3
Formas Normais para Singularidades de Folheações Holomorfas

Neste capítulo estudaremos singularidades de folheações holomorfas em dimensão 2.

Considere uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ com uma singularidade isolada em $(0,0)$. Conforme vimos anteriormente, existe um campo vetorial X associado a essa folheação, que é unicamente definido a menos de multiplicação por uma função f tal que $f(0,0) \neq 0$.

Os *autovalores* da folheação $\mathcal{F}$ em $(0,0)$ são os autovalores λ_1, λ_2 associados ao campo vetorial X em $(0,0)$. Existem três possibilidades:

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;

(b) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$;

(c) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Apesar de $X(x_1, x_2)$ e $Y(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)X(x_1, x_2)$ definirem a mesma folheação $\mathcal{F}$, as três situações acima estão bem definidas. Ou seja, os autovalores de X e Y pertencem ao mesmo caso (a),(b), ou (c). Observe que os valores precisos de λ_1 e λ_2 (quando forem diferente de 0, naturalmente) não estão bem definidos. Entretanto, ficará claro, ao longo do texto, que as noções relevantes em questão dependem somente da razão λ_1/λ_2, claramente invariante pelas escolhas do campo vetorial associado a $\mathcal{F}$.

Uma singularidade é *simples* se pelo menos um dos seus autovalores é diferente de zero. Se exatamente um dos autovalores é zero, então a singularidade é chamada *sela-nó*.

A *ordem* de uma folheação $\mathcal{F}$ em $(0,0)$ é o grau da primeira componente homogênea não nula da série de Taylor de X centrada em $(0,0)$. Naturalmente, a ordem não depende do campo vetorial X escolhido.

Começaremos estudando singularidades simples, levando em consideração o problema de linearização. Depois trataremos o caso mais geral usando o Teorema de Seidenberg.

3.1

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

Campos Vetoriais com Autovalores não nulos

Consideremos a EDO gerada por um campo vetorial holomorfo X com singularidade isolada em $(0,0)$. Suponha ainda que os seus autovalores em $(0,0)$ são λ_1 e λ_2, ambos diferentes de *zero*. Em outras palavras, estamos considerando a folheação associada ao sistema de EDOs

$$\begin{cases} dx_1/dT &= \lambda_1 x_1 + \varphi_1(x_1,x_2)\,, \\ dx_2/dT &= \lambda_2 x_2 + \varphi_2(x_1,x_2)\,. \end{cases} \tag{3-1}$$

Agora pretendemos definir uma troca formal de coordenadas que lineariza o sistema. Adotaremos as seguintes notações.

Seja $Q=(q_1,q_2)$, $x^Q = x_1^{q_1}x_2^{q_2}$ e $\|Q\| = q_1+q_2$. Além disso, suponha que

$$\varphi_1 = \sum_{\|Q\|>1} \varphi_{1,Q}x^Q \;\;;\;\; \varphi_2 = \sum_{\|Q\|>1} \varphi_{2,Q}x^Q\,.$$

Considere a seguinte troca de coordenadas formal

$$x_1 = y_1 + \zeta_1(y_1,y_2) \quad \text{onde} \quad \zeta_1(y_1,y_2) = \sum_{\|Q\|>1} \zeta_{1,Q}y^Q\,, \tag{3-2}$$

$$x_2 = y_2 + \zeta_2(y_1,y_2) \quad \text{onde} \quad \zeta_2(y_1,y_2) = \sum_{\|Q\|>1} \zeta_{2,Q}y^Q\,. \tag{3-3}$$

Nessas novas coordenadas, o sitema (3-1) é dado por

$$\begin{cases} dy_1/dT &= \lambda_1 y_1 + \psi_1(y)\,, \\ dy_2/dT &= \lambda_2 y_2 + \psi_2(y)\,, \end{cases} \tag{3-4}$$

Substituindo (3-2) e (3-3) em (3-1), obtemos as seguintes relações

$$\sum_{\|Q\|>1} (\delta_{1,Q}\zeta_{1,Q} + \psi_{1,Q})y^Q = \varphi_1(y_1+\zeta_1, y_2+\zeta_2) - \sum_{k=1,2} \frac{\partial \zeta_1}{\partial y_k}\psi_k\,, \tag{3-5}$$

$$\sum_{\|Q\|>1} (\delta_{2,Q}\zeta_{2,Q} + \psi_{2,Q})y^Q = \varphi_2(y_1+\zeta_1, y_2+\zeta_2) - \sum_{k=1,2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial y_k}\psi_k\,, \tag{3-6}$$

onde $\delta_{1,Q} = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 - \lambda_1$ e $\delta_{2,Q} = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 - \lambda_2$.

Observe que se $\delta_{i,Q} \neq 0$ $(i=1,2)$ sempre é possível encontrar $\zeta_{i,Q}$ tal que $\psi_{i,Q} = 0$. Isso pode ser visto por indução em Q e lembrando que φ_i possui termos de ordem pelo menos 2. Esta última observação implica que os coeficientes $\zeta_{i,Q}$ de y^Q no lado esquerdo das Equações (3-5) e (3-6) dependem somente em termos $\zeta_{i,P}$ (para $P<Q$), dos coeficientes de φ_i e de $\delta_{i,Q}$ (que são não nulos por hipótese). Mais precisamente, $\zeta_{i,Q} = \frac{f}{\delta_{i,Q}}$, onde f é uma função

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

de certos coeficientes de φ_i e $\zeta_{i,P}$ para $P < Q$. Logo se $\delta_{i,Q} \neq 0$ então sempre existe uma troca de coordenadas formal ζ_i tal que $\psi_i = 0$.

Isso resolve o problema de encontrar uma troca formal e coordenadas. Porém, nada garante a convergência da série $\zeta_i(y_1, y_2)$ $(i = 1, 2)$. De fato, pode ser que ela não seja convergente. Antes de lidar com o problema da convergência, introduziremos uma notação que será útil.

Dada uma série de potências formal $\xi = \sum_Q \xi_Q x^Q$, denotaremos $\overline{\xi} = \sum_Q \|\xi_Q\| y^Q$. Também iremos considerar a série *em uma variável complexa* z, $\overline{\overline{\xi}}$, obtida como $\overline{\overline{\xi}} = \sum_Q \|\xi_Q\| z^{\|Q\|}$. Dada outra série $\varpi = \sum_Q \varpi_Q y^Q$, dizemos que $\varpi \prec \xi$ se e somente se $\|\varpi_Q\| \leq \|\xi_Q\|$ para todo Q.

Teorema 3.1.1 (Método Majorante de Cauchy) *Seja φ_i e ζ_i (para $i = 1, 2$) como em (3-1) e (3-2), (3-3). Suponha que existe $\delta > 0$ tal que*

$$\delta\overline{\zeta_i} \prec \overline{\varphi}_i(y_1 + \overline{\zeta}_1, y_2 + \overline{\zeta}_2) \, .$$

Então a série ζ_i $(i = 1, 2)$ converge, definindo uma troca de coordenadas holomorfa.

Prova. Obtêm-se diretamente que

$$\overline{\overline{\zeta}}_1 + \overline{\overline{\zeta}}_2 \prec \frac{1}{\delta}(\overline{\varphi}_1(z + \overline{\overline{\zeta}}_1 + \overline{\overline{\zeta}}_2, z + \overline{\overline{\zeta}}_1 + \overline{\overline{\zeta}}_2) + \overline{\varphi}_2(z + \overline{\overline{\zeta}}_1 + \overline{\overline{\zeta}}_2, z + \overline{\overline{\zeta}}_1 + \overline{\overline{\zeta}}_2)) \, . \quad (3\text{-}7)$$

Como a série φ_i converge por hipótese, existe a_0, $a > 0$ tal que:

$$\frac{1}{\delta}(\overline{\overline{\varphi}}_1 + \overline{\overline{\varphi}}_2) \prec \frac{a_0 z^2}{1 - az} \, . \quad (3\text{-}8)$$

Seja $u = \sum_i u_i z^i$ a série $\frac{1}{z}(\overline{\overline{\zeta}}_1 + \overline{\overline{\zeta}}_2)$. Das Equações (3-7) e (3-8) obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{z}(\overline{\overline{\zeta}}_1 + \overline{\overline{\zeta}}_2) &\prec \frac{1}{z\delta}(\overline{\overline{\varphi}}_1(z + \overline{\overline{\zeta}}_1 + \overline{\overline{\zeta}}_2) + \overline{\overline{\varphi}}_2(z + \overline{\overline{\zeta}}_1 + \overline{\overline{\zeta}}_2)) \\ &\prec \frac{1}{z}\left(\frac{a_0(z + \overline{\overline{\zeta}}_1 + \overline{\overline{\zeta}}_2)^2}{1 - a(z + \overline{\overline{\zeta}}_1 + \overline{\overline{\zeta}}_2)}\right) \\ &\prec \frac{a_0 z[\frac{1}{z}(z + \overline{\overline{\zeta}}_1 + \overline{\overline{\zeta}}_2)]^2}{1 - az(\frac{1}{z}(z + \overline{\overline{\zeta}}_1 + \overline{\overline{\zeta}}_2))} \, , \end{aligned}$$

Logo

$$u \prec \frac{a_0 z(1 + u)^2}{1 - az(1 + u)} \, . \quad (3\text{-}9)$$

Agora comparamos u com a série $v = \sum_i v_i z^i$, que é uma solução de

$$v = \frac{a_0 z(1 + v)^2}{1 - az(1 + v)} \, .$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

Equivalentemente, v satisfaz

$$\Big(\sum v_i z^i\Big)^2(-az - a_0 z) + \Big(\sum v_i z^i\Big)(-az - 2a_0 z + 1) - a_0 z = 0\ ,$$

além disso, ela converge e $v_1 = a_0$. Observe que para todo i, v_i é um polinômio com coeficientes positivos nas variáveis $v_1, \ldots, v_{i-1}$, que denotaremos por $P_i(v_1, \ldots, v_{i-1})$.

Podemos escolher $a_0 > u_1$ e segue de (3-9) que

$$u_i \leq P_i(u_1, \ldots, u_{i-1})\ .$$

Agora mostraremos $u \prec v$ por indução. Suponha que $u_j \leq v_j$ para $j \leq i-1$. Como P_i tem coeficientes positivos para todo i temos que

$$u_i \leq P_i(u_1, \ldots, u_{i-1}) \leq P_i(v_1, \ldots, v_{i-1}) = v_i\ .$$

Logo u é convergente e consequentemente ζ_i $(i = 1, 2)$ também o são. □

Teorema 3.1.2 (Teorema de Linearização de Poincaré) *Considere um sistema de equações diferencias como em (3-1). Suponha que $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ e que $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}_-$. Suponha adicionalmente que nem λ_1/λ_2, nem λ_2/λ_1 pertencem a $\mathbb{N}$. Então existe uma troca de coordenadas holomorfa em que o sistema se torna linear.*

Prova. Primeiramente observamos que as hipóteses sobre λ_1 e λ_2 implicam que existe $\delta > 0$ tal que $\inf_Q\{\delta_{1,Q}, \delta_{2,Q}\} \geq \delta$. De fato, se $\delta_{1,Q} = 0 = \lambda_1(q_1 - 1) + \lambda_2 q_2$ então

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{q_2}{(1 - q_1)}.$$

Portanto, sempre que $q_2 = 0$, temos que $\lambda_1 = 0$; quando $q_1 = 0$, então $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{N}$; e se $q_1 > 1$ então $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$. Um argumento semelhante é válido para $\delta_{2,Q}$. Assim, nossas hipóteses garantem que todos os $\delta_{i,Q}$ são diferentes de zero. Logo sempre é posível obter $\zeta_{i,Q}$ de forma que $\psi_{i,Q} = 0$. Então existe uma troca de coordenadas formal que lineariza o sistema (3-1). Agora devemos mostrar que esta mudança de coordenadas é, de fato, convergente. Das Equações (3-5) e (3-6), para $j = 1, 2$, obtemos

$$\begin{aligned} \delta\overline{\zeta}_j &\prec \sum_Q \delta_{j,Q}\|\zeta_{j,Q}\|y^Q + \overline{\psi}_j \\ &\prec \overline{\varphi}_j(y_1 + \overline{\zeta}_1, y_2 + \overline{\zeta}_2) + \sum_{k=1,2} \frac{\partial\overline{\zeta}_j}{\partial y_k}\overline{\psi}_k\,. \end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

Como $\overline{\psi}_k = 0$, temos que

$$\delta\overline{\zeta_j} \prec \overline{\varphi}_j(y_1 + \overline{\zeta}_1, y_2 + \overline{\zeta}_2).$$

Finalmante, o Teorema 3.1.1 implica que esta mudança é convergente. □

Agora mostraremos uma caracterização de folheações singulares holomorfas, no caso em que $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$, para autovalores não-nulos.

Lema 3.1.3 *Se $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$, então existe uma troca de coordenadas analítica em que o sistema original é dado (em termos de campos vetoriais) por*

$$X = \lambda_1 y_1[1 + (h.o.t.)]\partial/\partial y_1 + \lambda_2 y_2[1 + (h.o.t.)]\partial/\partial y_2\,.$$

Em particular tais campos vetoriais possuem duas separatrizes transversas e distintas.

Prova. Mostraremos que existe uma mudança de coordenadas convergente, tal que φ_1 é divisível por x_1 e que φ_2 é divisível por x_2, onde φ_1 e φ_2 são como em (3-1).

Como antes, consideramos uma troca de coordenadas $x_1 = y_1 + \zeta_1(y_1, y_2)$ e $x_2 = y_2 + \zeta_2(y_1, y_2)$ seja:

$$\begin{cases} \psi_{1,Q} = 0 \quad \text{quando} \;\; q_1 = 0 \;\; \text{ou} \;\; q_2 = 0 \\ \zeta_{1,Q} = 0 \quad \text{quando} \;\; q_1 \neq 0 \;\; \text{e} \;\; q_2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \psi_{2,Q} = 0 \quad \text{quando} \;\; q_1 = 0 \;\; \text{ou} \;\; q_2 = 0 \\ \zeta_{2,Q} = 0 \quad \text{quando} \;\; q_1 \neq 0 \;\; \text{e} \;\; q_2 \neq 0 \end{cases}$$

Se essa troca for de fato convergente, então nestas coordenadas apropriadas $\{y_1 = 0\}$ e $\{y_2 = 0\}$ são invariantes, o que é o conteúdo do lema.

Então devemos analizar expressões de $\delta_{1,Q}$ apenas no caso em que $q_1 = 0$ ou $q_2 = 0$. Afinal, quando $q_1 \neq 0$ e $q_2 \neq 0$, tem-se que $\zeta_{1,Q} = 0$, de forma que estes termos não contam na série $\overline{\zeta}_1$. Nesta situação, temos

$$\begin{aligned} \delta_{1,Q} &= \lambda_2 q_2 - \lambda_1 \\ \frac{\delta_{1,Q}}{\lambda_2} &= q_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Um argumento semelhante implica que $\delta_{2,Q} > \varepsilon_2$. Mais precisamente, $\delta_{2,Q} = 0$ se $q_2 > 1$ (neste caso, $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}_-$). Segue que quando $q_2 = 0$, existe ε_2 tal que $\delta_{2,Q} > \varepsilon_2$.

Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $\inf_Q\{\delta_{1,Q}, \delta_{2,Q}\} \geq \delta$.

Usando este fato juntamente com as Equações (3-5) e (3-6), têm-se

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

$$\delta\overline{\zeta}_1 \prec \sum_Q \delta_{1,Q}\|\zeta_{1,Q}\|y^Q \prec \overline{\varphi}_1(y_1+\overline{\zeta}_1, y_2+\overline{\zeta}_2) + \frac{\partial\overline{\zeta}_1}{\partial y_1}\overline{\psi}_1 + \frac{\partial\overline{\zeta}_1}{\partial y_2}\overline{\psi}_2\,.$$

Por construção, os coeficientes não-nulos em $\overline{\zeta}_1$ estão relacionados somente com monômios que são potências de y_1 ou potências de y_2, i.e, não existem monômios que misturam as variáveis y_1 e y_2. Por outro lado, todos os termos não-nulos que entram em $\overline{\psi}_1$ e $\overline{\psi}_2$ são tais que $q_1 = 0$ e $q_2 = 0$. De maneira que a seguinte estimativa mais forte é válida:

$$\delta\overline{\zeta}_1 \prec \overline{\varphi}_1(y_1+\overline{\zeta}_1, y_2+\overline{\zeta}_2)\,.$$

Um argumento semelhante implica que

$$\delta\overline{\zeta}_2 \prec \overline{\varphi}_2(y_1+\overline{\zeta}_1, y_2+\overline{\zeta}_2)\,.$$

E a aplicação do Teorema 3.1.1 garante a convergência das séries. □

3.2
Aspectos Elementares de Singularidades Sela-Nó

3.2.1
Forma Normal de Dulac e Consequências

Agora iremos considerar o caso de *selas-nó*, i.e quando $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$. Veremos que neste caso, por sucessivas trocas apropriadas de coordenadas, o sistema de EDOs (ou a 1-forma) que induz a folheação possui uma representação canônica. Este é o conteúdo de seguinte

Teorema 3.2.1 (Dulac) *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação que define uma sela-nó em $(0,0)$ em $\mathbb{C}^2$. Então, em coordenadas apropriadas (y_1, y_2), $\mathcal{F}$ é dada pela 1-forma holomorfa*

$$\omega = [y_1(1+\lambda y_2^p) + y_2 R(y_1, y_2)]\,dy_2 \;-\; y_2^{p+1}\,dy_1\,.$$

Prova. Primeiramente iremos considerar a seguinte troca de coordenadas $x_1 = y_1 + \zeta_1(y_1, y_2)$, $x_2 = y_2 + \zeta_2(y_1, y_2)$ no seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} dx_1/dT &= x_1 + \varphi_1(x_1, x_2)\,, \\ dx_2/dT &= \varphi_2(x_1, x_2)\,. \end{cases}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

Agora definimos

$$\begin{cases} \psi_{1,Q} = 0 \quad \text{sempre que } q_2 = 0 \\ \zeta_{1,Q} = 0 \quad \text{sempre que } q_2 \neq 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \psi_{2,Q} = 0 \quad \text{sempre que } q_2 = 0 \\ \zeta_{2,Q} = 0 \quad \text{sempre que } q_2 \neq 0, \end{cases}$$

para cada índice $Q = (q_1, q_2)$. Como $\|Q\| \geq 2$, segue que $\delta_{1,Q} = q_1 - 1 \geq 1$ para $\zeta_{1,Q} \neq 0$. De forma semelhante, $\delta_{2,Q} = q_1 \geq 2$ sempre que $\zeta_{2,Q} \neq 0$. Por outro lado, temos

$$\delta\overline{\zeta}_1 \prec \overline{\varphi}_1(y_1 + \overline{\zeta}_1, y_2 + \overline{\zeta}_2) + \frac{\partial\overline{\zeta}_1}{\partial y_1}\overline{\psi}_1 + \frac{\partial\overline{\zeta}_1}{\partial y_2}\overline{\psi}_2 \, .$$

Observe que $\zeta_{1,Q} = 0$ quando $q_2 \neq 0$ então $\overline{\zeta}_1$ depende somente de y_1, de forma que $\frac{\partial\overline{\zeta}_1}{\partial y_2} = 0$. Em particular, os coeficientes não-nulos da série $\overline{\zeta}_1$ são tais que $q_2 = 0$. Segue da troca de coordenadas acima definida que todos os monômios que aparecem em $\partial\overline{\zeta}_1/\partial y_1\overline{\psi}_1$ dependem de y_2. Portanto estes monômios não aparecem na série de ζ_1 e podemos concluir a seguinte estimativa mais forte

$$\delta\overline{\zeta}_1 \prec \overline{\varphi}_1(y_1 + \overline{\zeta}_1, y_2 + \overline{\zeta}_2) \, .$$

Um argumento semelhante implica que

$$\delta\overline{\zeta}_2 \prec \overline{\varphi}_2(y_1 + \overline{\zeta}_1, y_2 + \overline{\zeta}_2) \, .$$

A convergência da troca de coordenadas segue ao aplicarmos o Método Majorante de Cauchy. Isso nos permite supor que φ_1 e φ_2 são divisíveis por x_2. Em outras palavras, o sistema de EDOs original é dado por

$$X(x_1, x_2) = [x_1 + x_2 R(x_1, x_2)]\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\phi(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} \, .$$

Suponha que $A(x_1, x_2) = x_1 + x_2 R(x_1, x_2)$ e $B(x_1, x_2) = x_2\phi(x_1, x_2)$. Observe que o conjunto $\{A = 0\} \cap \{B = 0\}$ se reduz à origem $(0, 0)$. Logo o ideal associado ao ponto $(0, 0)$ é maximal, sendo gerado por x_1 e x_2. Segue do Teorema de Nullstellensatz de Hilbert que este ideal maximal é o radical do ideal gerado por A e B. Em particular, existe $p + 1 \geq 2$ tal que x_2^{p+1} pertence ao ideal gerado por A e B (já que x_2 não pode pertencer a esse ideal). A seguir, expandimos tanto A quanto B em termos de x_2, i.e., $A = a_0(x_1) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x_1)x_2^i$ e $B = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(x_1)x_2^i$. Da divisão de B por A no anel $C\{x_1\}$ obtemos

$$B = AQ + x_2^{p+1}U(x_2) \qquad (Q = 0 \text{ se } x_2 = 0) \, .$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

De fato, $a_0'(x_1) = 1$ de forma que o resto não depende de x_1. Além disso, $U(0) \neq 0$ já que $p+1$ é a menor potência positiva de x_2 que pertence ao ideal gerado por A e B. Agora considere o compo vetorial

$$Y = -\frac{Q}{U}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial x_1}\,,$$

que satisfaz $Y(0,0) \neq (0,0)$, pois $U(0,0) = U(0) \neq 0$. Segue (de $Q = 0$ para $\{x_2 = 0\}$) que $\{x_2 = 0\}$ é uma solução de Y. Pelo Teorema da Caixa de Fluxo, existem coordenadas (z_1, z_2) tais que o campo vetorial se torna

$$Y = \frac{\partial}{\partial z_1} \quad \text{e} \quad z_2 = x_2\,,$$

donde o resultado segue. □

Considere uma folheação $\mathcal{F}$ como no teorema precedente, possuindo uma singularidade sela-nó. Logo, existem coordenadas apropriadas em que o campo vetorial é dado pela seguinte forma normal:

$$X = [y_1(1+\lambda y_2^p) + y_2 R(y_1, y_2)]\frac{\partial}{\partial y_1} + y_2^{p+1}\frac{\partial}{\partial y_2}\,.$$

Agora iremos calcular a holonomia $h(z)$, para z em uma seção local transversa à separatriz $\{y_2 = 0\}$, associada a um círculo contornando a singularidade. Este cálculo simples será útil nas seções subsequentes. Por enquanto, esta conta nos dará uma interpretação geométrica para o número $p+1$ que aparece na forma normal acima.

Lema 3.2.2 *A holonomia associada à separatriz $\{y_2 = 0\}$ e a um círculo em torno de uma singularidade sela-nó é dada por $h(z) = z + z^{p+1} + \cdots$.*

Prova. Definindo $y_1(t) = re^{2\pi it}$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{dy_2}{dt} &= \frac{dy_2}{dy_1}.\frac{dy_1}{dt} \\
&= \frac{y_2^{p+1}}{[y_1(1+\lambda y_2^p) + y_2 R(y_1, y_2)]}\frac{dy_1}{dt} \\
&= \frac{y_2^{p+1}}{re^{2\pi it}[1 + \lambda y_2^p + y_2 Q(re^{2\pi it}, y_2)]} 2\pi i r e^{2\pi it} \\
&= y_2^{p+1}(t)(1 + h.o.t.)2\pi i \qquad (3\text{-}10)
\end{aligned}$$

Além disso, denotamos por $y_2(t) = \sum_{k\geq 1} a_k(t) z^k$ com condição inicial $y_2(0) = z$, tal que

$$\frac{dy_2}{dt} = \sum_{k\geq 1} a_k'(t) z^k\,, \qquad (3\text{-}11)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

$$(y_2)^{p+1}(t) = \Big(\sum_{k\geq 1} a_k(t) z^k\Big)^{p+1}. \tag{3-12}$$

Comparando as expressões obtidas para $\frac{dy_2}{dt}$ em (3-10) e em (3-11), percebemos que $a_k'(t) = 0$ para $k \leq p$, i.e., as funções $a_k(t)$ são todas constantes. Como $y_2(0) = z$, temos que $a_1(0) = 1$, $a_2(0) = \cdots = a_p(0) = 0$.

Agora comparamos o termo $k = p+1$ e usando (3-12) obtêm-se

$$a_{p+1}'(t) = 2\pi i a_1^{p+1}(t),$$

De forma que $a_{p+1}(t) = 2\pi i t$, pois $a_1(t) = 1$.

Concluimos que para $t = 1$, $y_2(1) = z + 2\pi i z^{p+1} + \cdots$. Como $h(z) = y_2(1)$, para condição inicial $y_2(0) = z$, segue que $h(z) = z + z^{p+1} + \cdots$. □

3.2.2
Coordenadas de Fatou e Flor de Leau

Tendo em vista o Lema 3.2.2, somos naturalmente levados a investigar a dinâmica topológica de difeomorfismos que são tangentes à identidade. Em particular, gostaríamos de entender o papel da multiplicidade "$p+1$" na dinâmica topológica desses difeomorfismos. Aqui seguimos a abordagem feita em (Car-G).

Primeiramente iremos analisar aplicações da forma $f(z) = z + z^{p+1} + \cdots$, no caso prototípico em que $p = 1$. Primeiramente, aplicaremos uma mudança de coordenadas, $A_0(z) = -1/z$, levando 0 em ∞. Nestas novas coordenadas, f assume a seguinte expressão

$$g(z) = z + 1 + b/z + \cdots$$

perto de infinito.

Considere $R_1 = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > c\}$. Note que se $c > 0$ for suficientemente grande, então $g(R_1) \subset R_1$. Por indução, é fácil verificar que para $g(z) = z + 1 + o(1)$ em R_1,

$$\mathrm{Re}(g^n(z)) > \mathrm{Re}(z) + \frac{n}{2},$$

e

$$\frac{n}{2} \leq |g^n(z)| \leq |z| + 2n,$$

onde $g^n = g \circ \cdots \circ g$, ($n$ vezes) e $n \geq 1$. Agora defina a aplicação φ_n em R_1 dada por $\varphi_n(z) = g^n(z) - n - b\log n$.

Como $g^{k+1}(z) = g^k(z) + 1 + \frac{b}{g^k(z)} + O(1/k^2)$, obtêm-se

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k(z) = b[\log k - \log(k+1)] + \frac{b}{g^k(z)} + O(1/k^2) = O(1/k)\,.$$

Assim, temos que para $z \in R_1$:

$$|\varphi(z) - z| \leq |\varphi_1(z) - z| + \sum_{k=1}^{n-1} |\varphi_{k+1}(z) - \varphi_k(z)| = O(\log n)\,.$$

Observe que se mostrarmos que φ_n é convergente, então teremos mostrado que g é holomorficamente conjugada à translação $T(z) = z + 1$. De fato, temos que $\lim \varphi_n(g(z)) = \lim[\varphi_{n+1}(z) + 1 + b\log(1 + 1/n)] = \lim \varphi_{n+1} + 1$.

Lema 3.2.3 *A sequência φ_n converge para a função conforme φ.*

Prova. Considere as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z) &= b\log n - b\log(n+1) + g^{n+1}(z) - g^n(z) - 1 \\
&= -\frac{b}{n} + \frac{b}{g^n(z)} = O(1/n^2) \\
&= b\Big[\frac{1}{n + b\log n + \varphi_n(z)} - \frac{1}{n}\Big] + O(1/n^2) \\
&= \frac{1}{n^2} O(|b\log n + \varphi_n(z)|) + O(1/n^2) = O(\frac{\log n}{n^2})\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\sum |\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| < \infty$. Como todos os φ_n são conformes, o limite uniforme φ também o é. □

A seguir, estendemos φ analiticamente a qualquer domínio Ω, em que g esteja definida, $g(\Omega) \subset \Omega$ e tal que $\mathrm{Re}(g^n(z))$ tende a ∞, para $z \in \Omega$.

Em particular, é possível construir um tal domínio invariante Ω com fronteira suave, conforme a Figura 3.1.

Assim, $f(z) = z + z^2 + \cdots$ é conjugada à translação $T(z) = z + 1$ na região formada pelo cardióide, $A_0^{-1}(\Omega)$, como mostra a Figura 3.2. Em particular, observamos a presença de conjuntos abertos constituídos por pontos cujos α-limite e ω-limite de f coincide com $(0, 0)$.

O caso geral, $p \geq 2$ pode ser tratado com métodos semelhantes, brevemente descrevemos o procedimento. Considere $f(z) = z + z^{p+1} + \cdots$. Observe que, a menos de uma conjugação, podemos supor que $f(z) = z + \frac{1}{p} z^{p+1} + \cdots$. Agora, conjugando por $A_p(z) = -z^{1/p}$ obtêm-se

$$A_p^{-1} \circ f \circ A_p(z) = f_p(z) = z(1 + \frac{1}{p} z + \cdots)^p = z + z^2 + \cdots\,.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

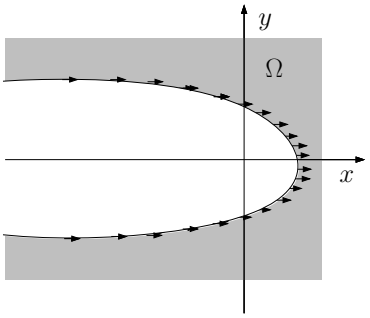

Figura 3.1: Domínio Invariante por g

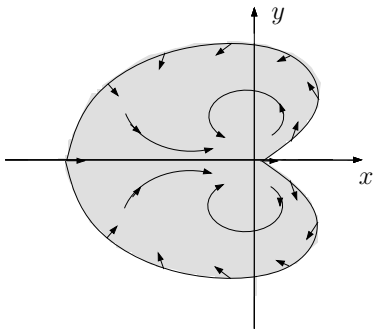

Figura 3.2: Dinâmica de f no cardióide

De forma que se reduz ao caso em que $p = 1$, analizado anteriormente. Observe que os setores $|\arg z - 2k\pi/p| < \pi/p$ são mapeados conformemente no plano menos o eixo real negativo por A_p^{-1}. Essencialmente, trata-se de uma ramificação de ordem p da figura obtida anteriormente.

Em termos mais precisos, um domínio V é dito um *domínio de Leau* se f é conjugada à translação $T(z) = z + 1$ em V e se a sequência f^n converge para um ponto em ∂V. Em particular, a a região formada pelo cardióide, ilustrada na Figura 3.2 é um domínio de Leau.

A aplicação f tem p *pétalas atratoras* P_k, que são domínios invariantes limitados por curvas de Jordan c_k, que são simétricas em relação aos raios $\arg z = (2k\pi)/p$. Na origem, c_k possui duas tangentes $\arg z = (2k \pm 1)\pi/p$.

A figura final é resumida pelo teorema a seguir.

Teorema 3.2.4 (Teorema da Flor) *Suponha que $f(z) = z + z^{p+1} + \cdots$ perto de 0. Então f tem exatamente p domínios de Leau $L_1, \ldots, L_p$ correspondendo ao ponto da fronteira 0, e (f^n) converge a zero, localmente uniformemnte em L_k. Cada domínio L_k contém uma pétala atratora invariante P_k (não unicamente determinada). Em particular, existe ums função ϕ_k em L_k conjugando $h(z) = z + 1 + \cdots$ a uma translação, levando L_k no plano complexo.*

3.3 Algumas Formas Normais em Dimensões mais altas

Primeiramente, observamos que a generalização do Método Majorante de Cauchy para várias variáveis é direta e aqui iremos apenas enunciá-lo.

Teorema 3.3.1 (Método Majorante de Cauchy em Várias Variáveis) *Considere um sistema de EDOs em várias variáveis dada por um campo vetorial X:*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

$$\begin{cases} dx_1/dT &= \lambda_1 x_1 + \varphi_1(x_1,\ldots,x_n)\,, \\ \quad\vdots & \qquad\vdots \\ dx_n/dT &= \lambda_n x_n + \varphi_n(x_1,\ldots,x_n)\,. \end{cases} \tag{3-13}$$

onde $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ *são os autovalores associados a* X *em uma singularidade. Considere ainda, a seguinte troca formal de coordenadas:*

$$\begin{aligned} x_1 = y_1 + \zeta_1(y_1,\ldots,y_n) \quad &\text{onde} \quad \zeta_1(y_1,\ldots,y_n) = \sum_{\|Q\|>1} \zeta_{1,Q} y^Q\,, \\ \vdots \qquad\qquad &\vdots \\ x_n = y_n + \zeta_n(y_1,\ldots,y_n) \quad &\text{onde} \quad \zeta_n(y_1,\ldots,y_n) = \sum_{\|Q\|>1} \zeta_{n,Q} y^Q\,. \end{aligned} \tag{3-14}$$

Suponha que existe $\delta > 0$ *tal que*

$$\delta\overline{\zeta}_i \prec \overline{\varphi}_i(y_1+\overline{\zeta}_1,\ldots,y_n+\overline{\zeta}_n)\,.$$

para $i = 1,\ldots,n \in \mathbb{C}$. *Então a série de* ζ_i *converge e portanto define una troca de cartas holomorfa.* □

Iremos obter um resultado que é análogo ao Teorema 3.1.2 para várias vairáveis.

Definição 3.3.2 *Uma n-upla* $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ *pertence ao domínio de Poincaré se* $\{z \in \mathbb{C} \;;\; t_1\lambda_1 + \cdots + t_n\lambda_n = z \;\text{ e }\; t_1 + \cdots + t_n = 1\}$, *não contém a origem* $0 \in \mathbb{C}$.

Um campo vetorial X definido em $\mathbb{C}^n$ é do *tipo Poincaré* se o seu espectro estiver no domínio de Poincaré. Em particular, isso implica que X é diagonalizável.

Teorema 3.3.3 (Teorema de Linearização de Poincaré) *Seja* X *um campo vetorial holomorfo definido em torno da origem de* $\mathbb{C}^n$ *tendo parte linear do tipo Poincaré, com autovalores* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. *Suponha que não existam números naturais* $a_1,\ldots,a_n$ *tais que* $a_1\lambda_1 + \cdots, a_n\lambda_n = 0$ *(não-ressonante). Então existe uma troca de coordenadas holomorfa que lineariza o sistema.*

Prova. A idéia da prova é a mesma do caso em que a dimensão é 2. Substituindo as Equações (3-14) no sistema (3-13), obtêm-se as seguintes relações.

$$\sum_{\|Q\|>1} (\delta_{i,Q}\zeta_{i,Q} + \psi_{i,Q}) y^Q = \varphi_i(y_1+\zeta_1,\ldots,y_n+\zeta_n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \zeta_i}{\partial y_k}\psi_k\,,$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

para $i = 1, \ldots, n$, onde $y^Q = y_1^{q_1} \ldots y_n^{q_n}$ e $\delta_{i,Q} = q_1\lambda_1 + \cdots + q_n\lambda_n - \lambda_i$, com $q_i \in \mathbb{N}$.

Graças à hipótese de não-ressonância, $\delta_{i,Q} \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

Seja $\delta = t_1\lambda_1 + \cdots + t_n\lambda_n$, onde $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ e $t_1 + \cdots + t_n = 1$. Como a parte linear de X é do tipo Poincaré, $\delta > 0$, e por construção, $\delta < \delta_{i,Q}$ para $i = 1, \ldots, n$. Assim,

$$\begin{aligned} \delta\overline{\zeta}_j &\prec \sum_Q \delta_{j,Q}\|\zeta_{j,Q}\|y^Q + \overline{\psi}_j \\ &\prec \overline{\varphi}_j(y_1 + \overline{\zeta}_1, \ldots, y_n + \overline{\zeta}_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\overline{\zeta}_j}{\partial y_k}\overline{\psi}_k \,. \end{aligned}$$

Como $\overline{\psi}_k = 0$, temos que

$$\delta\overline{\zeta_j} \prec \overline{\varphi}_j(y_1 + \overline{\zeta}_1, \ldots, y_n + \overline{\zeta}_n) \,.$$

A convergência da desejada troca de coordenadas resulta da aplicação do Teorema 3.3.1. □

Agora iremos lidar com o caso de uma singularidade sela-nó em dimensão 3. Primeiramente iremos considerar o caso em que apenas um dos autovalores é *zero*.

Teorema 3.3.4 *Seja X um campo vetorial holomorfo definido em torno da origem de $\mathbb{C}^3$ com parte linear do tipo Poincaré, com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Suponha que eles são não-ressonantes e que $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Então existe uma troca de cartas analítica em que o sistema original é dado (em termos de campos vetoriais) por*

$$X = [\lambda_1 y_1 + \psi_1(y_1, y_2, y_3)]\partial/\partial y_1 + [\lambda_2 y_2 + \psi_2(y_1, y_2, y_3)]\partial/\partial y_2 + y_3 H(y_1, y_2, y_3)\partial/\partial y_3 \,.$$

Em particular, o 2-plano $\{y_3 = 0\}$ é invariante.

Prova. Usando a mesma notação anterior, consideramos a troca formal de coordenadas tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi_{1,Q} = 0 & \text{se } q_3 = 0 \\ \zeta_{1,Q} = 0 & \text{se } q_3 \neq 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{ll} \psi_{2,Q} = 0 & \text{se } q_3 = 0 \\ \zeta_{2,Q} = 0 & \text{se } q_3 \neq 0 \end{array} \right. \text{ and } \left\{ \begin{array}{ll} \psi_{3,Q} = 0 & \text{se } q_3 = 0 \\ \zeta_{3,Q} = 0 & \text{se } q_3 \neq 0 \end{array} \right.$$

Como no Teorema 3.3.3, a hipótese sobre os autovalores garante a existência de $\delta > 0$ tal que $\delta < \delta_{i,Q}$ para $i = 1, 2, 3$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

Assim,

$$\delta\overline{\zeta}_i \prec \overline{\varphi}_j(y+\overline{\zeta}) + \frac{\partial\overline{\zeta}_i}{\partial y_1}\overline{\psi}_1 + \frac{\partial\overline{\zeta}_i}{\partial y_2}\overline{\psi}_2 + \frac{\partial\overline{\zeta}_i}{\partial y_3}\overline{\psi}_3\,.$$

Observe que $\overline{\zeta}_i$ depende somente de y_1 e y_2, de forma que o último termo na estimativa acima se anula para $i = 1, 2, 3$. Por outro lado, por construção, todos os coeficientes não-nulos $\psi_{i,Q}$ estão associados a monômios que dependem de y_3, de tal forma que podemos concluir o seguinte

$$\delta\overline{\zeta_i} \prec \overline{\varphi}_i(y+\overline{\zeta})\,.$$

Como antes, aplicando o Teorema 3.3.1 conclui-se a demonstração. □

Observação 3.3.5 Observe que como o plano $\{y_3 = 0\}$ é invariante por X, podemos aplicar o Lema 3.1.3 e supor que o campo tem duas separatrizes neste plano.

A seguir, consideramos o caso em que dois autovalores são iguais a *zero*. Veremos que o método utilizado no caso anterior para provar a existência de um plano invariante não funciona nesta situação.

Suponha X como no Teorema 3.3.4, exceto que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 \neq 0$. Por esse método, podemos tentar ver se existe uma troca de cartas convergente que faz com que o plano seja invariante. Denotemos X por

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3)\partial/\partial x_1 + \varphi_2(x_1,x_2,x_3)\partial/\partial x_2 + [\lambda_3 x_3 + \varphi_1(x_1,x_2,x_3)]\partial/\partial x_3\,.$$

Observe que se existe uma troca de coordenadas em que podemos supor φ_1, φ_2 e φ_3 divisíveis por x_1, então $X(0,x_2,x_3) = (0,0,\lambda_3 x_3)$. O mesmo ocorre se ao invés de x_1, tomarmos x_2, isto é, o plano $\{x_2 = 0\}$ também é degenerado em uma reta. Podemos encontrar uma troca formal de coordenadas tal que φ_1 seja divisível por x_1, e φ_2, φ_3 sejam divisíveis por x_2. Neste caso, o plano $\{x_1 = 0\}$ é invariante por X. Porém, o método que usamos nas situações anteriores não nos permite concluir a convergência da série.

Agora retornamos ao caso sela-nó, em que dois dos autovalores são diferentes de *zero*.

Teorema 3.3.6 *Seja X um campo vetorial holomorfo definido em torno da origem de $\mathbb{C}^3$, com autovalores $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 = 0$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ um inteiro positivo arbitrário. Então existe uma troca de coordenadas analítica em que o sistema original é dado (em termos de campos vetoriais) por*

$$X = F(y_1,y_2,y_3)\partial/\partial y_1 + G(y_1,y_2,y_3)\partial/\partial y_2 + H(y_1,y_2,y_3)\partial/\partial y_3\,,$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

tal que $F(0,0,y_3) = G(0,0,y_3) \equiv 0$, *i.e, o eixo* $\{y_1 = y_2 = 0\}$ *é invariante por* X.

Prova. Considere uma troca de coordenadas da forma

$$x_1 = y_1 + \sum_{i=2}^{N} a_i y_3^i\,, \qquad x_2 = y_2 + \sum_{i=2}^{N} b_i y_3^i\,, \qquad x_3 = y_3\,. \tag{3-15}$$

Devemos mostrar que N, a_i, b_i podem ser escolhidos de maneira a cumprir as exigências. Nas coordenadas (y_1, y_2, y_3) o campo vetorial X é dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sum_{i=2}^{N} i a_i y_3^{i-1} \\ 0 & 1 & -\sum_{i=2}^{N} i b_i y_3^{i-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ G_1 \\ H_1 \end{bmatrix}. \tag{3-16}$$

Na fórmula acima, as funções F_1, G_1, H_1 admitem, respectivamente, as seguintes expressões

$$F_1 = \lambda_1 y_1 + \sum_{i=2}^{N} \lambda_1 a_i y_3^i + (\sum_{i=2}^{N} a_i y_3^i)(\sum_{i=2}^{N} b_i y_3^i)(f_{1,1}(y_3) + (*)) + f_{1,2}(y_3) + (**), \tag{3-17}$$

$$G_1 = \lambda_2 y_2 + \sum_{i=2}^{N} \lambda_2 b_i y_3^i + (\sum_{i=2}^{N} a_i y_3^i)(\sum_{i=2}^{N} b_i y_3^i)(g_{1,1}(y_3) + (***)) + g_{1,2}(y_3) + (****), \tag{3-18}$$

$$H_1 = h(y_3) + (*****). \tag{3-19}$$

Nas equações acima, as componentes representadas por $(*), \ldots, (*****)$ não contém constantes ou termos que dependem somente de y_3. Em outras palavras, estas componentes pertencem ao ideal $I(y_1) \cup I(y_2)$.

Por outro lado, desejamos considerar os termos que dependem somente de y_3 que aparecem nas duas primeiras coordanadas de X. Após realizarmos o produto matricial (4-1), estas coordenadas são dadas respectivamente, por

$$\sum_{i=2}^{N} \lambda_1 a_i y_3^i + (\sum_{i=2}^{N} a_i y_3^i)(\sum_{i=2}^{N} b_i y_3^i) f_{1,1}(y_3) + f_{1,2}(y_3) - (\sum_{i=2}^{N} i a_i y_3^{i-1}) h(y_3) \tag{3-20}$$

$$\sum_{i=2}^{N} \lambda_2 b_i y_3^i + (\sum_{i=2}^{N} a_i y_3^i)(\sum_{i=2}^{N} b_i y_3^i) g_{1,1}(y_3) + g_{1,2}(y_3) - (\sum_{i=2}^{N} i b_i y_3^{i-1}) h(y_3) \tag{3-21}$$

Agora consideramos as expansões de Taylor de $f_{1,1}, g_{1,1}$.

$$f_{1,1}(y_3) = \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} y_3 + \cdots \text{ e } g_{1,1}(y_3) = \beta_0^{(1)} + \beta_1^{(1)} y_3 + \cdots\,. \tag{3-22}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

Além disso, a hipótese sobre a parte linear de X e a expressão da troca de coordenadas em (3-15) nos permitem escrever

$$\begin{aligned} f_{1,2}(y_3) = \alpha_2^{(2)} y_3^2 + \cdots \quad ; \quad g_{1,2}(y_3) = \beta_2^{(2)} y_3^2 + \cdots , \\ h(y_3) = c_k y_3^k + \cdots \qquad (c_k \neq 0,\ k \geq 2)\,. \end{aligned} \tag{3-23}$$

Como apenas desejamos cancelar os coeficientes de grau menor que $n_0 + 1$, que dependem somente de y_3, as Equações (3-20) e (3-21) podem ser respectivamente substituídas por (3-24) e (3-25) sem perda de generalidade, onde

$$\begin{aligned} &\sum_{i=2}^{n_0} \lambda_1 a_i y_3^i + (\sum_{i=2}^{n_0-1} a_i y_3^i)(\sum_{i=2}^{n_0-1} b_i y_3^i)(\alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} y_3 + \cdots + \alpha_{n_0-2}^{(1)} y_3^{n_0-2}) + \\ &+ (\alpha_2^{(2)} y_3^2 + \cdots + \alpha_{n_0}^{(2)} y_3^{n_0}) - (\sum_{i=2}^{n_0-k} i a_i y_3^{i-1})(c_k y_3^k + \cdots + c_{n_0} y_3^{n_0}) \end{aligned} \tag{3-24}$$

e

$$\begin{aligned} &\sum_{i=2}^{n_0} \lambda_2 b_i y_3^i + (\sum_{i=2}^{n_0-1} a_i y_3^i)(\sum_{i=2}^{n_0-1} b_i y_3^i)(\beta_0^{(1)} + \beta_1^{(1)} y_3 + \cdots + \beta_{n_0-2}^{(1)} y_3^{n_0-2}) + \\ &+ (\beta_2^{(2)} y_3^2 + \cdots + \beta_{n_0}^{(2)} y_3^{n_0}) - (\sum_{i=2}^{n_0-k} i b_i y_3^{i-1})(c_k y_3^k + \cdots + c_{n_0} y_3^{n_0})\,. \end{aligned} \tag{3-25}$$

Levando em consideração as Fórmulas (3-24) e (3-25), a proposição se reduz à seguinte afirmação.

Afirmação: Os coeficientes $\alpha_0^{(1)}, \beta_0^{(1)}$ são constantes (isto é, eles não dependem de a_i, b_i). Além disso, $\alpha_l^{(1)}, \beta_l^{(1)}$ são polinomiais em $a_1, b_1, \ldots, a_l, b_l$ para $1 \leq l \leq n_0 - 2$. Ainda, $\alpha_l^{(2)}, \beta_l^{(2)}$ polinomiais em $a_1, b_1, \ldots, a_{l-1}, b_{l-1}$ para $1 \leq l \leq n_0$. Em particular, nenhum desses coeficientes dependem de a_{n_0}, b_{n_0}.

Prova da Afirmação. Os fatos referentes a $\alpha_l^{(1)}, \beta_l^{(1)}$ $(l = 0, 1, \ldots, n_0 - 2)$ são consequências imediatas de (3-22) e da forma da troca de coordenadas (3-15).

A afirmação referente a $\alpha_l^{(2)}, \beta_l^{(2)}$ $(l = 1, \ldots, n_0)$ possui uma justificativa semelhante, contudo, merece mais alguns comentários.

Ao realizar a troca de coordenadas dada por (3-15) e, por exemplo, considerarmos dy_1/dT, temos

$$\lambda_1 y_1 + \sum_{i=2}^{N} \lambda_1 a_i y_3^i + (\sum_{i=2}^{N} a_i y_3^i)(\sum_{i=2}^{N} b_i y_3^i)(f_1^1(y_3) + (*)) + f_2^1(y_3) + (**)\,,$$

para funções holomorfas apropriadas f_1^1, f_2^1. Além disso, $(*)$ representa termos que não dependem somente da variável y_3 enquanto que $(**)$ representa termos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA

que não são nem constantes nem dependem somente da veriável y_3. Fixemos um monômio de f_2^1 de grau $r \in \mathbb{N}$. Os coeficientes que entram no termo $\alpha_q^{(2)}$ são aqueles que correspondem aos monômios $y_1^{q_1} y_2^{q_2} y_3^{q_3}$ tais que $1 < q_1 + q_2 + q_3 < r$. Isto resulta a afirmação, e assim conluímos a demonstração do Teorema. □

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521440/CA