de uma singularidade no domínio de Siegel. Em particular, encontramos uma caracterização para aquelas que possuem integral primeira holomorfa.

Parte 3: Extensão das “integrais primeiras” locais obtidas na **Parte 2** a uma vizinhança do divisor excepcional E . Se $\tilde{f}$ representa esta extensão, então $f = \pi_*\tilde{f}$ é a integral primeira desejada.

Agora abordamos cada uma destas etapas nas 3 seções subsequentes. Juntas, elas concluem a prova do Teorema de Mattei-Moussu.

4.3.1

Parte 1: Análise das Singularidades da Árvore de Seidenberg de $\mathcal{F}$

Começamos analisando as singularidades irredutíveis obtidas pelo procedimento de Seidenberg. De agora em diante assumiremos que $\mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 4.3.1.

Proposição 4.3.2 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação satisfazendo as Condições 1 e 2. Então as únicas singularidades irredutíveis existentes na árvore de Seidenberg de $\mathcal{F}$ são aquelas que possuem autovalores não-nulos λ_1 e λ_2 tal que o quociente λ_1/λ_2 pertence a $\mathbb{R}_-$.*

Conforme visto na seção anterior, toda singularidade de uma dada folheação $\mathcal{F}$ pode ser reduzida por sucessivas aplicações de blow-up, até que a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ apenas contenha singularidades simples com autovalores λ_1 e λ_2 em um dos seguintes casos:

- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, i.e., uma singularidade sela-nó.
- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, nem λ_1/λ_2 , nem λ_2/λ_1 são inteiros positivos.

Discutiremos as diferentes possibilidades separadamente.

Lema 4.3.3 *A árvore de Seidenberg não contém singularidades sela-nó.*

Prova. Por absurdo, suponha que o enunciado seja falso. Conforme visto em seções anteriores, existem coordenadas locais (x, y) em torno de uma singularidade sela-nó em que a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ é dada por

$$\omega(x, y) = [x(1 + \lambda y^p) + yR(x, y)]dy - y^{p+1}dx.$$

Observe que $\{y = 0\}$ é invariante pela folheação $\tilde{\mathcal{F}}$. A seguir, considere-mos a aplicação de holonomia associada a $\tilde{\mathcal{F}}$ e em relação a um círculo contido em $\{y = 0\}$ em torno na origem. Já vimos na Seção 3.2.1 que a holonomia é dada por $h(z) = z + z^{p+1} + \dots$ para z em alguma seção local transversa Σ .

Da estrutura dinâmica de h (em particular, da existência de coordenadas de Fatou) observamos que existem infinitos pontos acumulando em $0 \in \mathbb{C} \simeq \Sigma$ sob a iteração de h . Estes pontos naturalmente correspondem a folhas de $\mathcal{F}$ que se acumulam na parte regular de $\{y = 0\}$. Temos duas possibilidades.

Se $\{y = 0\}$ estiver contido no divisor excepcional, então será projetado em $(0, 0)$. Logo existiriam infinitas folhas acumulando na origem. Isto não é possível, já que estamos levando em conta a Condição 1.

Por outro lado, se $\{y = 0\}$ for transversal ao divisor excepcional, então será projetado por π como uma separatriz (lembramos que π é uma

aplicação própria). Existem infinitas folhas acumulando nesta separatriz, o que novamente é impossível, já que contradiz a Condição 2.

Em conclusão, a redução de ω não contém nenhuma singularidade selanó. $\square$

A seguir discutimos o caso de singularidades irredutíveis com autovalores λ_1, λ_2 diferentes de zero. Este tipo de singularidade é denominada *hiperbólica* se $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Lema 4.3.4 *Não existem singularidades hiperbólicas na árvore de Seidenberg.*

Prova. Pelo Teorema de Linearização de Poincaré (cf. Section 3.1) podemos supor que o campo vetorial associado a $\tilde{\mathcal{F}}$ é dado em coordenadas locais por

$$\tilde{X} = \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$$

Novamente, $\{y = 0\}$ é invariante pela folheação. Como antes, a fim de estudar o comportamento das folhas perto de $\{y = 0\}$, consideraremos a sua holonomia local.

Seja Σ uma seção transversal com parâmetro z . A folha da folheação passando por $(1, z) \in \mathbb{C}^2$ é dada por $F(t) = (e^{\lambda_1 t}, ze^{\lambda_2 t})$. A próxima vez que a folha atravessa Σ ocorre quando $t = \theta_1$, de forma que $e^{\lambda_1 \theta_1} = 1$. Em outras palavras, $\theta_1 = \frac{2\pi i}{\lambda_1}$. Assim, a aplicação de holonomia é dada por $h(z) = e^{2\pi i \lambda_2 / \lambda_1} z$. Entretanto, temos que $\text{Re}(2\pi i \lambda_2 / \lambda_1) \neq 0$ já que λ_2 / λ_1 não está em $\mathbb{R}$. Agora, iterando h , obtêm-se

$$h^n(z) = z r^n \alpha^n.$$

Podemos supor que $r = e^{-2\pi \text{Im}(\lambda_2 / \lambda_1)} < 1$. Se este não fosse o caso, seria suficiente trocar os papéis de λ_1 e λ_2 desde o início. Como $|r|^n |\alpha|^n$ tende a zero na medida em que n aumenta, segue que as folhas vizinhas se acumulam em $\{y = 0\}$.

Como antes, as Condições 1 e 2 impedem que este tipo de comportamento aconteça e concluímos que a folheação reduzida não pode conter este tipo de singularidade. $\square$

Lema 4.3.5 *A árvore de Seidenberg não contém singularidades com autovalores não-nulos tais que $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_+$.*

Pelo Teorema 3.1.2, o campo vetorial ainda é linearizável e $\{y = 0\}$ é invariante. Observe que neste caso, aplicação de holonomia não nos ajudará a concluir que este tipo de singularidade não ocorre. De fato, a holonomia é

da forma $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$, i.e. a holonomia é conjugada a uma rotação por θ de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

Entretanto, seguindo as retas radiais que conectam um ponto x_0 do plano $\{y = 0\}$ à origem, observamos que as folhas vizinhas acumulam na origem. De fato, a folha passando pelo ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ é dada por $(x_0 e^{\lambda_1 t}, y_0 e^{\lambda_2 t})$. Supondo que $\lambda_1 > 0$, então $x_0 e^{\lambda_1 t}$ tende a 0 se e somente se $t \rightarrow -\infty$. Como λ_2 também é positivo, $y_0 e^{\lambda_2 t}$ tende a zero. Finalmente, isso implica que existem infinitas folhas acumulando em $(0, 0)$.

Novamente, este tipo de singularidade não pode ocorrer. $\square$

Finalmente, chegamos a conclusão de que podemos assumir que $\tilde{\mathcal{F}}$ possui apenas singularidades com autovalores tais que $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$. Um último lema:

Lema 4.3.6 *Todas as componentes invariantes da árvore de Seidenberg são invariantes pela folheação correspondente.*

Prova. Se não fosse assim, existiriam infinitas separatrizes, o que contradiz nossas hipóteses. $\square$

Observação 4.3.7 O argumento utilizado no lema precedente pode ser estendido de forma a mostrar que uma singularidade possui infinitas separatrizes se e somente se, ao realizarmos uma sequência finita de blow-ups, obtivermos uma componente irreduzível do divisor excepcional total que *não* seja invariante pela folheação correspondente. Este tipo de singularidade é chamada de *dicrítica*.

Estes lemas nos levam à demonstração da Proposição 4.3.2, correspondendo à primeira parte da prova.

4.3.2

Parte 2: Existência de Integrais Primeiras Locais

Estudaremos em mais detalhes as únicas singularidades que aparecem na árvore de Seidenberg, i.e, aquelas que possuem autovalores tais que λ_1/λ_2 pertence a $\mathbb{R}_-$. Obtemos do Lema 2.3.7 que em coordenadas locais (x, y) , o campo vetorial é dado por:

$$\lambda_1 x[1 + h.o.t.]\partial/\partial x + \lambda_2 y[1 + h.o.t.]\partial/\partial y, \quad (4-12)$$

para $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$. Primeiramente, é preciso verificar se este campo vetorial é linearizável ou não. Estamos interessados em saber quando que dois campos vetoriais como acima (com λ_1, λ_2 fixos) são conjugados. A próxima proposição devida à J.-F. Mattei e R. Moussu é de importância fundamental, já que nos permite reduzir o problema ao de saber se a holonomia correspondente é ou não linearizável (conjugada).

Proposição 4.3.8 (Mattei-Moussu (M-M), (M)) *Suponha que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sejam dadas em coordenadas (x, y) pela Equação (4-12) com $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$. Denote por h_1 (resp. h_2) a holonomia do eixo $\{y = 0\}$ relativa a $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$). Então existe um difeomorfismo analítico ϕ definido em uma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ conjugando $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ se e somente se existe um difeomorfismo analítico φ definido em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$, conjugando h_1, h_2 .*

Existem dois casos bem diferentes a serem considerados quando a razão λ_1/λ_2 é racional ou não.

Primeiramente, suponha que $\lambda_1/\lambda_2 = -m/n$ onde $m, n \in \mathbb{N}$. Neste caso, a holonomia associada a $\mathcal{F}$ e a uma volta em torno da origem na separatriz $\{y = 0\}$, é dada por

$$h(z) = e^{-2\pi i n/m} z + \dots,$$

onde z é um parâmetro em uma seção local transversa a $\{y = 0\}$. Esta aplicação é linearizável se e somente se $h^m(z) = z$. Está claro que se h for linearizável, então $h^m(z) = z$. A recíproca não é óbvia, mas pode ser verificada observando que $f = (\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^{-i} h^i)^{-1}$ lineariza h . Quando a holonomia não for linearizável (i.e, $h^m(z) = z + \dots$) obtemos novamente o caso estudado anteriormente. Precisamente, a dinâmica das pétalas, analisada na Seção 3.3.2. Similar ao caso de uma sela-nó, isto não pode ocorrer já que haveria infinitas folhas acumulando em $\{y = 0\}$, o que contradiz nossas hipóteses.

Assim, podemos supor que h é linearizável. Da Proposição 4.3.8, o campo vetorial associado a $\tilde{\mathcal{F}}$ admite a forma local, dada em coordenadas (x, y) por

$$\tilde{X} = m x \frac{\partial}{\partial x} - n y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4-13)$$

Agora iremos lidar com o caso em que $\alpha = \lambda_1/\lambda_2$ é irracional. Como antes, a aplicação de holonomia é dada por $h(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \dots$. Entretanto, como α é irracional, a dificuldade de saber se h é ou não linearizável aumenta significativamente. O problema de encontrar os valores irracionais de α que fazem com que a holonomia h seja linearizável é conhecido como o “Problema de Siegel”. De fato, para certos valores de α , é possível obter difeomorfismos locais h como acima que não são linearizáveis.

Observação 4.3.9 Observe que não é difícil obter uma conjugação formal f que linearize qualquer h . Mais precisamente, resolvendo formalmente $f^{-1} \circ h \circ f(z) = \lambda z$, obtêm-se $f(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i z^i$, com $f_1 = 1$ e

$$f_i = \frac{1}{\lambda^i - \lambda} \left[f_i + \sum_{p=2}^{i-1} f_p \sum_{j_1 + \dots + j_p = i, h_{j_k} \geq 1} h_{j_1} \dots h_{j_p} \right].$$

A fim de lidar com os valores irracionais de α , primeiramente consideramos o caso linearizável. Então h é conjugado a uma rotação irracional de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Seja C o conjunto dos pontos de interseção entre a folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ passando por $(1, z_0) \in \mathbb{C}^2$ e o círculo $S = \{z \in \Sigma; |z| = z_0\}$. Como sempre, Σ é a seção transversa a $\{y = 0\}$ passando por $1 \in \mathbb{C}$. Como uma rotação irracional possui órbitas densas, segue que C é denso no círculo S . Em outras palavras, as folhas não são fechadas, o que contradiz a Condição 2. Em particular, qualquer possível integral primeira f , seria constante. De fato, a restrição de f a Σ é constante em círculos em torno de $0 \simeq \Sigma \cap \{y = 0\}$. Como resultado, f seria sempre constante.

Então ficamos reduzidos a discutir o caso em que h não é linearizável. Iremos mostrar que existem folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ que não são fechadas em vizinhanças arbitrariamente pequenas de $0 \in \Sigma$. Começamos com um lema simples atribuído a J. Lewowicz.

Antes de enunciá-lo, daremos algumas definições que serão úteis ao longo do texto. Seja U uma vizinhança de 0 , onde $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ esteja definida, holomorfa e injetiva. Seja V um subconjunto de U e $x \in V$.

Definição 4.3.10 *A V -órbita de x é o conjunto de pontos de V , obtidos ao iterarmos h positivamente (i.e., $h^p = h \circ \dots \circ h$, p vezes) e negativamente (i.e., $h^{-p} = h^{-1} \circ \dots \circ h^{-1}$, p vezes), juntamente com o próprio x (denotando por $h^0(x) = x$). Em outras palavras,*

$$O_V(x) = \{y \in V; y = h^i(x), i \in \mathbb{Z}\}$$

O número de iterações de x é o número de vezes que h é iterado, levando x em um ponto em $O_V(x)$. Ele é denotado por $\mu_V(x)$ e pertence a $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Observe que existem pontos x em V tais que $\mu_V(x) = \infty$ mas $\#O_V(x) < \infty$. Estes pontos são chamados de *periódicos* em V . Naturalmente, se $\mu_V(x)$ for finito, então $\#O_V(x)$ é necessariamente finito.

Definição 4.3.11 *Dizemos que um elemento $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ possui órbitas finitas se existe uma vizinhança aberta V arbitrariamente pequena de 0 onde h esteja definida, holomorfa e injetiva,*

$$\#O_V(x) < \infty,$$

para todo $x \in V$.

Lema 4.3.12 *Seja K uma vizinhança compacta conexa de $0 \in \mathbb{R}^n$ e h um homeomorfismo de K em $h(K) \in \mathbb{R}^n$, verificando $h(0) = 0$. Então existe um ponto x na fronteira ∂K de K tal que o seu número de iterações em K é finito ($\mu_K(x) = \infty$).*

Prova. Denotando o interior de K por $\text{int}(K)$. E seja $\mu_K(x)$ (resp. $\mu_{\text{int}(K)}(x)$) o número de iterações de x em K (resp. $\text{int}(K)$). Suponha, por contradição, que μ_K apenas atinge um número finito de valores na fronteira ∂K de K . Como K é compacto, μ_K é uniformemente limitado em ∂K . Em outras palavras, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_K|_{\partial K} < N < \infty.$$

Os seguintes não conjuntos abertos não-vazios de K :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in K; \mu_K(x) < N\} \supset \partial K \\ B &= \{x \in \text{int}(K); \mu_{\text{int}(K)}(x) \geq N\} \ni 0 \end{aligned}$$

Além disso, como $\mu_{\text{int}(K)}(x) \leq \mu_K$, os conjuntos são disjuntos. Observe que existe $x_0 \in K$ tal que x_0 não pertence a $A \cup B$. De fato, se não existisse, então todo $x \in K$ seria tal que $x \in A \cup B$, ou seja, $K = A \cup B$. Como K é conexo, teríamos que $K = A$ ou $K = B$, o que é impossível. Portanto, existe x_0 tal que $\mu_K(x_0) \geq N > \mu_{\text{int}(K)}(x_0)$. Segue que as órbitas x_0 em K e $\text{int}(K)$ são diferentes ($O_K(x_0) \neq O_{\text{int}(K)}(x_0)$). Em outras palavras, a órbita de x_0 passa por ∂K . Seja $y \in O_K(x_0) \cap \partial K$, então, $\mu_K(y) = \mu_K(x_0) \geq N$, o que contradiz $\mu_K|_{\partial K} < N$. $\square$

O Lema de Lewowicz (Lema 4.3.12) assegura a existência de pontos cujas órbitas nunca saem de uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$. Entretanto, não exclui a possibilidade de todos os pontos serem periódicos. Nesta direção, a seguinte proposição será de importância fundamental.

Proposição 4.3.13 *Se $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ não é periódica, então existem vizinhanças abertas U de 0 em $\mathbb{C}$ em que h é holomorfa, injetiva e para cada U , o conjunto de pontos $x \in U$ com U -órbita infinita é não-enumerável e 0 é um ponto de acumulação.*

A idéia básica por trás desta demonstração é a de considerar conjuntos U_n , para $n \in \mathbb{N}$ tais que $U_n = \{x \in U; h(x), \dots, h^n(x) \text{ estão definidos, e } h^n(x) = x\}$. Se o domínio de h^n fosse conexo, e $h^n \neq \text{id}$ então cada U_n seria um conjunto finito. Em particular, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ seria enumerável. Pelo lema, o conjunto de pontos com um número infinito de iterações é não-enumerável, logo existiria um conjunto

não-enumerável de pontos com órbita infinita. A dificuldade deste argumento está no fato que talvez o domínio de h^n seja desconexo e h^n talvez coincida com a identidade em uma componente conexa, mas não na que contém 0. É por isso que a prova desta proposição é um pouco mais sutil. De fato, precisamos levar em conta as diferentes componentes conexas do domínio de h^n .

Prova da Proposição 4.3.13. Seja D_{ρ_0} um disco fechado centrado em 0 de raio ρ_0 . Usando as mesmas notações do Lema 4.3.12, definimos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} P &= \{x \in D_{\rho_0}; \mu_{D_{\rho_0}}(x) = \infty, \#O_{D_{\rho_0}}(x) < \infty\} \\ F &= \{x \in D_{\rho_0}; \mu_{D_{\rho_0}}(x) < \infty, \#O_{D_{\rho_0}}(x) < \infty\} \\ I &= \{x \in D_{\rho_0}; \mu_{D_{\rho_0}}(x) = \infty, \#O_{D_{\rho_0}}(x) = \infty\} \end{aligned}$$

Naturalmente, $D_{\rho_0} = P \cup F \cup I$. Além disso, o Lema 4.3.12 implica que para todo $\rho \leq \rho_0$

$$(P \cup I) \cap \partial D_\rho \neq \emptyset.$$

Afirmção: Um dos conjuntos, ou P ou I (ou ambos) é não-enumerável.

De fato, pelo Lema 4.3.12, para cada disco compacto D_ρ , $\rho \leq \rho_0$ existe um ponto x_0 em sua fronteira com um número infinito de iterações. Logo existe um número *não-enumerável* de pontos x_0 em D_{ρ_0} tais que $\mu_{D_{\rho_0}}(x_0) = \infty$. Estes pontos pertencem a $I \cup P$, assim, ou P ou I tem que ser *não-enumerável*.

Com estas notações, basta mostrar que conjunto I é não-enumerável. Assim, devemos mostrar que se P é não-enumerável, então I necessariamente também o é. Faremos isso a seguir.

Antes de continuar, definimos os seguintes conjuntos contendo 0:

$$A_1 = D_{\rho_0}, \quad A_2 = D_{\rho_0} \cap h^{-1}(A_1), \quad \dots \quad A_n = D_{\rho_0} \cap h^{-1}(A_{n-1}), \quad \dots$$

Observe que A_n é precisamente o domínio de definição de h^n .

Seja C_n a componente (compacta) conexa de A_n que contém 0. Seja

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Em particular C é conexo.

Lema 4.3.14 *Podemos supor, sem perda de generalidade, que C é enumerável.*

Prova. Considere o caso em que C é não-enumerável. Suponha por absurdo, que I seja enumerável (e P não-enumerável). Então $I \cap C$ também seria enumerável. Agora consideramos $C \cap P$ e observamos que este conjunto tem que ser *não-enumerável*, caso contrário, C seria enumerável, já que $C \subset P \cup I$. Seja

$$C \cap P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n,$$

onde P_n é o conjunto dos $x \in C \cap P$ de período n .

Observe que existe um certo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que P_{n_0} é infinito, caso contrário, todos os P_n seriam finitos e $C \cap P$ seria enumerável. Sendo infinito, P_{n_0} possui um ponto de acumulação não-trivial em C_{n_0} . A aplicação h^{n_0} é holomorfa em uma vizinhança aberta U_0 de C_{n_0} e é a identidade em $P_{n_0} \cap U_0$, como este conjunto possui um ponto de acumulação em C_{n_0} , pelo Teorema de Identidade, $h^{n_0}(z) = z$ em U_0 . Por construção, C_{n_0} contém a origem, de forma que U_{n_0} é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$. Isto contradiz a hipótese de não-periodicidade de h . Logo, I é não-enumerável. $\square$

Levando em conta o lema precedente, iremos assumir que C consiste de um número enumerável de pontos.

Primeiramente observamos que existe $\rho < \rho_0$ tal que $C \cap \partial D_\rho = \emptyset$. Senão, C iria conter um ponto x_0 na fronteira de D_ρ para todo $\rho < \rho_0$. Isto é naturalmente impossível, já que C é enumerável. Daqui em diante, iremos fixar um certo $\rho > 0$.

A seguir, observamos que os conjuntos $C_1 \cap \partial D_\rho, (C_1 \cap C_2) \cap \partial D_\rho, (C_1 \cap C_2 \cap C_3) \cap \partial D_\rho, \dots$ formam uma sequência decrescente de compactos encaixados. Logo a interseção $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \cap \partial D_\rho$ é não-nula, a não ser que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C_{n_0} \cap \partial D_\rho = \emptyset$. O último caso tem que ocorrer, já que ρ foi escolhido de maneira que $C \cap \partial D_\rho = \emptyset$.

Seja K um compacto conexo em uma vizinhança de C_{n_0} , não intersectando as outras componentes conexas de A_{n_0} (se elas existirem). Em particular, tem-se $\partial K \cap A_{n_0} = \emptyset$.

Lema 4.3.15 *Para todo $x \in \partial K$ existe $m \leq n_0$ tal que $h^m(x)$ não pertence a D_ρ . Além disso, $\partial K \cap P = \emptyset$.*

Prova. Para verificar a existência de m , vamos supor por contradição que para todo $m \leq n_0$, $h^m(x)$ pertence a D_ρ , para $x \in \partial K$. Neste caso, x teria pelo menos n_0 iterações positivas de h . Isto significa que $x \in A_{n_0}$, o que contradiz a construção de K .

Além disso, se existisse um ponto periódico de D_{ρ_0} em ∂K , então x pertenceria a todo conjunto A_n . Em particular pertenceria a A_{n_0} , o que é uma contradição. $\square$

Antes de continuar a mostrar que I é não-enumerável, iremos definir os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} P' &= \{x \in K; \mu_K(x) = \infty, \#O_K(x) < \infty\} \\ F' &= \{x \in K; \mu_K(x) < \infty, \#O_K(x) < \infty\} \\ I' &= \{x \in K; \mu_K(x) = \infty, \#O_K(x) = \infty\}. \end{aligned}$$

Seja

$$P' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P'_n,$$

onde P'_n é o conjunto dos pontos periódicos em K de período n .

Lema 4.3.16 $P'_n = \text{int}(P'_n) \cup \partial P'_n$, onde $\text{int}(P'_n)$ é aberto sem fronteira e $\partial P'_n$ é finito, consistindo de pontos isolados.

Prova. Seja p o limite de uma sequência de pontos em P'_n . Observe que não estamos assumindo que esta sequência seja constituída por pontos dois-a-dois distintos, de forma que todo ponto pertencente a P'_n automaticamente satisfaz esta condição. Claramente, é suficiente mostrar que existe uma vizinhança de p contida em P'_n . Por definição, existe uma vizinhança aberta conexa W de p , onde h^n está definida e holomorfa. Além disso, se p não for um ponto isolado, h^n é a identidade em $P'_n \cap W$. Logo, segue do Teorema de Identidade, que $h^n(z) = z$ em W . Por outro lado, a K -órbita de p não intersecta ∂K (cf. Lema 4.3.15). Logo W pode ser escolhido suficientemente pequeno de forma que $h(W), h^2(W), \dots, h^n(W) \subset \text{int}(K)$. Isto mostra que $W \subset \text{int}(P'_n)$. Assim, P' consiste de pontos isolados e de $\text{int}(P'_n)$. Claramente, o número de pontos isolados tem que ser finito, o que implica o lema. $\square$

Lema 4.3.17 A fronteira de P' é enumerável (consistindo da união dos pontos isolados de P'_n , para $n \in \mathbb{N}$).

Prova. Primeiramente consideremos $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{int}(P'_n)$. Naturalmente é um conjunto aberto, iremos mostrar que é sem fronteira. Suponha por absurdo, que exista p na fronteira de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{int}(P'_n)$. Existe uma sequência de pontos $\{p_k\}$ convergindo para p . Fixe um disco suficientemente pequeno em torno de p e escolha um ponto $p_k \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{int}(P'_n)$ pertencendo a esta bola. Logo existe n_0 tal que $p_k \in P'_{n_0}$. Claramente p_k pertence a K , já que $P' \subseteq K$. Além disso, p pertence a K também, já que K é fechado. Como K é conexo (por construção), existe um caminho $c : [0, 1] \rightarrow K$ unindo p_k a p (i.e., $c(0) = p_k$, $c(1) = p$). Como p_k pertence a P'_{n_0} e p não, existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $c(t_0)$ pertence à

fronteira de $\text{int}(P'_{n_0})$. Isto contradiz o lema anterior. Assim, $\partial P'$ é enumerável, como união de conjuntos finitos $\partial P'_n$. $\square$

Finalmente, temos um último lema simples que nos permitirá concluir a prova.

Lema 4.3.18 *F' é um conjunto aberto de K .*

Prova. Observe que, por definição, para pontos $x \in F'$, $\mu_K(x) + 1 = \#O_K(x)$. Seja

$$F' = \bigcup_{n \geq 0} F'_n,$$

onde F'_n é o conjunto dos pontos de F' tais que $\mu_K(x) = n$. Afirmamos que F'_n são conjuntos abertos. De fato, por continuidade de h , todo ponto de F'_n possui uma vizinhança de pontos que também têm n iterações em K . Como F' é a união de abertos, ele próprio é um conjunto aberto. $\square$

Para concluir a proposição procedemos da seguinte maneira. Claramente temos

$$K = \text{int}(P') \cup F' \cup (I' \cup \partial P').$$

Iremos analisar separadamente as seguintes possibilidades:

- Suponha que $F' = \emptyset$.

Então $\partial K \subseteq \text{int}(P') \cup (I' \cup \partial P')$. Porém, pelo Lema 4.3.15, ∂K não contém pontos periódicos, logo, $\partial K \subseteq I' \cup \partial P'$. Mas $\partial P'$ é enumerável, pelo Lema 4.3.17 e por construção ∂K é não enumerável. Então concluímos que I' é não-enumerável.

- Suponha que $F' \neq \emptyset$ e $\text{int}(P') = \emptyset$.

Neste caso, temos que $K = F' \cup (I' \cup \partial P')$. Observe que para valores suficientemente pequenos de $r > 0$, os discos compactos D_r estão contidos em K . Assim, pelo Lema de Lewowicz (Lema 4.3.12), temos que $\partial D_r \cap (I' \cup \partial P')$ é não-vazio. Portanto, $(I' \cup \partial P')$ é não enumerável, e como antes, I' também tem que ser não-enumerável.

- Suponha que $F' \neq \emptyset$ e $\text{int}(P') \neq \emptyset$.

Observe que $\text{int}(F')$ e $\text{int}(P')$ são conjuntos abertos não-vazios de $\text{int}(K)$. Logo $K \setminus (\text{int}(F') \cup \text{int}(P'))$ é não-vazio, então é não-enumerável. Naturalmente, ele está contido em $(I' \cup \partial P')$ assim, I' também é não-enumerável.

Isto completa a demonstração da Proposição 4.3.13 $\square$

Proposição 4.3.19 *Suponha que a holonomia associada a $\tilde{\mathcal{F}}$ e a uma seção local transversa Σ seja dada por $h = e^{2\pi i \alpha} z + \dots$, onde α é irracional. Então*

existem folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ que não são fechadas em vizinhanças arbitrariamente pequenas de 0.

Prova. Segue da proposição precedente que existe uma sequência de pontos $p_n \in L \cap \Sigma$, dois-a-dois disjuntos, acumulando em p (i.e., existe $x \in \partial K \subset \Sigma$, tal que $\mu_K(x) = \infty$ e $\#O_K(x) = \infty$). Mostraremos que a folha L passando por p_n não é fechada.

Suponha que o ponto de acumulação p pertence a L , caso contrário a afirmação seria trivial. Suponhamos que exista um ponto isolado q de $L \cap \Sigma$. Considere um caminho em L ligando estes dois pontos, por continuidade da aplicação de holonomia, existe uma sequência de pontos de $L \cap \Sigma$ acumulando em q . Ou seja, $L \cap \Sigma$ não possui pontos isolados. Portanto, o fecho $\overline{L \cap \Sigma}$ de $L \cap \Sigma$ é não-enumerável (sendo um conjunto perfeito). Todavia, $L \cap \Sigma$ é enumerável, já que toda folha da folheação pode intersectar uma seção transversal apenas um número enumerável de vezes. Assim, $L \cap \Sigma$ possui pontos de acumulação que não estão contidos nele mesmo. Em particular, L não é fechado. $\square$

Proposição 4.3.20 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação satisfazendo as Condições 1 e 2, então a sua árvore de Seidenberg contém apenas singularidades que admitem integral primeira local. Em particular, a holonomia local das suas separatrizes é finita.*

Prova. De fato, a discussão precedente nos permite concluir que a única possibilidade que não contradiz as hipóteses é quando $\lambda_1/\lambda_2 = -m/n$ é um número racional. Segue da Proposição 4.3.8 que o campo vetorial associado a $\mathcal{F}$ é holomorficamente conjugado a um linear, localmente dado pela Equação (4-13). Observe que ele tem como solução $(x_0 e^{mt}, y_0 e^{-nt})$, logo existe uma integral primeira local. Mais precisamente, $f(x, y) = x^n y^m$ é constante sobre as órbitas do campo vetorial. $\square$

Agora retornamos à Proposição 4.3.8 e damos uma idéia dos princípios básicos por trás da sua demonstração.

Prova da Proposição 4.3.8. Suponha que exista um difeomorfismo holomorfo φ conjugando as holonomias h_1 e h_2 relativas às folheações $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, respectivamente e a um círculo S^1 contornando a origem. Seja $D(\varepsilon)$ um disco em uma seção local Σ transversa a $\{y = 0\}$ no ponto 1, de raio $\varepsilon > 0$ cuja imagem por h_1 ainda esteja contida na vizinhança previamente escolhida.

Lembramos que o campo vetorial X , associado a $\tilde{\mathcal{F}}$ é dado por:

$$X = \lambda_1 x[1 + h.o.t.]\partial/\partial x + \lambda_2 y[1 + h.o.t.]\partial/\partial y.$$

Observe que longe de $\{x = 0\}$, as folhas da folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ são transversas às retas verticais complexas, i.e., às fibras de $\pi_1(x, y) = x$.

Primeiramente, definimos uma aplicação holomorfa ϕ no toro sólido $S^1 \times D(\varepsilon)$. Fazemos isso, levantando caminhos γ , em relação a π_1 , ao longo de S^1 que ligam 1 a $e^{i\theta_0}$, a um caminho γ_1 na folha L_1 de $\mathcal{F}_1$ que passa por $z \in \sigma$. Observe que esse levantameto está bem-definido, já que as folhas são transversas às fibras de π_1 . Também levantamos, com relação a π_1 , γ a um caminho γ_2 na folha L_2 de $\mathcal{F}_2$ passando por $\varphi(z)$. Agora estendemos o difeomorfismo ϕ , declarando que ϕ leva a extremidade final de γ_1 à extremidade final de γ_2 . Devemos mostrar que esta extensão de ϕ está bem-definida quando γ trata-se de uma volta em torno de $0 \in \{y = 0\}$. Mas isso é claro, já que a extremidade final de γ_1 (resp. γ_2) é, por construção a imagem de z por h_1 (resp. h_2) e temos que $\varphi \circ h_1 = h_2 \circ \varphi$. Logo concluímos que ϕ está bem-definido em $S^1 \times D(\varepsilon)$.

A seguir, pretendemos estender ϕ holomorficamente para uma vizinhança de $(0, 0)$ e de forma que ainda conjugue as folheações. Considere as retas radiais R_{θ_0} ligando cada ponto $e^{i\theta_0}$ em S^1 à origem. Seja L_1 a folha de $\mathcal{F}_1$ passando por $(e^{i\theta_0}, z) \in S^1 \times D(\varepsilon)$ e γ_{θ_0} o caminho em L_1 tal que $\Pi(\gamma_{\theta_0}) = R_{\theta_0}$. Analogamente, seja L_2 a folha de $\mathcal{F}_2$ que passa por $\phi(e^{i\theta_0}, z)$ e η_{θ_0} o caminho em L_2 que se projeta em R_{θ_0} por π_1 . Definimos ϕ levando γ_{θ_0} em η_{θ_0} . Por construção, ϕ é uma conjugação holomorfa entre $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ em seu domínio. Observe que o domínio de ϕ é precisamente o saturado de Σ por $\mathcal{F}$, que denotaremos por $\mathcal{F}_\Sigma$.

Todavia, note que *a priori*, na medida em que seguimos as retas radiais em direção à origem, a união de $\mathcal{F}_\Sigma$ e $\{x = 0\}$ talvez não defina uma vizinhança de $(0, 0)$.

Mais precisamente, revisitemos a construção de ϕ ao longo das retas radiais R_{θ_0} . Por exemplo, considere esta construção sobre a reta radial R_0 , unindo $1 = \Sigma \cap \{y = 0\}$ e $0 \in \mathbb{C} \simeq \{y = 0\}$. Por definição, começamos com um ponto $z_0 \in \Sigma$ e consideramos o caminho $\gamma_{z_0} : [0, 1] \rightarrow L_{z_0}$, $\gamma(0) = z_0$, que levanta apenas um segmento da reta radial R_0 em $\{y = 0\}$, indo de 1 até o ponto q , perto de $0 \in \mathbb{C}$. Seja Σ_{z_0} o conjunto consistindo das extremidades finais, $\gamma_{z_0}(1)$ dos caminhos γ_{z_0} como acima, para todo $z \in \Sigma$. Em particular, Σ_{z_0} está contido na reta vertical $\{x = q\}$. A dificuldade em assegurar que ϕ nos conduzirá a uma conjugação definida em torno de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, está relacionada com o fato de que Σ_{z_0} talvez não contenha um disco uniforme em torno de $0 \in \mathbb{C}$ na medida em que $q \rightarrow 0 \simeq (0, 0)$.

Em seu manuscrito, (M), J.-F. Mattei estima o tamanho dos conjuntos Σ_{z_0} como acima (para todas as folhas radiais envolvidas e não apenas no

exemplo específico de R_0). O resultado fundamental em (M) é a existência de um $\varepsilon > 0$ uniforme, tal que todo conjunto Σ_{z_0} contém uma bola de raio ε em torno de $0 \in \mathbb{C}$. Em particular, ele obteve:

Proposição 4.3.21 (Mattei (M)) *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação com autovalores λ_1 e λ_2 , tais que $\operatorname{Re}(\lambda_1/\lambda_2) < 0$, então $\mathcal{F}_\Sigma \cup \{x = 0\}$ contém uma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$.*

A estimativa de um $\varepsilon > 0$ uniforme como acima é feito integrando ao longo de R_{θ_0} a equação diferencial que induz a folheação $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$). Neste ponto é que a suposição de $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$ desempenha um papel importante.

Este comportamento fica particularmente claro quando consideramos EDOs *reais* com autovalores reais λ_1 e λ_2 satisfazendo $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$. De fato, isto nos daria a figura clássica do plano de fase de uma sela. (cf. Figura 4.1).

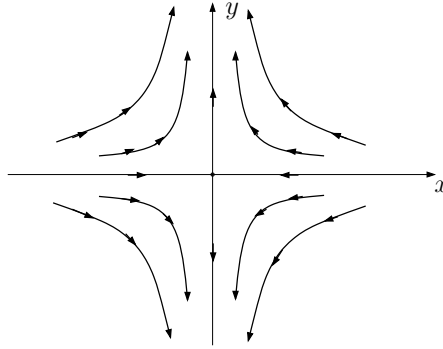


Figura 4.1: Espaço de Fase de uma sela.

Observe ainda, que se considerarmos o caso em que $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, a afirmação seria falsa. De fato usando uma notação análoga, os conjuntos Σ_{z_0} estariam contidos em bolas com raios convergindo a zero quando $q \rightarrow 0 \simeq (0, 0)$.

Apesar do manuscrito do Mattei não ter sido publicado, pode-se encontrar uma extensão deste resultado para dimensões superiores em (R2).

Retornemos então à demonstração da Proposição 4.3.8. Enquanto que ϕ é holomorfa em seu domínio, este domínio claramente não contém $\{x = 0\}$. Para estender ϕ a $\{x = 0\}$ é suficiente notar que ϕ é limitado por construção. Por outro lado, também sabemos que ϕ está definido em $U \setminus \{x = 0\}$, onde U é uma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Assim, a extensão de ϕ a $\{x = 0\}$ segue imediatamente do Teorema de Extensão de Riemann. Com isso finalizamos a demonstração de Proposição 4.3.8. $\square$

Isto conclui a segunda parte da demonstração do Teorema de Mattei-Moussu.

4.3.3

Parte 3: Extensão a uma Integral Primeira Global

Nesta parte, pretendemos estender as integrais primeiras locais, obtidas na seção anterior, a uma integral primeira global definida em uma vizinhança do divisor excepcional do “blow-up” da folheação. Naturalmente, isto implica a existência de uma integral primeira da folheação original, resultando o Teorema 4.3.1.

Para explicar a idéia da construção, primeiramente suponha que uma única aplicação de “blow-up” seja suficiente para obter singularidades reduzidas $p_1, \dots, p_n$ no divisor excepcional $E \simeq \mathbb{CP}(1)$. Segue do que precede que estas singularidades admitem integrais primeiras locais. Também ficará evidente que este caso contém as principais dificuldades da construção geral.

A idéia básica é a de estender as integrais primeiras em torno de singularidades ao longo das folhas da folheação. Se mostrarmos que uma tal extensão está bem-definida, então a integral primeira estará definida em uma vizinhança do divisor excepcional. De fato, pela estimativa de Mattei (Proposição 4.3.21), o saturado de uma seção transversal local Σ_i pela folheação contém uma vizinhança das singularidades p_i (exceto pelas separatrizes em cada p_i que são transversas a $E = \pi^{-1}(0, 0)$). Consequentemente, a extensão estaria definida em uma vizinhança de $\mathbb{CP}(1)$, já que pode ser novamente estendida às separatrizes transversas graças ao Teorema de Extensão de Riemann.

A fim de estender a integral primeira mencionada, é necessário estudar a *holonomia projetiva* de $\tilde{\mathcal{F}}$. Observe que $E = \pi^{-1}(0, 0)$ menos as singularidades $\{p_1, \dots, p_n\}$ é uma folha regular de $\tilde{\mathcal{F}}$. A holonomia associada a esta folha, denominada holonomia projetiva de $\tilde{\mathcal{F}}$ (ou de $\mathcal{F}$), nos dá uma representação

$$\rho : \Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$$

onde $\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\})$ é o grupo fundamental de $E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. No que se segue, não faremos distinção entre a holonomia projetiva de $\tilde{\mathcal{F}}$ e o subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ definido como imagem de ρ .

Lema 4.3.22 *A holonomia projetiva de $\tilde{\mathcal{F}}$ é finita (i.e., $\rho(\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}))$ é um subgrupo finito de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$).*

Prova. Note que $\rho(\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}))$ é Abeliano. Se não fosse bastaria considerar $h \neq \text{id}$ da forma $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$ para $f, g \in \rho(\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}))$. Observe entretanto, que $h'(0) = f'(0)g'(0)(f'(0))^{-1}(g'(0))^{-1} = 1$, i.e., h é tangente à identidade. Então a dinâmica local de h é a de pétalas (cf.

Seção 3.2.2), logo existem infinitas folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ acumulando em $E = \pi^{-1}(0, 0)$. Estas folhas produzem um número infinito de folhas de $\mathcal{F}$ acumulando em $(0, 0)$ o que é impossível.

Completamos a demonstração, observando que $\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\})$ é gerado por pequenos círculos em torno das singularidades p_i , ($i = 1, \dots, n$). Assim, $\rho(\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}))$ é gerado pelas holonomias locais h_i associadas a estas singularidades. Mas cada h_i tem ordem finita, graças à Proposição 4.3.13. Como $\rho(\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}))$ é Abeliano, e o resultado segue. $\square$

Lema 4.3.23 *O grupo $G = \rho(\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}))$ é, de fato, cíclico.*

Prova. Considere o seguinte grupo:

$$G' = \{f'(0); f \in G\}$$

Considere o homomorfismo $\alpha : G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \rightarrow G' \subset \mathbb{C}^*$ que associa a cada elemento f de G a sua derivada em 0. Afirmamos que este homomorfismo é injetivo, e portanto uma bijeção em sua imagem. De fato, suponha que f_1 e f_2 são elementos *distintos* de G e tais que $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$. Então $f = f_1 \circ f_2^{-1} \neq \text{id}$ e $f'(0) = 1$. Ou seja, f tem ordem infinita, o que é impossível, já que o grupo é finito.

Seja f um elemento de G . A derivada $f'(0)$ tem norma igual a 1 já que f tem ordem finita. Em outras palavras, G' é um subgrupo de S^1 identificado com o número complexo de norma 1. Um subgrupo discreto de S^1 é cíclico: para encontrar o gerador, basta escolher o elemento de “menor” argumento (diferente de 1). Em particular, G' é cíclico, pois é finito. Finalmente, como α induz uma bijeção entre G e G' concluímos que G é cíclico. $\square$

Antes de dar prosseguimento, faremos um exemplo simples de uma folheação com integral primeira global f .

Como antes, estamos considerando o caso em que apenas um “blow-up” da folheação nos dá as singularidades p_1, p_2, p_3 no divisor excepcional E , todas no domínio de Siegel. Elas são obtidas como a interseção de E com as transformações próprias das separatrizes de $\tilde{\mathcal{F}}$ (que é simplesmente o conjunto $f^{-1}(0)$). Suponha que a integral primeira seja dada pelo polinômio

$$f(x, y) = x^{n_1} y^{n_2} (x - y)^{n_3}.$$

Observe que o campo vetorial X , associado à folheação $\mathcal{F}$, tendo f como sua integral primeira, seja dado por

$$X = \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

De fato, a 1-forma associada a X é $\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. Como $\omega \wedge df = 0$, f é, por definição uma integral primeira de $\mathcal{F}$.

Analizemos o “blow-up” da folheação em uma vizinhança da sua singularidade dada pela interseção do divisor excepcional $\pi^{-1}(0,0)$ com a transformada própria da separatriz $y = 0$. Podemos usar a coordenadas (x, y) , onde $\pi(x, t) = (x, tx)$

$$\begin{aligned}\pi^*(X) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t/x & 1/x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_2x^{(n_1+n_2+n_3-1)}t^{(n_2-1)}(1-t)^{n_3} - n_3x^{(n_1+n_2+n_3-1)}t^{n_2}(1-t)^{(n_3-1)} \\ -n_1x^{(n_1+n_2+n_3-1)}t^{n_2}(1-t)^{n_3} - n_3x^{(n_1+n_2+n_3-1)}t^{n_2}(1-t)^{(n_3-1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n_2x^{(n_1+n_2+n_3-1)}t^{(n_2-1)}(1-t)^{n_3} - n_3x^{(n_1+n_2+n_3-1)}t^{n_2}(1-t)^{(n_3-1)} \\ x^{(n_1+n_2+n_3-2)}t^{n_2}(1-t)^{(n_3-1)}[-n_1 - n_2 - n_3 + t(n_1 + n_2 + n_3)] \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Eliminando os fatores em comum, $x^{(n_1+n_2+n_3-2)}t^{(n_2-1)}(1-t)^{(n_3-1)}$ a folheação permanece a mesma, o blow-up do campo vetorial $\tilde{X}$ pode ser dado por

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= [n_2x(1-t) - n_3xt] \frac{\partial}{\partial x} + t[-n_1 - n_2 - n_3 + t(n_1 + n_2 + n_3)] \frac{\partial}{\partial t} \\ &= n_2x[1 + h.o.t] \frac{\partial}{\partial x} - (n_1 + n_2 + n_3)t[1 + h.o.t] \frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned}$$

Assim, os autovalores associados a $\tilde{X}$ em uma vizinhança da singularidade p_2 na separatriz $\{y = 0\}$ são $\lambda_1 = -(n_1 + n_2 + n_3)$ e $\lambda_2 = n_2$. Lembrando a discussão anterior, concluímos que a holonomia local é dada por $h_2(z) = e^{-2\pi i n_2/(n_1+n_2+n_3)}z$. Analisando as outras duas singularidades p_1 na separatriz $\{x = 0\}$ e p_3 em $\{x = y\}$, fazendo cálculos análogos, observamos que as suas holonomias são dadas respectivamente, por $h_1(z) = e^{-2\pi i n_1/(n_1+n_2+n_3)}z$ and $h_3(z) = e^{-2\pi i n_3/(n_1+n_2+n_3)}z$.

O caso geral de uma integral primeira polinomial, dado por k separatrizes,

$$P(x, y) = x^{n_1}y^{n_2}(x - y)^{n_3}(x - \alpha_4y)^{n_4} \dots (x - \alpha_ky)^{n_k}$$

é análogo. Em cada p_i a holonomia é dada por $h_i(z) = e^{-2\pi i n_i/(n_1+\dots+n_k)}z$, onde n_i é a multiplicidade da separatriz que contém p_i . Observe que fixamos 3 separatrizes, i.e., $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ e $\{x - y = 0\}$. Sempre é possível fazer isso, sem perda de generalidade, i.e., podemos supor que 3 das singularidades são produzidas por estas separatrizes. De fato, como $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ age transitivamente em triplas de pontos em $\mathbb{CP}(1)$, i.e., sempre existe uma transformação levando p_1, p_2 e p_3 em quaisquer 3 pontos distintos de $\mathbb{CP}(1)$. Assim, a normalização desejada pode ser obtida por uma mudança linear de coordenadas.

Naturalmente, o campo vetorial X que possui P como integral primeira, é um polinômio homogêneo de grau $n_1 + \dots + n_k - 1$. Assim, a folheação associada a X é preservada por homotetias. De fato, têm-se $X(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{(n_1 + \dots + n_k - 1)} X(x, y)$, para $\lambda \in \mathbb{C}^*$, de forma que a “direção” determinada por X nos pontos (x, y) e $(\lambda x, \lambda y)$ é a mesma. Isso implica que as aplicações de holonomia h associadas a folha $E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ (i.e., os elementos do grupo de holonomia projetiva de $\mathcal{F}$, $\tilde{\mathcal{F}}$) comuta com homotetias. Isso pode ser visto em detalhes no seguinte

Lema 4.3.24 *Se $X(x, y) = F(x, y)\partial/\partial x + G(x, y)\partial/\partial y$ for homogêneo, então o grupo de holonomia projetiva h é linear. Em outras palavras, os elementos do grupo $\rho(\Pi_1(\mathbb{CP}(1) \setminus \{p_1, \dots, p_k\}))$ são aplicações lineares de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Em particular todo o grupo é Abeliano.*

Prova. Seja $\mathcal{F}$ a folheação associada a X . Como X é homogêneo, as separatrizes de $\mathcal{F}$ são retas radiais. No complemento das separatrizes, as folhas de $\mathcal{F}$ são transversas às retas verticais complexas de $\mathbb{C}$. De maneira que $\tilde{X}$ é da forma

$$\tilde{X} = xF(1, t)\frac{\partial}{\partial x} + (G(1, t) - tF(1, t))\frac{\partial}{\partial t}, \quad (4-14)$$

Podemos parametrizar as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ por $t \rightarrow (\varphi(t), t)$. De fato, fora das transformadas próprias das separatrizes de $\mathcal{F}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ é transversa à fibração de Hopf dada nestas coordenadas por $(x, t) \mapsto t$, onde t é a coordenada natural ao longo do divisor excepcional. Assim, o fato de existir uma parametrização para as folhas de $\mathcal{F}$, nos dá a seguinte equação diferencial:

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t), \quad (4-15)$$

onde $A(t) = \frac{F(1, t)}{G(1, t) - tF(1, t)}$. Observe que a aplicação $\varphi_{t_0} : x \mapsto \varphi(t_0, x)$ onde t_0 está fixo, e x é a condição inicial, é linear. De fato, se φ_1, φ_2 forem soluções de (4-15), a sua soma $\varphi_1 + \varphi_2$ bem como o produto $c\varphi_1$, $c \in \mathbb{C}$, também são soluções de (4-15). Assim, $\varphi_{t_0}(x_1, x_2) = \varphi_{t_0}(x_1) + \varphi_{t_0}(x_2)$ e $\varphi_{t_0}(ct_0) = c\varphi_{t_0}(x)$. Segue que $\varphi_{t_0}(x)$ é da forma $\lambda(t_0).x$. Em particular, as aplicações de holonomia são lineares. De fato, a coordenada $\partial/\partial t$ em (4-14) depende somente de t , de forma que as aplicações de holonomia coincidem com os fluxos de “tempo t_0 ”.

□

Retornando ao exemplo, temos que os geradores $h_1, \dots, h_k$ são finitos. Portanto, a holonomia projetiva corresponde ao grupo de rotações de ordem $n_1 + \dots + n_k$. De fato, eles podem ser escolhidos como sendo as holonomias locais em torno das singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Consideremos nossa folheação inicial $\mathcal{F}$ satisfazendo as Condições 1 e 2 do Teorema de Mattei-Moussu. Lembramos que estamos supondo que as

singularidades da árvore de Seidenberg de $\mathcal{F}$ podem ser reduzidas com um único “blow-up”. Para fixar notações, suponha que $\tilde{\mathcal{F}}$ tem k singularidades reduzidas, $p_1, \dots, p_k$.

Consideremos a folheação $\mathcal{F}_P$ que admite uma integral primeira polinomial P , tal que $\tilde{\mathcal{F}}_P$ possui precisamente as mesmas singularidades $p_1, \dots, p_k$ que $\tilde{\mathcal{F}}$. Lembramos que a folheação $\tilde{\mathcal{F}}_P$ admite uma fibração transversa ao divisor excepcional e tal que as separatrizes são fibras, que é simplesmente a fibração de Hopf. Ela realiza $\tilde{\mathbb{C}}^2$ como um fibrado de retas em $\mathbb{CP}(1)$ (projeção ao longo das transformadas próprias das retas radiais de $\mathbb{C}^2$).

Naturalmente, poderíamos nos perguntar se $\mathcal{F}$ é na realidade conjugada à nossa folheação “modelo” $\mathcal{F}_P$. Se isto for verdade, então a existência de uma integral primeira para $\mathcal{F}$ seria um corolário. Tomemos a identificação óbvia do divisor excepcional E (associado ao “blow-up” de $\mathcal{F}$) com o divisor excepcional do “blow-up” de $\mathcal{F}_P$, que também será denotado por E . Naturalmente, $E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ é uma folha da folheação $\tilde{\mathcal{F}}$. Além disso, lembramos que a holonomia projetiva em ambos os casos é cíclica, de forma que elas coincidem.

O problema de decidir se $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_P$ são conjugadas, é um caso particular do estudo dos espaços modulares para folheações holomorfas.

Teorema 4.3.25 *Suponha que exista uma fibração Π , transversa ao divisor excepcional, e tal que as transformadas próprias de $\mathcal{F}$ sejam fibras. Então as folheações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_P$ são holomorficamente conjugadas.*

Prova. As hipóteses acerca da existência de uma fibração transversa em uma vizinhança da origem nos permite levantar caminhos de $E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ em caminhos nas folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$. O método que utilizaremos é essencialmente o mesmo que usamos na demonstração da Proposição 4.3.8.

Seja h uma conjugação entre os grupos de holonomia de $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_P$ representados em Σ . Dado um ponto $z \in \Sigma$ e um caminho $\gamma \subseteq E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ podemos levantar γ com relação a Π em um caminho $\tilde{\gamma}$ contido na folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ que passa por $z \in \Sigma$. Analogamente, γ também pode ser levantado com relação à fibração de Hopf em um caminho contido em uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}_P$.

A fim de construir uma conjugação entre $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_P$ procedemos como se segue. Consideremos $z \in \Sigma$ e um caminho $\gamma \subseteq E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ como acima. Seja $\tilde{\gamma}_1$ o levantamento de γ com relação a Π na folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ passando por z . Semelhantemente, seja $\tilde{\gamma}_2$ o levantamento de γ com relação à fibração de Hopf na folha de $\tilde{\mathcal{F}}_P$ passando por $h(z)$. A seguir, impomos que H leve o ponto final de $\tilde{\gamma}_1$ no extremo de $\tilde{\gamma}_2$. Esta aplicação está bem-definida, pois as holonomias projetivas são conjugadas. Além disso, graças à estimativa de Mattei, (Proposição 4.3.21), H está definido na vizinhança de cada singularidade

p_i , exceto pelas separatrizes não contidas no divisor excepcional. Como antes, usamos o Teorema de Extensão de Riemann para definir H nas separatrizes. $\square$

Sendo assim, o problema de encontrar uma conjugação como a desejada, reside apenas na existência de uma fibração em $E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ tendo as referidas separatrizes como fibras. Entretanto, a existência desta fibração somente pode ser garantida se o número de singularidades é no máximo 4. Um contra-exemplo para o caso de 5 singularidades pode ser visto em (B-M-S). Isso nos impede de deduzir o Teorema 4.3.1 de um resultado forte relacionado com espaços modulares de folheações. Assim, a fim de tratar o caso geral, não podemos contar necessariamente com a conjugação de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_P$. Na verdade, a existência desta fibração é uma suposição bem mais forte do que o que realmente é necessário para resolver o problema de se obter uma integral primeira.

De fato, não se faz necessária uma aplicação que conjugue as folhas de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_P$, na verdade, basta encontrar ϕ que seja *constante* ao longo das folhas de $\mathcal{F}$ e definida em uma vizinhança de E . Faremos isso a seguir.

Prova do Teorema 4.3.1 no caso em que um único “blow-up” se faz necessário. Daqui para frente, consideremos uma folheação $\mathcal{F}$ e o seu “blow-up” $\tilde{\mathcal{F}}$. Considere novamente a seção transversa Σ para $\tilde{\mathcal{F}}$. Conforme visto, a holonomia projetiva de $\tilde{\mathcal{F}}$ é finita e cíclica. Seja z uma coordenada local em Σ em que o gerador da holonomia de $\tilde{\mathcal{F}}$ seja dado por

$$z \mapsto e^{2\pi i/m} z.$$

A seguir, consideramos a função $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ dada nestas coordenadas por $h(z) = z^m$. Claramente, h é invariante pelo grupo de holonomia da folha $E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Agora estendemos h a uma função H , impondo o seguinte,

1. H coincide com h em Σ .
2. H é constante sobre as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ intersectando Σ .

A invariância de h pelo grupo de holonomia projetiva implica que H está bem-definido. A estimativa de Mattei assegura que H está definido em uma vizinhança de E menos as separatrizes. Pelo Teorema de Extensão de Riemann, uma extensão contínua de H às separatrizes é automaticamente holomorfa. Finalmente apenas precisamos verificar que H pode ser continuamente estendida às separatrizes, definindo $H = 0$ sobre elas. Isto segue imediatamente, observando que uma sequência de folhas L_i de $\tilde{\mathcal{F}}$ acumulando na separatriz, também acumula no divisor excepcional. Naturalmente, $h(0) = 0$ de forma que $H = 0$ sobre E e o teorema segue. $\square$

Agora podemos provar o caso geral do Teorema de Mattei-Moussu.

Prova do Teorema 4.3.1. Iremos mostrar para o caso em que dois “blow-ups” são suficientes para reduzir a singularidade. Ficará claro que o procedimento é o mesmo para qualquer número de “blow-ups”. Considere uma folheação $\mathcal{F}$ cuja árvore de Seidenberg apenas contenha singularidades reduzidas após dois “blow-ups”. Em outras palavras, suponha que o divisor excepcional E_1 do “blow-up” $\tilde{\mathcal{F}}_1$ por π_1 em $(0,0)$ contenha singularidades $p_1, \dots, p_k$, tais que a razão dos seus autovalores seja um número racional negativo, e com uma única singularidade degenerada q .

Consideremos o “blow-up” π_2 de $q \in E_1$, resultando a folheação $\tilde{\mathcal{F}}_2$. Devemos mostrar que existe uma aplicação holomorfa definida em uma vizinhança do divisor excepcional $E_2 = (\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(0,0)$ de $\tilde{\mathcal{F}}_2$, que seja constante ao longo das folhas. Denotemos por E o conjunto $\pi_2^{-1}(p)$ (isomorfo a $\mathbb{CP}(1)$), que apenas contém singularidades reduzidas, digamos $q_1, \dots, q_l$. Considere uma seção local Σ_1 transversa a E_1 perto de p , e a seção Σ_2 em E . Considere a holonomia “local” (no sentido que provém de singularidade p), h associada à folha $E_2 \setminus \{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l\}$ e um caminho com pontos inicial e final, $c(0)$ e $c(1)$ na interseção de Σ_1 com E_1 , e “envolvendo” E . Este grupo de holonomias é cíclico e finito, já que existe uma correspondência natural entre si e o grupo de holonomia projetiva associado a Σ_2 e $E \setminus \{q_1, \dots, q_l\}$. Este último é o grupo cíclico de rotações conforme visto anteriormente. As outras holonomias locais associadas a uma volta em torno de cada singularidade p_i também são finitos e cíclicos. Assim, a holonomia “global”, i.e., o grupo de holonomia associado à folha $E_2 \setminus \{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l\}$ de $\tilde{\mathcal{F}}_2$ e *qualquer* caminho nesta folha é um grupo cíclico de rotações. Então podemos definir a integral primeira conforme feito anteriormente e estendê-la a vizinhanças das singularidades pela estimativa de Mattei e pelo Teorema de Extensão de Riemann. $\square$

Isto conclui a demonstração do Teorema de Mattei-Moussu.