BIBLIOGRAFIA:

[1] HILTON, Peter. **Unfolding of singularities**. Functional Analysis, Proceedings of the Brazilian Math. Society, 1976.

[2] MARTINET, Jean. **Deploiements Versels des Applications Differentiables et Classification des Applications Stables** . Lecture Notes in Mathematics no. 535, 1-44, 1975. (Singularités D'applications differentiables). Springer-Verlag.

[3] MATHER, John N. **Stability of C^∞ Mappings, III: Finitely Determined Map-Germs**. Annals of Math. 35, 1968. Institut des Hautes Études Scientifiques.

[4] WHITNEY, Hassler **Differentiable even functions**. Duke Math J. 10, 1943, 159-160.

[5] WHITNEY, Hassler **On singularities of mappings of Euclidean spaces I, Mappings of the plane into the plane**. Annals of Math. 62 (1955), 374-410.

Apêndice:

Começamos com alguns conceitos algébricos usados extensivamente. Seja R um anel comutativo e M um módulo sobre R. Dizemos que M é gerado pelos *geradores* $m_1, \ldots, m_i, \ldots$... se qualquer elemento $m \in M$ se escreve como uma combinação linear finita dos geradores com coeficientes em R, $m = \sum_i \varepsilon_i \cdot m_i$, $\varepsilon_i \in R$ e denotamos $M = \langle m_1, \cdots, m_i, \cdots \rangle R$.

Quando as somas são finitas dizemos que o módulo é finitamente gerado. O anel R é um módulo sobre si mesmo e os *ideais de um anel* R são os sub-anéis de R que são também R-módulos. Vamos usar com freqüência o resultado a seguir.

Lema (Nakayama):

Seja R um anel comutativo com identidade. Seja I um ideal em R tal que $1+z$ é invertível para qualquer $z \in I$. Sejam A, B submódulos de algum R-módulo M e suponha que A é finitamente gerado sobre R. Então a inclusão $A \subseteq B+IA$ implica $A \subseteq B$.

Demonstração:

Seja $A = \{a_1, \ldots, a_n\}R$. Como $A \subseteq B + IA$, cada gerador de A se escreve como $a_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} z_{i,j} a_j$, para elementos $b_i \in B$ e $z_{i,j} \in I$. Em forma matricial, as equações se escrevem como $(I - Z)a = b$, onde I é a identidade $n \times n$, Z é a matriz com entradas $z_{i,j}$, a e B são vetores com n coordenadas.

A matriz $I - Z$ é invertível, já que seu determinante é da forma $1 - z, z \in I$ (lembre que I é um ideal). O sistema tem solução (única) dada pela regra de Cramer, que mostra explicitamente que cada a_i é uma soma de monômios da forma b ou zb, onde $b \in \{b_1, \ldots, b_n\}$ e $z \in I$. Assim, $a_i \in B$ para todo i, provando $A \subseteq B$. ■

Várias construções nesse texto são *ações de grupos*. Seja G um grupo com identidade e, e S um conjunto. Uma ação de G sobre S é uma função $A : G \times S \to S$, $(g, s) \mapsto A(g, s)$ tal que

$$A(e, s) = s, \forall s \in S,$$

$$A(g_1 * g_2, s) = A(g_1, A(g_2, s)),\ \forall g_1, g_2 \in G,\ \forall s \in S.$$

Dado um elemento $s \in S$ e uma ação $A : G \times S \to S$, a *órbita* por s é o conjunto de elementos de S da forma $A(g, s)$, para algum $g \in G$. É fácil ver que a relação 'pertencer à mesma órbita' é reflexiva, simétrica e transitiva: assim, uma ação induz uma *relação de equivalência* em S, que fica particionado pelas órbitas.