1
Introdução

O assunto principal deste trabalho é o estudo de singularidades de campos vetoriais complexos de dimensão 2. Começamos traçando um paralelo entre equações diferenciais ordinárias reais e complexas, ressaltando os principais pontos em que elas diferem. Por exemplo, o análogo ao intervalo maximal de soluções de EDOs *reais* não existe no caso complexo, em geral. Por outro lado, a idéia geométrica de encarar soluções de EDOs reais (afastado do conjunto singular) como folhas bidimensionais de uma folheação pode ser facilmente adaptada ao cenário complexo. No caso de EDOs complexas, podemos dizer que as órbitas são Superfícies de Riemann e que fora das singularidades, elas são folhas de uma folheação holomorfa. No Capítulo 2 daremos a definição formal de folheação singular holomorfa, que desempenhará um papel fundamental ao longo desse texto. Alguns exemplos de folheações em diferentes variedades ilustrarão concretamente os objetos com os quais estamos lidando. Somos então levados a discutir em detalhes o exemplo específico de folheações no espaço projetivo. A seguir, introduzimos o processo de "blow-up", que será de extrema utilidade, especialmente nas duas últimas seções.

No Capítulo 3 damos alguns resultados básicos associados a singularidades de folheações holomorfas. Começamos tratando do caso em que a folheação $\mathcal{F}$ associada ao campo vetorial X, possui uma singularidade isolada simples em $(0,0)$, com autovalores não-nulos λ_1 e λ_2. Em outras palavras,

$$X(x_1, x_2) = [\lambda_1 x_1 + \varphi_1(x_1, x_2)]\frac{\partial}{\partial x_1} + [\lambda_2 x_2 + \varphi_2(x_1, x_2)]\frac{\partial}{\partial x_2}\,. \tag{1-1}$$

Passamos então a discutir o problema de linearização de tais campos vetoriais. Mais precisamente, procuramos entender quais são as condições para que exista uma troca de coordenadas holomorfa que linearize o sistema. Na verdade, é possível encontrar uma tal troca de coordenadas *formal*, com exceção de casos ressonantes específicos. Mostrar a sua convergência, no entanto, é bem mais difícil. Evidentemente, a existência de uma troca de coordenadas holomorfa que lineariza o sistema depende inteiramente dos autovalores. Por exemlplo, se λ_1/λ_2 não pertence a $\mathbb{R}_-$ e se nem λ_1/λ_2, nem λ_2/λ_1 pertencem a $\mathbb{N}$ então, em coordenadas apropriadas, o sistema é linear. Este é o conteúdo do Teorema de Linearização de Poincaré. Mas se a singularidade pertence ao domínio de Siegel, i.e., $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$, não é possível obter uma troca de coordenadas holomorfa. Entretanto, em coordenadas locais (y_1, y_2), a Equação 1-1 pode ser expressa como

$$X = \lambda_1 y_1[1 + (h.o.t.)]\partial/\partial y_1 + \lambda_2 y_2[1 + (h.o.t.)]\partial/\partial y_2 \,.$$

A seguir, iremos investigar o caso em que um dos autovalores, digamos, λ_2 é *zero* e $\lambda_1 \neq 0$. Tais singularidades são denominadas *selas-nó*. É possível obter uma normalização para esse tipo de singularidade, conhecida como Forma Normal de Dulac. Este resultado simplesmente garante que campos vetoriais contendo singularidades do tipo sela-nó podem ser dados, em coordenadas locais (y_1, y_2) por

$$X(y_1, y_2) = [y_1(1 + \lambda y_2^p) + y_2 R(y_1, y_2)] \frac{\partial}{\partial y_1} \; + \; y_2^{p+1} \frac{\partial}{\partial y_2} \,, \tag{1-2}$$

a menos de um fator inversível.

Na Seção 3.2 estudamos brevemente singularidaes em dimensões mais altas. Em particular, damos uma generalização do Teorema de Linearização de Poincaré e alguns resultados relacionados a singularidades do tipo sela-nó em dimensão 3.

O Capítulo 4 é o ponto central deste texto, sem dúvida contendo os resultados mais importantes dessa abordagem. Ele é fortemente inspirado nos trabalhos de J.-F. Mattei e R. Moussu (cf. (M-M)) e J. Martinet em conjunto com J.-P. Ramis (cf. (Ma-R)). Começamos revisitando singularidades do tipo sela-nó, mas dessa vez de um ponto de vista um pouco mais avançado. Estamos interessados em entender quando é que existe uma troca de coordenadas holomorfa, em que o termo $R(y_1, y_2)$ da Equação 1-2 se torna *identicamente* nulo. Apesar de ser possível obter uma conjugação formal entre as duas formas normais, em geral, esta aplicação não converge em uma vizinhança da singularidade. Porém, em certos setores da vizinhança, a conjugação formal é, de fato, *somável*. Este é precisamente o conteúdo de Teorema de Hukuara-Kimura-Matuda. O passo seguinte é estudar as funções que "unem" esses setores, i.e., os difeomorfismos associados à troca de setores. No caso mais simples, existem dois difeomorfismos que realizam as duas possíveis trocas de setores, dependendo da componente conexa do domínio de interseção que está sendo considerada. Um destes difeomorfismos é uma translação, o outro é tangente à identidade. A questão interessante é que esses difeomorfismos não são únicos. Apenas as suas classes de conjugação são canonicas e podem ser usadas para parametrizar o espaço modular de selas-nó. Isso nos leva a um outro tópico também relacionado: a classificação dos diffeomorfismos da forma $f(z) = z + z^2 + \cdots$, seguindo o trabalho de S. Voronin (Vo). O procedimento a ser utilizado novamente é baseado em normalizações setoriais, porém desta vez, as aplicações normalizantes serão contruidas graças ao Teorema Mensurável de Riemann.

Até este ponto, estivemos trabalhando somente com singularidades simples. Poderíamos nos perguntar o que fazer no caso de singularidades mais degeneradas. De fato, em dimensão 2 não precisamos nos preocupar com elas, já que existe um método bastante eficaz de reduzir qualquer singularidade em uma "superposição" de singularidades simples. É precisamente este processo que explicamos na Seção 4.2, seguindo (M-M). Essencialmente, ao compor um número finito de aplicações de "blow-up", reduzimos uma singularidade de ordem superior a uma série de curvas contendo apenas singularidades simples. Este é o conteúdo do teorema de Seidenberg. Existe mais uma redução que ainda pode ser feita no caso de singularidades simples: ou ela é reduzida a singularidades to tipo sela-nó, ou em singularidades em que ambos λ_1/λ_2 e λ_2/λ_1 não pertencem a $\mathbb{N}$.

Finalmente, na Seção 4.3 fazemos uma exposição do Teorema de Mattei-Moussu, tratando da existência de integrais primeiras para folheações. Em seu trabalho conjunto (M-M), J.-F. Mattei e R. Moussu dão condições necessárias e suficientes para a existência de funções que sejam constantes ao longo das folhas de uma folheação $\mathcal{F}$ com uma singularidade isolada. Além disso, essas condições são de natureza topológica. Este teorema pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 1.0.1 (Mattei-Moussu (M-M)) *Considere a folheação holomorfa $\mathcal{F}$ definida em $U \subset \mathbb{C}^2$ com uma singularidade isolada em $(0,0)$. Suponha que ela satisfaz as seguintes condições:*

1. *Apenas um número finito de folhas de $\mathcal{F}$ acumulam em $(0,0)$;*
2. *As folhas de $\mathcal{F}$ são fechadas em $U \setminus \{(0,0)\}$.*

Então $\mathcal{F}$ possui uma integral primeira holomorfa, não-constante em $f : U \to \mathbb{C}$.

A prova do Teorema de Mattei-Moussu for dividida em 3 partes, com o intuito tornar a sua exposição mais transparente. O primeiro passo é mostrar que sob essas condições, a singularidade pode ser reduzida a uma superposição de singularidades, todas no domínio de Siegel. Isso é feito estudando a holonomia local de uma folha com respeito a um círculo em torno de cada tipo de singularidade que possa estar contido na árvore de Seidenberg de $\mathcal{F}$.

Chega-se a conclusão de que a única forma das Condições 1 e 2 não serem violadas é quando as singularidades pertencem ao domínio de Siegel.

O passo seguinte é mostrar que todas as singularidades da árvore de Seidenberg admitem integral primeira local. Isso é feito mostrando que o quociente λ_1/λ_2 pertence a $\mathbb{Q}_-$ e usando o fato (também graças a J.-F. Mattei and R. Moussu) de que se a holonomia associada a uma folha de $\mathcal{F}$ é linearizável, então o campo vetorial associado a $\mathcal{F}$ também o é.

Finalmente, estendemos as integrais primeiras locais de forma a obter uma global. Mostramos isso no caso em que todas as singularidades são reduzidas com um único blow-up e o caso geral segue facilmente por indução.