# 1
# Introdução

Os teoremas da função inversa e as formas locais das submersões e imersões estão entre os teoremas mais empregados por analistas. Com hipóteses genéricas, o comportamento local de uma função desse tipo em torno de um ponto $x_0$ é determinado pela aproximacão linear da função $f$ naquele ponto. De forma mais precisa, existem trocas de variáveis em vizinhanças de $x_0$ e $f(x_0)$ que convertem $f$ em sua aproximação linear. Por mais importantes que sejam esses teoremas, ao ponto de fazerem parte do material ensinado a alunos de graduação em matemática, há pouca divulgação sobre o que pode ser feito quando suas hipóteses não valem.

No final dos anos 1960 e início dos 70, o matemático americano John Mather (1942), em uma série de artigos classicamente referenciados como [Mather I-IV], produziu um importante avanço na Teoria Local das Singularidades. O objetivo da teoria é expandir substancialmente a possibilidade de reduzir, por meio de trocas de variáveis adequadas, o estudo local de uma função $f$ ao estudo de uma função mais simples, freqüentemente dada pelo truncamento da série de Taylor da função original. Estendendo o trabalho do matemático francês Tougeron, Mather encontrou condições algébricas para que a função $f$ em um ponto $x_0$ seja equivalente ao polinômio de Taylor de ordem k de $f$ nesse ponto.

Mather considerou mais de uma relação de equivalência, por várias razões, teóricas e práticas. Dada uma função suave $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t$, seu estudo local, digamos, perto de zero, habitualmente concentra em dois temas, um mais geométrico, a estratificação do domínio em níveis de $f$, outro mais algébrico, a natureza do ideal $I_f$ gerado pelas funções coordenadas $f_1, \ldots, f_t$ dentro do anel das funções a $s$ variáveis, definidas perto de 0.

Os níveis não se alteram substancialmente por trocas de variáveis $\phi$ no domínio, mantendo as propriedades topológicas básicas. Trocas de variáveis $\psi$ no contradomínio também são inócuas: só os valores dos níveis mudam. De forma mais sucinta, para esse tema, as funções $f$ e $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ perto da origem são consideradas equivalentes — essa é a chamada $\mathcal{RL}$-equivalência, onde *right* e *left* correspondem respectivamente às trocas no domínio e contradomínio. Em certas situações (quando $t = 1$, por exemplo), trocas de variáveis no contradomínio não são necessárias e consideram-se $\mathcal{R}$-equivalências.

Como veremos no Teorema 3.1, duas funções $f$ e $g$ têm o mesmo ideal de funções coordenadas, isto é $I_f = I_g$, quando existe uma matriz invertível $U(x)$ tal que $f(x) = U(x)g(x)$, a chamada $\mathcal{C}$-equivalência. Não surpreende que $\mathcal{RL}$-equivalência e $\mathcal{C}$-equivalência sejam diferentes. Um dos objetivos da teoria é encontrar extensões generalizadas desses conceitos que sejam de fato equivalentes para uma classe relevante de funções.

Assim, há razões técnicas para estudar ainda outras equivalências: além da mais restritiva $\mathcal{R}$-equivalência, será importante incluir a $\mathcal{K}$-equivalência, mais abrangente do que a $\mathcal{C}$-equivalência. Mais, a possibilidade de inserir parâmetros ao perturbar uma função dada sugere considerar trocas de variáveis que dependam ou não desses parâmetros, com significados físicos diferentes em aplicações.

Assim como existem formas normais para difeomorfismos e submersões, é interessante procurar, dada uma função $f$ e uma relação de equivalência, uma outra função equivalente $g$ que seja, em algum sentido, mais simples. Um dos objetivos desse texto é apresentar as condições suficientes para *determinação finita* para $\mathcal{R}$-equivalência e $\mathcal{K}$-equivalência. Em outras palavras, serão descritas condições que asseguram que uma função $f$ é equivalente a um truncamento apropriado de sua expansão de Taylor em zero. É importante notar que, apesar das funções serem suaves, não são analíticas. Tanto o Teorema da Função Inversa quanto a Forma Local das Submersões, aliás, são resultados desse tipo: sob a hipótese que a jacobiana $Df(0)$ tem posto $t$, a função $f$ é $\mathcal{RL}$-equivalente à seu 1-jato $f(0) + Df(0)x$. A partir daí, a formulação habitual dos dois resultados segue de uma observação elementar de álgebra linear.

Os resultados apresentados tratam de aspectos da teoria construída por Mather em seus artigos seminais sob certas restrições. Assim, por exemplo, tratamos apenas de teoria local em torno de um único ponto. Mais severamente, o texto termina com um exemplo — a busca de uma forma local para a cúspide — na qual ficam claras as limitações das ferramentas apresentadas. A teoria não pode continuar sem a introdução do chamado Teorema da Preparação de Malgrange-Mather, fora do escopo desse trabalho.

Em princípio, um aluno no final de graduação de matemática está em condições de ler o texto. No Apêndice, são reunidos alguns conceitos algébricos, usados como um vocabulário muito conveniente ao longo do texto.