

**Jorge Luiz Oliveira Santos Godoy**

**Tópicos em Teoria de Mather**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
Programa de Pós-graduação em Matemática

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2007

**Jorge Luiz Oliveira Santos Godoy**

## **Tópicos em Teoria de Mather**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Carlos Tomei

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2007

**Jorge Luiz Oliveira Santos Godoy**

## **Tópicos em Teoria de Mather**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Carlos Tomei**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Carlos Tomei**

PUC-Rio

**Prof. George Svetlichny**

PUC-Rio

**Prof. Paulo Henrique Gusmão**

Universidade Federal Fluminense

**Prof. Leonardo Carvalho**

Universidade Federal Fluminense

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 08 de Fevereiro de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Jorge Luiz Oliveira Santos Godoy**

Graduou-se em Economia e em Matemática na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Godoy, Jorge Luiz Oliveira Santos

Tópicos em Teoria de Mather/ Jorge Luiz Oliveira Santos Godoy; orientador: Carlos Tomei. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 38 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Teoria de Mather. 3. Teoria das Singularidades. 4. Germes. 5. Determinação Finita. 6.  $\mathcal{K}$ - $\mathcal{R}$ - equivalência. I. Tomei, Carlos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

Ao professor Carlos Tomei, pela orientação neste trabalho.

Aos demais professores, funcionários e colegas do Departamento de Matemática da Puc-Rio, bem como ao CNPq, pelos generosos recursos que sempre me disponibilizaram.

## Resumo

Godoy, Jorge Luiz Oliveira Santos; Tomei, Carlos. **Tópicos em Teoria de Mather**. Rio de Janeiro, 2007. 38p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Seja  $(E_s)^t$  o espaço de germes na origem de funções suaves entre os espaços euclidianos de dimensões  $s$  e  $t$ . Nesta dissertação, apresentamos a parte da Teoria de Mather que descreve hipóteses suficientes para  $k$ -determinação em  $(E_s)^t$  sob duas ações diferentes, induzindo as chamadas  $\mathcal{R}$ - e  $\mathcal{K}$ -equivalências. Um germe é  $k$ -determinado se é equivalente a qualquer perturbação que deixa invariante seu  $k$ -jato, os termos de ordem até  $k$  de sua expansão de Taylor na origem. A  $\mathcal{R}$ -equivalência consiste em compor germes com germes de difeomorfismos à direita. A  $\mathcal{K}$ -equivalência é mais difícil de descrever.

## Palavras-chave

Teoria de Mather, Teoria das Singularidades, germes,  $k$ -jato, determinação finita,  $\mathcal{K}$ -equivalência,  $\mathcal{RL}$ -equivalência, órbitas, dobras, cúspides.

## Abstract

Godoy, Jorge Luiz Oliveira Santos; Tomei, Carlos. **Topics in Mather Theory**. Rio de Janeiro, 2007. 38p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Let  $(E_s)^t$  be the space of smooth map-germs at the origin between Euclidian spaces of dimensions  $s$  and  $t$ . In this dissertation, we present a section of Mather theory describing sufficient conditions for  $k$ -determinacy of this map-germs under two different actions, inducing the so called  $\mathcal{R}$ - e  $\mathcal{K}$ - equivalences. A map-germ is  $k$ -determined if it is equivalent to any perturbation that leaves invariant its  $k$ -jet, i.e., the terms up to order  $k$  of its Taylor expansion at the origin. The  $\mathcal{R}$ -equivalence consists of compositions with germs of diffeomorphisms to the right. The  $\mathcal{K}$ -equivalence is harder to describe.

## Keywords

Mather Theory, Theory of Singularities, map-germs,  $k$ -jet, finite determinacy,  $\mathcal{K}$ -equivalence,  $\mathcal{RL}$ -equivalence, orbits, folds, cusps.

## Sumário

1	Introdução	8
2	Germes escalares	11
2.1	$E_s$ e $M_s$	11
2.2	$\mathcal{R}$ -equivalência em $E_s$	14
3	Germes vetoriais	21
3.1	Equivalências pelos grupos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$	21
3.2	A $k$ -determinação por $\mathcal{K}$ -equivalência:	25
4	Dobras e cúspides: limites da teoria	30
4.1	Perturbações e desdobramentos	30
4.2	Dobras	32
4.3	Algumas dificuldades: a cúspide	34