

2 Fundamentos

Estamos interessados em compreender o comportamento de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em \mathbb{C}^2 , em que o parâmetro “tempo” está em \mathbb{C} .

Primeiramente, iremos recordar os principais aspectos de equações diferenciais ordinárias reais. As Equações Diferenciais Ordinárias Complexas podem ser obtidas de EDOs reais por um procedimento natural de “complexificação”. Veremos que EDOs complexas estão intimamente relacionadas com folheações singulares holomorfas.

2.1 Equações Diferenciais Ordinárias Reais

Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial dado por $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, em que P e Q são polinômios. A equação diferencial ordinária associada a esse campo vetorial é dada por

$$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = X(x(t), y(t)).$$

Equivalentemente, ela pode ser vista como o seguinte sistema de EDOs

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = P(x(t), y(t)), \\ \frac{d}{dt}y(t) = Q(x(t), y(t)). \end{cases} \quad (2-1)$$

Como o campo vetorial é suficientemente suave (de fato, C^∞) podemos afirmar que dado $t_0 \in \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, existe uma única solução $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ de (2-1) definida em uma vizinhança de t_0 , verificando

$$\phi(t_0) = (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0)) = (x_0, y_0).$$

Além disso, existe o conceito de estender uma solução local a fim de obter uma solução definida em um domínio maximal, i.e., no “maior intervalo possível”. Isso significa que para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existe um intervalo $I(x_0, y_0)$

e uma solução φ de (2-1) definida em $I(x_0, y_0)$ que satisfaz as seguintes condições

1. $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$;
2. Se ψ definida em $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, é uma outra solução de (2-1) verificando $\psi(t_0) = (x_0, y_0)$, então, $I \subset I(x_0, y_0)$ e $\varphi|_I = \psi$.

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ o conjunto aberto $\{(t, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3; t \in I(x_0, y_0)\}$. O fluxo associado a (2-1) é definido como

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x_0, y_0) &\mapsto \phi(t), \end{aligned}$$

onde $\phi(t)$ é uma solução de (2-1) tal que $\phi(t_0) = (x_0, y_0)$.

Observe que talvez o fluxo não seja *completo*. Ou seja, talvez ele não esteja definido para todo $t \in \mathbb{R}$, já que $I(x_0, y_0)$ não é necessariamente toda a reta real. Por outro lado, é fácil verificar que quando $I(x_0, y_0) \neq \mathbb{R}$ então $\Phi(t, x_0, y_0)$ tende a infinito na medida em que t se aproxima dos extremos de $I(x_0, y_0)$, para (x_0, y_0) fixo. Aqui dizemos que $\Phi(t, x_0, y_0)$ “tende a infinito”, no sentido que ela sai de qualquer conjunto compacto contido no domínio de definição de X .

Observação 2.1.1 A discussão acima é válida para campos vetoriais regulares (digamos C^1) em variedades arbitrárias. Um resultado básico de Teoria de Equações Diferenciais é o seguinte: se as órbitas de um campo vetorial estiverem contidas em um conjunto compacto, então o intervalo maximal de definição para as soluções correspondentes é, de fato, \mathbb{R} . Em outras palavras, o fluxo gerado por esse campo vetorial é completo. Em particular, todo campo vetorial regular definido em uma variedade compacta (sem fronteira) é completo.

Retornamos então ao campo vetorial $X = (P, Q)$. O que precede implica que a imagem de Φ decompõe \mathbb{R}^2 em um conjunto de curvas (órbitas de X) juntamente com os pontos singulares de X . A fim de desenvolver esta observação, iremos recordar a definição de folheações (regulares, reais).

Definição 2.1.2 Considere uma variedade M de dimensão real n . Uma folheação \mathcal{F} de classe C^r e dimensão k ($1 \leq k < n$) em M consiste de uma cobertura coordenada $\{U_i, \psi_i\}$, $i \in I$, de M satisfazendo as seguintes condições:

1. Se $i \in I$, então $\psi_i(U_i) = U_i^1 \times U_i^2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, onde U_i^1, U_i^2 são discos abertos de \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^{n-k} respectivamente.

2. Se $i, j \in I$ e $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então a troca de coordenadas $\psi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_i(U_i \cap U_j)$ tem a forma $\psi_i \circ \psi_j^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$ onde $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Naturalmente uma cobertura coordenada para uma folheação \mathcal{F} pode ser automaticamente estendida a um *atlas folheado* maximal. Uma coordenada $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ também é denominada *carta folheada*, *coordenada folheada* ou mesmo *coordenada trivializante para \mathcal{F}* . Dada uma carta folheada ψ como acima, um conjunto da forma $\psi_i^{-1}(U_i^1 \times \text{cte})$ é chamado *placa*. Uma *cadeia de placas* é uma sequência de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ tais que $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, l-1\}$. Então introduzimos uma relação de equivalência entre pontos de M dizendo que $p \in M$ é equivalente a $q \in M$ se existe uma cadeia de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ tal que $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_l$. As classes de equivalência dessa relação são chamadas *folhas* de \mathcal{F} .

Observação 2.1.3 Se M é uma variedade complexa e as trocas de coordenadas para um atlas folheado são, de fato, difeomorfismos holomorfos, então temos uma folheação holomorfa.

Com essa terminologia em mãos, retornamos ao campo vetorial X . Outro fato conhecido de Equações Diferenciais Ordinárias é o assim chamado “Teorema da Caixa de Fluxo”. Este teorema garante a existência de um difeomorfismo R definido em uma vizinhança V de um ponto não-singular de X , tal que $R_*X = e_1$, onde (e_1, \dots, e_n) denota a base canônica de \mathbb{R}^n . Mais uma vez, este resultado vale para campos vetoriais C^r ($r \geq 1$) e o difeomorfismo R neste caso é tão regular quanto o campo (no caso, C^r).

Em particular, longe de pontos singulares de X , o Teorema da Caixa de Fluxo implica que as soluções de EDOs são folhas de uma folheação de dimensão 1. Neste sentido, dizemos que a imagem de Φ define uma *folheação singular* em \mathbb{R}^2 . Iremos formalizar esta definição no que se segue.

2.2 Equações Diferenciais Ordinárias Complexas

Agora desejamos estender estas noções ao caso complexo. Essencialmente, identificamos \mathbb{C}^n com \mathbb{R}^{2n} considerando uma *estrutura complexa* em \mathbb{R}^{2n} . Para tanto, basta definir um automorfismo de \mathbb{R}^{2n} que desempenhe o papel da multiplicação por $\sqrt{-1}$ em um espaço vetorial complexo. Mais precisamente, uma *estrutura complexa* em \mathbb{R}^{2n} consiste de um automorfismo $J : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ satisfazendo $J^2 = -Id$. A seguir, iremos usar a complexificação usual, em que J é dado por $J(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (-y_1, x_1, \dots, -y_n, x_n)$.

Seja $X : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dado por $X(z_1, z_2) = (P(z_1, z_2), Q(z_1, z_2))$ um campo vetorial polinomial. A EDO complexa associada a este campo é

$$\begin{cases} \frac{d}{dT}z_1(T) = P(z_1(T), z_2(T)) \\ \frac{d}{dT}z_2(T) = Q(z_1(T), z_2(T)), \end{cases} \quad (2-2)$$

em que o parâmetro T é complexo. Novamente, sendo X um campo vetorial holomorfo, a versão complexa do Teorema de Existência e Unicidade para EDOs regulares garante que dado $T_0 \in \mathbb{C}$ e $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ existe uma única solução holomorfa $\phi(T) = (\phi_1(T), \phi_2(T))$ de (2-2) definida em uma vizinhança B de T_0 , satisfazendo

$$\phi(T_0) = (\phi_1(T_0), \phi_2(T_0)) = (a, b).$$

O passo seguinte seria procurar unir estas soluções locais de maneira a obter um “domínio de definição maximal”. No entanto, percebemos que, em geral, isto não é possível, já que o parâmetro T pertence a \mathbb{C} . De fato, o problema é que ao tentar unir as vizinhanças, a sua união V não é necessariamente simplesmente conexa. Consequentemente, pode ser que a solução $\phi(T)$ não esteja bem definida em todo V , i.e, talvez ela seja multivaluada. Esta é uma diferença importante entre EDOs reais e complexas. Este fenômeno está ilustrado na Figura 2.1. Como a interseção de V_1 e V_2 não é conexa, soluções definidas em V_1 e V_2 , em geral, não podem ser “ajustadas” de forma a coincidir em ambas componentes conexas.

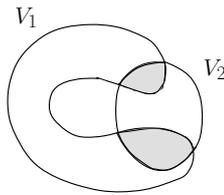


Figura 2.1: $V = V_1 \cup V_2$ não é simplesmente conexo

Agora iremos introduzir um ponto de vista mais geométrico para este tópico.

Utilizando a mencionada identificação de \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 (e \mathbb{C}^2 com \mathbb{R}^4), uma solução de (2-2) começando em $(a, b) = (a_1 + ia_2, b_1 + ib_2)$, localmente, pode ser vista como um “pedaço” de uma superfície real bidimensional L_0 em \mathbb{R}^4 passando pelo ponto (a_1, a_2, b_1, b_2) . Além disso, em (a_1, a_2, b_1, b_2) , L_0 é tangente ao espaço vetorial gerado pelos vetores

$$D_{(0,0)}(\phi_1, \phi_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_{(0,0)}(\phi_1, \phi_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2-3)$$

onde $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ é encarado como uma aplicação real de $B \subseteq \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^4 , e ϕ_i ($i = 1, 2$) satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. Observe que $T_{(a,b)}L_0$ é invariante pelo automorfismo J , devido às equações de Cauchy-Riemann. Consequentemente, $T_{(a,b)}L_0$ é uma *reta complexa*, i.e a imagem de um subespaço unidimensional (sobre \mathbb{C}) de $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ sob a identificação precedente.

Na medida em que as condições iniciais (a, b) variam, de (2-3) obtemos uma distribuição de planos reais bidimensionais (ou retas complexas) que podem ser integrados no sentido de Frobenius, gerando superfícies de dimensão 2 (ou curvas complexas). Em particular, afastado do conjunto singular, o campo vetorial define uma folheação de dimensão real igual a 2. Além disso, esta folheação é holomorfa como consequência da versão complexa do Teorema da Caixa de Fluxo.

As folhas da folheação em questão herdam uma estrutura natural de superfícies de Riemann. De fato, um atlas para essa estrutura é dado pelas soluções locais ϕ de (2-2). Mais precisamente, ϕ é um difeomorfismo holomorfo de $B \subseteq \mathbb{C}$ em sua imagem na folha (superfície de Riemann) L_0 .

Em resumo, um campo vetorial holomorfo em \mathbb{C}^2 gera imediatamente uma folheação holomorfa em \mathbb{C}^2 afastado do seu conjunto singular. Também dizemos que o campo vetorial define uma folheação singular em \mathbb{C}^2 que é conhecida como a sua folheação associada. Reciprocamente, dada uma folheação (singular) holomorfa \mathcal{F} , a fim de obter o campo vetorial cujas órbitas não-constantas são as folhas de \mathcal{F} , necessitamos um dado extra. Mais precisamente, devemos associar um número complexo (ou vetor em \mathbb{R}^2) ao espaço tangente da cada folha, de forma a recuperar a parametrização das folhas de \mathcal{F} , que na situação acima era dada por ϕ . Este número complexo desempenhará o papel da “velocidade” do fluxo de X . Ele permite recuperar as parametrizações locais ϕ das folhas da folheação que são dadas como soluções locais de (2-2).

Evidentemente, a noção de folheação singular holomorfa é um meio geométrico conveniente de lidar com EDOs complexas (equivalentemente, um campo vetorial holomorfo). Entretanto, a observação acima indica que ela não contém todas as informações contidas em um campo vetorial. Conforme já mencionado, as soluções locais ϕ em geral não podem ser unidas o que torna o problema de estendê-las ainda mais sutil.

2.3

Definições Básicas e Exemplos

Em seguimento à discussão relativamente informal da seção anterior, pretendemos dar definições formais e enunciados mais detalhados.

Definição 2.3.1 *Uma variedade complexa M^n de dimensão n é uma variedade diferencial equipada com um atlas $\{U_i, \psi_i\}$ tal que*

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j)$$

é holomorfa sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, e $\psi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}^n$, $\psi_j : U_j \rightarrow V_j \subseteq \mathbb{C}^n$.

Devido às Equações de Cauchy-Riemann, o determinante Jacobiano de um difeomorfismo holomorfo é sempre positivo. Segue que toda variedade complexa é orientável.

As Equações de Cauchy-Riemann também implicam que a aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é holomorfa se e somente se $DF(Jv) = J(DFv)$, para $v \in U$. De forma que os vetores em \mathbb{R}^{2n} invariantes por J são levados, por DF em vetores que também são invariantes por J . Em outras palavras, se F é holomorfa, então DF preserva planos complexos n -dimensionais.

A seguir, daremos a definição formal de folheação singular holomorfa, em uma variedade complexa, com a qual iremos trabalhar ao longo deste texto.

Definição 2.3.2 *Uma folheação singular holomorfa \mathcal{F} definida em uma variedade complexa M^n consiste dos seguintes dados:*

1. *Existe um atlas $\{U_i, \psi_i\}$ compatível com a estrutura complexa em M^n , onde $\psi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}^n$.*
2. *Existem campos vetoriais holomorfos X_i definidos em cada V_i , dados por $P_{1,V_i} \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + P_{n,V_i} \frac{\partial}{\partial z_n}$.*
3. *Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então existem funções $h_{ij} : \psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{C}$ tais que*

$$(\psi_j \circ \psi_i^{-1})_* X_i(\psi_i(U_i \cap U_j)) = h_{ij}(z_1, \dots, z_n) X_j(\psi_j(U_i \cap U_j)).$$

Se as funções h_{ij} são todas constantes iguais a 1, então trata-se, de fato, de um campo vetorial holomorfo em M .

Definição 2.3.3 Um campo vetorial holomorfo X definido em uma variedade M^n é tal que, dado um atlas de M^n , $\{U_i, \psi_i\}$, a seguinte equação é satisfeita

$$(\psi_j \circ \psi_i^{-1})_* X_i(\psi_i(U_i \cap U_j)) = X_j(\psi_j(U_i \cap U_j)),$$

onde $\psi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}^n$ e X_i são como na Definição 3.

Os exemplos a seguir indicam que a condição para que se defina um campo vetorial em uma variedade complexa é bem mais forte que as condições que nos permitem definir uma folheação singular holomorfa.

Exemplo 1: Toros Complexo

Seja Λ uma rede em \mathbb{C}^n . O toro complexo n -dimensional é dado pelo espaço quociente \mathbb{C}^n/Λ . Observe que um campo vetorial constante Y em \mathbb{C}^n induz um campo vetorial holomorfo no toro. De fato, campos vetoriais constantes são naturalmente preservados por translações de \mathbb{C}^n associadas aos elementos de Λ . Assim, Y define um campo vetorial holomorfo no toro dado pelo quociente \mathbb{C}^n/Λ .

Exemplo 2: Superfícies de Hopf

Considere λ_1, λ_2 em \mathbb{C}^* tais que $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$. Seja $\sigma(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$. A superfície de Hopf M associada a σ é o quociente $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\})/\sigma$. É imediato verificar que M é, de fato, uma variedade complexa de dimensão 2

Seja $X(z_1, z_2) = P(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + Q(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_2}$ um campo vetorial polinomial em $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que

$$X(\sigma(z_1, z_2)) = \alpha P(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + \beta P(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_2},$$

onde $\alpha/\lambda_1 = \beta/\lambda_2$. Então X define uma folheação singular holomorfa em $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\})/\sigma$. O leitor pode observar que a fim de se obter um campo vetorial holomorfo na superfície de Hopf, devemos ter a razão acima igual a 1. Isso indica que em superfícies de Hopf, existem muito mais folheações singulares holomorfas do que campos vetoriais holomorfos.

O seguinte exemplo concreto ilustra esta situação.

Seja $\lambda_1 = e^{-2}$ e $\lambda_2 = e^{-4}$. Considere o campo vetorial polinomial dado por $X = P \partial/\partial z_1 + Q \partial/\partial z_2$ onde

$$\begin{aligned} P(z_1, z_2) &= z_1^3 + z_1 z_2, \\ Q(z_1, z_2) &= z_2^2 + 2z_1^2 z_2. \end{aligned}$$

Observe que

$$X(\sigma(z_1, z_2)) = e^{-6}P(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + e^{-8}Q(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Por outro lado,

$$D\sigma.X(z_1, z_2) = e^{-2}P(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + e^{-4}Q(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

De forma que $D\sigma.X(z_1, z_2) = e^4X(\sigma(z_1, z_2))$. Tendo em vista a discussão anterior, o campo vetorial X induz uma folheação holomorfa em M , e não um campo vetorial.

Exemplo 3: Plano Projetivo Complexo (Espaço)

Folheações em espaços projetivos complexos constituem a principal fonte de exemplos, no sentido que são fáceis de descrever, englobando as dificuldades essenciais de casos mais gerais. Por isso serão tratados mais detalhadamente. Começamos por considerar a seguinte relação de equivalência.

$$z \sim z' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*; \quad z = \lambda z'; \quad z, z' \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

As classes que equivalência $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} / \sim$ formam o espaço projetivo complexo de dimensão 2, denotado por $\mathbb{CP}(2)$.

Dois pontos $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ definem o mesmo ponto em $\mathbb{CP}(2)$ se e somente se

$$a/a' = b/b' = c/c'.$$

De forma que a projeção $\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{CP}(2)$ é determinada pelas razões entre as coordenadas de (a, b, c) . Tradicionalmente, $\pi(a, b, c)$ é denotada por $(a : b : c)$ e a, b, c são chamadas coordenadas homogêneas para $(a : b : c)$.

Começamos considerando os seguintes conjuntos abertos que cobrem $\mathbb{CP}(2)$:

$$\begin{aligned} U_a &= \{(a : b : c) \in \mathbb{CP}(2) ; a \neq 0\}; \\ U_b &= \{(a : b : c) \in \mathbb{CP}(2) ; b \neq 0\}; \\ U_c &= \{(a : b : c) \in \mathbb{CP}(2) ; c \neq 0\}. \end{aligned}$$

Juntamente com estes conjuntos abertos, temos as seguintes cartas coordenadas:

$$\varphi_a : U_a \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$(a : b : c) \mapsto (b/a, c/a) = (x, y);$$

$$\begin{aligned} \varphi_b : U_b &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (a : b : c) &\mapsto (a/b, c/b) = (u, v); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_c : U_c &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (a : b : c) &\mapsto (a/c, b/c) = (z, w). \end{aligned}$$

Seja $L_\infty = \mathbb{CP}(2) \setminus E_a = \{(0 : b : c) \in \mathbb{CP}(2); (b, c) \in \mathbb{C}^2\}$. Uma verificação direta usando as cartas coordenadas introduzidas acima mostra que L_∞ é isomorfo a $\mathbb{CP}(1)$. Assim $\mathbb{CP}(2) = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{CP}(1)$ i.e. $\mathbb{CP}(2)$ pode ser visto como \mathbb{C}^2 sendo adicionado à esfera de Riemann. Neste sentido, $\mathbb{CP}(2)$ é uma compactificação de \mathbb{C}^2 . Além disso, em coordenadas afins, (x, y) , L_∞ corresponde ao “infinito” e L_∞ está linearmente mergulhado em $\mathbb{CP}(2)$. Por isso é chamada de *linha no infinito*. Finalmente, observamos que esta construção se aplica a qualquer uma das coordenadas afins em $\mathbb{CP}(2)$, isto é, qualquer $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}(2)$ afim gera uma “linha no infinito”.

Iremos construir uma folheação singular holomorfa em $\mathbb{CP}(2)$ de forma semelhante ao que foi feito no caso de superfícies de Hopf.

Considere um campo vetorial polinomial homogêneo $X = P \frac{\partial}{\partial z_1} + Q \frac{\partial}{\partial z_2} + R \frac{\partial}{\partial z_3}$ em $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ de grau d . Considere a ação de \mathbb{C}^* em $\mathbb{C}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ dada por homotetias $\sigma(z_1, z_2, z_3) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Conforme já mencionado, o quociente desta ação é precisamente $\mathbb{CP}(2)$. Por outro lado, note que

$$X(\sigma(z_1, z_2, z_3)) = \lambda^d P(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda^d Q(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_2} + \lambda^d R(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Além disso,

$$D\sigma.X(z_1, z_2, z_3) = \lambda P(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda Q(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_2} + \lambda R(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Assim, $D\sigma.X = \lambda^{d-1}X$ de forma que as “direções” associadas a X são invariantes por homotetias. Então X de fato define uma folheação singular em $\mathbb{CP}(2)$.

Outra maneira equivalente de definir uma folheação singular holomorfa em $\mathbb{CP}(2)$ é considerar um campo vetorial holomorfo em \mathbb{C}^2 e verificar se ele pode ser estendido a uma folheação holomorfa em todo $\mathbb{CP}(2)$. A seguir estudamos esse caso em detalhes.

Seja $X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$ um campo vetorial polinomial nas coordenadas afins (x, y) . Naturalmente, ele induz um campo vetorial racional Y (resp. Z) definido nas coordenadas afins (u, v) (resp. (z, w)). Note que basta multiplicar os campos vetoriais Y, Z pelos seus denominadores a fim de obter campos holomorfos (de fato, polinomiais).

Por exemplo, Y é dado por

$$\begin{aligned} Y(u, v) &= (\varphi_a \circ \varphi_b)^*(X(x, y)) \\ &= D(\varphi_a \circ \varphi_b)^{-1} \cdot X(\varphi_a \circ \varphi_b(u, v)) \\ &= \begin{pmatrix} -u^2 & 0 \\ -uv & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(1/u, v/u) \\ Q(1/u, v/u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conforme já mencionado, este campo vetorial não é holomorfo no domínio das coordenadas (u, v) já que possui pólos em $\{u = 0\}$. Entretanto, multiplicando Y por u^d , o novo campo vetorial $u^d Y$ é evidentemente holomorfo (com singularidades isoladas) no domínio de (u, v) . Agora, mudando do sistemas coordenado (u, v) para (x, y) obtemos

$$\begin{aligned} D(\varphi_a \circ \varphi_b) \cdot (u^d Y) &= u^d D(\varphi_a \circ \varphi_b) \cdot Y(u, v) \\ &= u^d D(\varphi_a \circ \varphi_b) \cdot D(\varphi_a \circ \varphi_b)^{-1} \cdot X(x, y) \\ &= u^d X(x, y). \end{aligned}$$

Repetindo este procedimento com as outras cartas coordenadas, obtemos uma folheação holomorfa em $\mathbb{CP}(2)$. Finalmente, notamos que o campo vetorial polinomial original em \mathbb{C}^2 não induz um campo vetorial holomorfo em $\mathbb{CP}(2)$. na verdade, ele induz um campo vetorial *meromorfo* cujos pólos estão contidos na linha no infinito correspondente.

Isto possui uma generalização óbvia para espaços projetivos complexos de dimensão mais alta.

Resumindo, construímos folheações singulares holomorfas em $\mathbb{CP}(2)$ seguindo, *a priori* dois métodos distintos

- Através de um campo vetorial polinomial homogêneo em \mathbb{C}^3 .
- Através de um campo vetorial polinomial em \mathbb{C}^2 .

Não é difícil verificar que ambas as construções são equivalentes, no sentido que elas produzem o mesmo conjunto de folheações. Esta verificação será feita implicitamente na prova do Lema 2.3.7. Mas é bem mais difícil ver que estas construções, de fato dão origem a *todas as folheações singulares holomorfas* em $\mathbb{CP}(2)$. Este é o conteúdo do Teorema 2.3.4 abaixo. Trata-se de uma

manifestação do Princípio de GAGA, mas que está além da abordagem que faremos neste trabalho.

Teorema 2.3.4 *Seja \mathcal{F} uma folheação singular holomorfa em $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$. Então \mathcal{F} é induzida por um campo vetorial polinomial homogêneo X em \mathbb{C}^3 que, além disso, possui um conjunto singular de codimensão pelo menos 2.*

Levando em conta o Teorema 2.3.4, é natural procurar definir a noção de grau de uma folheação em $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$. A princípio, poderíamos pensar em defini-lo como sendo o grau do campo vetorial polinomial que representa a folheação nas coordenadas afins. Porém, como pode ser visto facilmente, este grau pode variar dependendo da carta afim que foi escolhida.

O seguinte lema será uma motivação para a definição correta de grau de uma folheação \mathcal{F} em $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$ induzida por um campo vetorial polinomial $X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$ em \mathbb{C}^2 . Seja $P = \sum_{i=0}^d P_i(x, y)$ e $Q = \sum_{i=0}^d Q_i(x, y)$ onde P_i, Q_i são polinômios homogêneos de grau i .

Lema 2.3.5 *A “reta no infinito”, L_∞ , de $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$ é invariante pela folheação \mathcal{F} , induzida por X como acima, se e somente se a componente homogênea de maior grau $P_d \frac{\partial}{\partial x} + Q_d \frac{\partial}{\partial y}$ não for da forma $h(x, y)(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})$, para algum polinômio h de grau $d - 1$.*

Prova. Para entender o comportamento de $X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$ próximo do infinito no sistema de coordenadas (x, y) , usamos a seguinte troca de coordenadas: $u = \frac{1}{x}, v = \frac{y}{x}$. De forma que este campo vetorial na carta coordenada (u, v) é dado por

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \begin{pmatrix} -u^2 & 0 \\ -uv & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(1/u, v/u) \\ Q(1/u, v/u) \end{pmatrix} \\ &= -u^2(P(1/u, v/u)) \frac{\partial}{\partial u} + u(Q(1/u, v/u) - vP(1/u, v/u)) \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

Agora basta analisar a folheação correspondente em uma vizinhança de $\{u = 0\}$.

Denotemos $\sum_{i=0}^{d-1} P_i$ por $\tilde{P}(1/u, v/u)$, e $\sum_{i=0}^{d-1} Q_i$ por $\tilde{Q}(1/u, v/u)$. Observe que $u^d \tilde{P}(1/u, v/u) = uh_1(u, v)$, $u^d \tilde{Q}(1/u, v/u) = uh_2(u, v)$ para polinômios apropriados h_1 e h_2 de grau $d - 1$. Além disso, $u^d P_d(1/u, v/u) = P_d(1, v)$, naturalmente existe uma expressão análoga para Q_d . Multiplicando o campo vetorial $X(u, v)$ por u^{d-1} obtemos um campo vetorial holomorfo nas coordenadas (u, v) , dado por

$$Y(u, v) = -u(P_d(1, v) + uh_1(u, v)) \frac{\partial}{\partial u} + (Q_d(1, v) - vP_d(1, v) + ug(u, v)) \frac{\partial}{\partial v},$$

onde $g(u, v) = h_2(u, v) - v h_1(u, v)$.

Se $Q_d(1, v) - v P_d(1, v) \equiv 0$, as componentes de $Y(u, v)$ são ambas divisíveis por u . Eliminando este fator em comum, fica claro que a reta no infinito não é preservada pela folheação. Reciprocamente, se $Q_d(1, v) - v P_d(1, v)$ não é identicamente nulo, L_∞ é preservada, já que a componente $\partial/\partial u$ de Y se anula identicamente em $L_\infty \simeq \{u = 0\}$.

Finalmente, está claro que $Q_d(1, v) - v P_d(1, v)$ se anula identicamente se e somente se a componente homogênea de grau mais alto for radial. \square

Definição 2.3.6 *O grau de uma folheação \mathcal{F} em $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$ dada pela compactificação do campo vetorial polinomial $X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$ de grau d e tendo apenas zeros isolados é igual a:*

1. $d - 1$, se existe um polinômio $h(x, y)$ de grau $d - 1$ tal que $P_d \frac{\partial}{\partial x} + Q_d \frac{\partial}{\partial y} = h(x, y) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Em outras palavras, o grau é $d - 1$ se a componente homogênea de grau mais alto de X for um múltiplo do campo vetorial radial
2. d , caso contrário.

A seguir, daremos uma interpretação mais genérica do grau de uma folheação conforme foi definido acima. Na verdade, o conteúdo deste lema pode ser usado como uma definição equivalente de grau.

Lema 2.3.7 *Seja \mathcal{F} uma folheação singular holomorfa em $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$ de grau d . Então:*

1. *Existe um campo vetorial polinomial Z de grau d em \mathbb{C}^3 , com conjunto singular de codimensão pelo menos 2, induzindo \mathcal{F} pela projeção radial de suas órbitas;*
2. *O número de tangências de \mathcal{F} com uma reta projetiva genérica é d .*

Prova. Primeiramente, mostraremos que a projeção de uma folheação associada a um campo vetorial polinomial de grau d em \mathbb{C}^3 é, de fato, uma folheação \mathcal{F} em $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$ de grau d . Seja $Z = \sum_{i=0}^2 H_i(z_0, z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_i}$, onde (z_0, z_1, z_2) representa as coordenadas de \mathbb{C}^3 . Na carta $(x, y) = (z_1/z_0, z_2/z_0)$, o campo vetorial Z é dado por

$$X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{onde}$$

$$\begin{aligned} P(x, y) &= H_1(1, x, y) - xH_0(1, x, y) \\ Q(x, y) &= H_2(1, x, y) - yH_0(1, x, y). \end{aligned}$$

Se $H_0(1, x, y)$ tem grau d (i.e., H_0 não é divisível por z_0), então X possui grau $d + 1$. Além disso, a componente de X de grau mais alto, é dada por $-H_0^d(1, x, y)(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})$, onde H_0^d representa a componente homogênea de grau d de $H_0(1, x, y)$. De acordo com a Definição 2.3.6, \mathcal{F} tem grau d .

Se $H_0(1, x, y)$ tem grau menor que d (i.e., H_0 é divisível por z_0), então pelo menos um dentre $H_1(1, x, y)$ e $H_2(1, x, y)$ necessariamente tem grau d , caso contrário os três polinômios seriam divisíveis por z_0 . Isso implicaria que o conjunto singular de Z tem codimensão 1, contradizendo a hipótese. Logo X tem grau d , e novamente a Definição 2.3.6 implica que \mathcal{F} tem grau d . A recíproca é análoga, o que estabelece a primeira parte do lema.

Agora vamos considerar as tangências entre \mathcal{F} e uma reta genérica em $\mathbb{CP}(2)$. A menos de fazer uma troca de coordenadas, podemos supor que as tangências com uma reta genérica projetiva $y = \lambda x$ estão todas contidas na carta afim principal de $\mathbb{CP}(2)$ de forma que

$$\lambda P(x, \lambda x) = Q(x, \lambda x),$$

ou seja, os pontos de tangência são dados pelos zeros do polinômio $\lambda P(x, \lambda x) - Q(x, \lambda x)$. Então o número de tangências (contado com multiplicidade) é o grau de $\lambda P(x, \lambda x) - Q(x, \lambda x)$. Mas, se d é o grau da folheação, então ou $P_d(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_d(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ é radial (e conseqüentemente X possui grau $d + 1$) ou não é (e neste caso X tem grau d). O primeiro caso é equivalente a $\lambda P_d(x, \lambda x) - Q_d(x, \lambda x) = 0$, o que significa que $\lambda P(x, \lambda x) - Q(x, \lambda x)$ tem grau d . O outro caso somente acontece quando a componente de grau mais alto de $\lambda P(x, \lambda x) - Q(x, \lambda x)$ é não nula, o que implica que o grau deste polinômio é d . A recíproca é análoga. \square

De acordo com o Teorema 2.3.4 e o Lema 2.3.7, o espaço $\text{Fol}(\mathbb{CP}(2), d)$ que consiste das folheações singulares holomorfas de grau d é naturalmente contido no espaço dos campos vetoriais polinomiais homogêneos de grau d em três variáveis. Além disso, dois desses campos vetoriais que possuem um conjunto singular de codimensão pelo menos 2 definem a mesma folheação se e somente se eles diferem por uma constante multiplicativa. Logo uma simples contagem de coeficientes nos dá o seguinte

Corolário 2.3.8 *O espaço $\text{Fol}(\mathbb{CP}(2), d)$ está naturalmente identificado com*

um conjunto aberto de Zariski do espaço projetivo complexo de dimensão

$$(d + 1)(d + 3) - 1.$$

□

Também devemos observar que o grupo de automorfismos de $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$, $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$, possui uma ação natural em $\mathrm{Fol}(\mathbb{C}\mathbb{P}(2), d)$ através de trocas de coordenadas projetivas.

2.4

O Procedimento de “Blow-up” e algumas Aplicações

À princípio, o “blow-up” pode ser visto como um mero artifício que apenas cria novas variedades a partir outras. No entanto, veremos que trata-se de um procedimento particularmente útil para entender o comportamento de folheações ou campos vetoriais em pontos singulares.

Definição 2.4.1 *O “blow-up” de \mathbb{C}^2 em $(0, 0)$ é uma variedade complexa $\tilde{\mathbb{C}}^2$ obtida identificando duas cópias de \mathbb{C}^2 da seguinte maneira:*

$$(x, t) \simeq (s, y) \Leftrightarrow s = \frac{1}{t}; \quad y = tx \quad (t \neq 0, s \neq 0),$$

onde (x, t) e (s, y) são as coordenadas das duas referidas cópias.

Por definição, o *divisor excepcional* de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ é $E \subset \tilde{\mathbb{C}}^2$ dado por $\{x = 0\}$ (resp. $\{y = 0\}$) nas coordenadas (x, t) (resp. (s, y)). Assim, E está bem definido e é isomorfo a $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$.

A aplicação de “blow-up” $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é dada por $\pi(x, t) = (x, tx)$ e $\pi(s, y) = (sy, y)$. Além disso, ela é tal que:

- $\pi^{-1}(0, 0) = E$;
- $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus E \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é um difeomorfismo holomorfo;
- π é própria (i.e. a pré-imagem de um compacto é também compacta).

Agora vamos definir o “blow-up” de uma variedade complexa M de dimensão 2 em um ponto $p \in M$. Considere a carta coordenada local $\psi : U \rightarrow W \subset \mathbb{C}^2$ em uma vizinhança U de p , tal que $\psi(p) = (0, 0)$.

Seja $\tilde{W} = \pi^{-1}(W)$, onde π é a aplicação de “blow-up”. Seja M' a união disjunta de $M \setminus \{p\}$ com \tilde{W} , e considere a seguinte relação de equivalência

$$q_0 \simeq q_1 \iff q_0 \in U \setminus \{p\}, \quad q_1 \in \tilde{W} \setminus E \text{ e } q_1 = \pi^{-1}(\psi(q_0)).$$

O “blow-up” \widetilde{M} de M em p é o quociente M'/\simeq . Observe que \widetilde{M} é, de fato uma variedade complexa suave, já que \widetilde{W} é uma variedade e $\pi^{-1} \circ \psi : U \setminus \{p\} \rightarrow \widetilde{W} \setminus E$ é um difeomorfismo holomorfo.

Similarmente, existe uma aplicação de “blow-up” de \widetilde{M} em M (que também será denotada por π) que é própria e $\pi^{-1}(p) = E$. Além disso, $\pi : \widetilde{M} \setminus E \rightarrow M \setminus \{p\}$ é um difeomorfismo holomorfo.

O “blow-up” de uma folheação ou de um campo vetorial também pode ser definido de maneira natural. Seja $X = F \frac{\partial}{\partial x} + G \frac{\partial}{\partial y}$ um campo vetorial em \mathbb{C}^2 , onde F e G são funções holomorfas (não necessariamente polinomiais). Suponha que $(0, 0)$ é uma singularidade isolada de X de ordem k (k é o mínimo entre as ordens de F e G em $(0, 0)$).

Seja $F = \sum_{n=k}^{\infty} F_n$, e $G = \sum_{n=k}^{\infty} G_n$, onde F_n e G_n são as componentes homogêneas de grau n das séries de Taylor de F e G , respectivamente.

Usando a aplicação de “blow-up” $\pi : \widetilde{\mathbb{C}}^2 \setminus E \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nas coordenadas (x, t) , mais precisamente, $\pi(x, t) = (x, tx)$ ($x \neq 0$), definimos $\pi^* X$.

$$\pi^* X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t/x & 1/x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^k F_k(1, t) + x^{k+1}(F_{k+1}(1, t) + xF_{k+2}(1, t) + \dots) \\ x^k G_k(1, t) + x^{k+1}(G_{k+1}(1, t) + xG_{k+2}(1, t) + \dots) \end{pmatrix}.$$

Denotando $f(x, t)$ por $(F_{k+1}(1, t) + xF_{k+2}(1, t) + \dots)$ e $g(x, t)$ por $(G_{k+1}(1, t) + xG_{k+2}(1, t) + \dots)$, a equação acima é dada, equivalentemente por

$$\pi^* X = x^k [F_k(1, t) + xf(x, t)] \frac{\partial}{\partial x} + x^{k-1} [-tF_k(1, t) - xtf(x, t) + G_k(1, t) + xg(x, t)] \frac{\partial}{\partial t}. \tag{2-4}$$

Observe que este campo vetorial admite uma extensão holomorfa \widetilde{X} ao divisor excepcional E ($\{x = 0\}$). Assim, \widetilde{X} é o “blow-up” de X no ponto singular $(0, 0)$. Adicionalmente, se $k \geq 2$ então \widetilde{X} é singular em todo ponto de E . Similarmente, o “blow-up” da folheação \mathcal{F} associada a X é a folheação $\widetilde{\mathcal{F}}$ associada a \widetilde{X} .

O comportamento de $\widetilde{\mathcal{F}}$ (e de \widetilde{X}) em uma vizinhança de E é significativamente diferente dependendo se $G_k(1, t) - tF_k(1, t)$ é identicamente nulo ou não. Analizaremos os dois casos separadamente.

- Se $G_k(1, t) - tF_k(1, t)$ não for identicamente nulo

Dividindo a Equação (2-4) por x^{k-1} , a folheação permanece inalterada e $\widetilde{\mathcal{F}}|_{\widetilde{\mathbb{C}}^2 \setminus E}$ é simplesmente

$$x[F_k(1, t) + xf(x, t)] \frac{\partial}{\partial x} + [-tF_k(1, t) - xtf(x, t) + G_k(1, t) + xg(x, t)] \frac{\partial}{\partial t}.$$

Assim, as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ em E são dadas por $G_k(1, t) - tF_k(1, t) = 0$, e E ($\{x = 0\}$) é invariante pela folheação.

- Se $G_k(1, t) - tF_k(1, t) \equiv 0$ (equivalentemente, se $F_k(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + G_k(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ é um múltiplo do campo vetorial radial $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$)

Neste caso, podemos dividir (2-4) por x^k , obtendo:

$$[F_k(1, t) + xf(x, t)] \frac{\partial}{\partial x} + [-tf(x, t) + g(x, t)] \frac{\partial}{\partial t} .$$

Logo,

$$\tilde{\mathcal{F}}|_E = F_k(1, t) \frac{\partial}{\partial x} + [-tF_{k+1}(1, t) + G_{k+1}(1, t)] \frac{\partial}{\partial t} .$$

Observe que $F_k(1, t)$ não é identicamente nulo, pois se fosse, então $G_k(1, t) \equiv 0$ e $(0, 0)$ não seria uma singularidade de ordem k conforme supúnhamos. Assim, o divisor excepcional E não é preservado por $\tilde{\mathcal{F}}$, e as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ talvez não estejam contidas em E .

As folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ são transversas a E e são projetadas por π em curvas passando por $(0, 0)$ que são invariantes por \mathcal{F} . Como π é uma aplicação própria, a projeção é um conjunto analítico (os zeros comuns de um número finito de funções holomorfas). Uma curva analítica invariante pela folheação, contendo a singularidade de \mathcal{F} é chamada *separatriz* de \mathcal{F} . Uma singularidade com infinitas separatrizes é chamada *dicrítica*.