

5

Instrumental e Metodologia Aplicada à Análise de Investimentos

5.1

Introdução

Atualmente o método mais difundido e aplicado para a análise de investimentos corporativos é o Valor Presente Líquido (VPL). Segundo esta metodologia, o valor de um determinado projeto pode ser determinado calculando-se a diferença entre o valor presente dos ganhos e o valor presente dos custos desse projeto. O investimento é considerado viável sempre que o VPL for maior do que zero.

Segundo Dixit & Pindyck [35], o VPL pode ser considerado um método ortodoxo, excessivamente rígido para o ambiente corporativo. Isso porque este método sugere que o investimento deva ser realizado agora ou nunca, ignorando os benefícios da espera por novas informações. Implicitamente, o VPL presume que o gerenciamento de projetos é passivo, ou seja, que todas as decisões são inexoravelmente levadas adiante, como se o investidor não dispusesse de flexibilidade para rever os planos originais.

Entretanto, a realidade enfrentada pelo mundo corporativo é essencialmente diferente. Em um ambiente cercado de incertezas e interações competitivas, os fluxos de caixa efetivamente realizados apresentarão grandes chances de serem diferentes daqueles traçados por meio dos instrumentos tradicionais. Com o transcorrer do tempo as incertezas vão sendo desfeitas, especialmente pelo surgimento de novas informações indisponíveis no momento da análise. Concomitantemente, podem vir à luz uma série de alternativas que permitirão a revisão e o afastamento em relação às estratégias originalmente estabelecidas.

Segundo Dixit & Pindyck [35], a maioria das decisões de investimento têm em comum três características importantes: a sua irreversibilidade, a incerteza sobre os ganhos futuros, e a liberdade de ação no tempo. O fato é que a teoria

ortodoxa não reconhece estas características. No entanto, é justamente a interação entre elas que determina a regra ótima para o investimento.

Note que a empresa que possui uma oportunidade de investimento, na verdade, possui uma opção semelhante a uma opção financeira, pois a empresa tem o direito, mas não a obrigação de realizar esse investimento. Uma vez que o investimento é realizado, considera-se que a “opção de investir” foi exercida. Entretanto, ao exercer esta opção, a empresa também estará anulando qualquer possibilidade de espera, o que a impossibilita de agir no sentido de reverter uma situação desfavorável no futuro. Sendo assim, note que o exercício da opção implica em um custo de oportunidade para a empresa, o qual deve ser incluído junto aos custos de investimento no projeto.

Desta forma, a regra convencional do VPL deve ser modificada para que o valor da opção seja percebido, ou seja, o novo VPL deve sinalizar que o investimento é ótimo quando o valor presente dos ganhos for maior que o valor presente dos custos, incluindo o custo de oportunidade por abrir mão dos benefícios da espera. Este novo valor é denominado VPL Expandido, o qual reúne o valor do VPL tradicional, ou VPL passivo, e o valor das opções operacionais e estratégicas resultantes do gerenciamento dinâmico do projeto.

Cabe ressaltar que as opções de investimento podem ser bastante valiosas. Muitas empresas atribuem grande parte do seu valor de mercado às suas opções de investir e crescer no futuro. Estas opções, por serem baseadas em ativos reais, são conhecidas como opções reais. De acordo com Trigeorgis [36], pode-se dizer que o problema da orçamentação de capital, ou da decisão de investimento, na verdade é composto por um conjunto de opções reais.

Na próxima seção mostrar-se-á como a Teoria das Opções Reais vem sendo empregada nos mais diversos setores da economia mundial. Apesar de bastante difundida no meio acadêmico, pode-se dizer que o uso desta teoria ainda é restrito na prática da orçamentação de capital.

Ainda na próxima seção, também será estabelecida uma analogia entre uma opção financeira e a oportunidade que o Mecanismo de Desenvolvimento Limpo propicia a determinados projetos. Considera-se que tais projetos possuem o direito, mas não o dever, de se registrar no Comitê Executivo e usufruir os

benefícios provenientes da venda das RCEs. Uma vez que os custos de registro são irreversíveis, que o preço do crédito de carbono é aleatório, e que existe liberdade de decisão no tempo, ou seja, a decisão de registrar o projeto não é do tipo “agora ou nunca”, entende-se que a Teoria das Opções Reais é a metodologia correta para se avaliar esta oportunidade.

5.2

Aplicações da Teoria das Opções Reais

O termo opções reais foi inicialmente empregado em 1977, pelo professor Stewart C. Myers, com o objetivo de estabelecer uma analogia entre as opções de compra sobre ativos financeiros e as oportunidades de investimento em ativos reais [37]. Desta forma uma nova abordagem para a análise de investimentos estava sendo iniciada. Esta abordagem foi denominada de Teoria das Opções Reais.

Em 1979, o brasileiro Octávio A. F. Tourinho foi pioneiro ao mostrar que reservas de recursos naturais poderiam ser entendidas e avaliadas empregando-se a Teoria das Opções Reais [38]. Desde então, diversos trabalhos têm sido desenvolvidos nesta área.

Dentre os primeiros trabalhos que aplicaram a Teoria das Opções Reais (TOR) para avaliar reservas de recursos naturais, destaca-se o trabalho de Brennan & Schwartz [39]. Neste trabalho a TOR foi empregada para avaliar uma mina de cobre cuja exploração poderia ser ativada, suspensa, ou abandonada definitivamente pelo investidor. Nesta análise, as decisões do gerente se baseavam nas informações de mercado sobre o preço do cobre, o qual foi considerado estocástico. Concluiu-se que a flexibilidade operacional embutida neste projeto aumentou o seu valor de mercado.

Na indústria do Petróleo, destaca-se o trabalho pioneiro de Siegel et. al. [40], o qual utilizou a TOR para avaliar o valor de reservas de Petróleo ainda não desenvolvidas. Neste trabalho considerou-se que o ativo objeto da opção real seria representado pelo valor da reserva já desenvolvida, o qual foi considerado aleatório. Dependendo da evolução do valor da reserva ao longo do tempo, a opção real deveria ser exercida.

Ainda na indústria do Petróleo, também merecem destaque as recentes contribuições de Dias [17][41][42]. Com o objetivo de estabelecer um canal de cooperação científica e de atualização contínua dos conhecimentos nesta área, seu trabalho de mestrado [17] teve como um dos objetivos criar um *website* [41] sobre a aplicação da TOR no setor de Petróleo. Já em seu trabalho de doutorado, Dias [42] estende a aplicação da TOR combinando-a com outras teorias, tais como a teoria dos jogos e os métodos probabilísticos e de decisão estatística Bayesianas.

Apenas nos últimos anos a aplicação da Teoria das Opções Reais começou a penetrar a indústria da eletricidade. Dentre as suas principais aplicações ao setor elétrico brasileiro, destacam-se os trabalhos de Castro [43] e Gomes [44].

Em seu trabalho de mestrado, Castro [43] utilizou a Teoria das Opções Reais para avaliar uma unidade de geração termelétrica flexível, ou seja, que possui apenas uma parte da sua capacidade instalada despachada pelo Operador Nacional do Sistema Elétrico. Desta forma, foi considerado que a operação da parte flexível deste tipo de usina é um direito, mas não um dever a ser cumprido. Esta consideração faz com que, ao longo do período de estudo, o empreendedor detenha uma opção para suspender temporariamente a operação da usina.

Dando enfoque ao problema da expansão do setor elétrico brasileiro, Gomes [44] tratou a dinâmica de investimentos privados em geração termelétrica utilizando a Teoria das Opções Reais. Para tanto, foi considerado que o planejamento da expansão termelétrica deveria levar em consideração três tipos de incertezas: a incerteza exógena na expansão da oferta de empreendimentos termelétricos, a incerteza na demanda destes empreendimentos, e a interação entre os agentes do setor.

Trabalhos mais recentes, como os de Kumbaroglu et. al. [45] e Siddiqui et. al. [46], aplicam a Teoria das Opções Reais para avaliar investimentos na geração de energia elétrica com base nas fontes renováveis, tais como as fontes eólicas, geotérmicas, solares, entre outras.

Em Kumbaroglu et. al. [45], é desenvolvido um modelo para verificar o potencial de difusão das tecnologias renováveis dentro da expansão do setor elétrico turco. Para tanto, o modelo acopla as curvas de aprendizagem (*learning curve*) desses investimentos a uma formulação dinâmica do problema, onde tanto o preço da

energia elétrica quanto o preço dos combustíveis fósseis são considerados incertos.

Já no trabalho de Siddiqui et. al. [46], utiliza-se a TOR para analisar os benefícios do programa estabelecido pelo governo norte americano para a pesquisa e desenvolvimento das tecnologias renováveis. Argumenta-se que o método usualmente empregado nestas análises realiza uma previsão determinística dos custos e da performance dos combustíveis renováveis e não renováveis. Esta abordagem é considerada inadequada, pois desconsidera as incertezas existentes sobre os preços desses combustíveis, e, conseqüentemente, também desconsidera a opção de desenvolver as tecnologias renováveis quando os custos das tecnologias não renováveis aumentarem.

Mais recentemente, a TOR começou a ser empregada no recém criado mercado de carbono. Até o momento, as principais aplicações têm se concentrado nas atividades de florestamento e reflorestamento. Por exemplo, em Baran [12], a TOR foi utilizada para determinar o melhor momento para o corte de uma floresta de eucaliptos, levando em consideração o fluxo de receita adicional proveniente da venda dos créditos de carbono.

Neste trabalho a Teoria das Opções Reais será utilizada para se estimar o valor incremental do mercado de carbono para determinados empreendimentos de geração de energia elétrica no Brasil. Para tanto, considerar-se-á que este tipo de empreendimento traz consigo a possibilidade do projeto ser registrado no Comitê Executivo e comercializar os créditos de carbono que venham a ser gerados pela sua atividade. Todo o desenvolvimento é realizado à luz das regras e leis atualmente vigentes no setor elétrico brasileiro.

Para avaliar corretamente a flexibilidade gerencial anteriormente descrita, é necessário perceber a sua forte analogia com as opções de compra disponíveis no mercado financeiro. Neste caso, note que o valor presente da receita obtida a partir da venda dos créditos de carbono pode ser entendido como o valor do ativo objeto de uma opção financeira. Da mesma forma, os custos de transação, necessários para que se efetue o registro do projeto no Comitê Executivo, podem ser entendidos como o seu preço de exercício. Além disso, o prazo disponível para que o investidor registre o projeto MDL pode ser entendido como o tempo de vida da opção financeira. Finalmente, a volatilidade do preço do crédito de carbono e

os fluxos anuais provenientes da sua venda podem ser entendidos, respectivamente, como a volatilidade e o dividendo do ativo objeto da opção financeira. A relação de analogia descrita anteriormente se encontra ilustrada na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Analogia entre uma Opção Financeira e a Opção de Registrar um Projeto MDL no Comitê Executivo

| OPÇÃO CALL | REGISTRO DO PROJETO MDL |
|-------------------------------|---|
| Preço da Ação | Valor Presente da Venda das RCEs |
| Preço de Exercício | Custo de Transação |
| Tempo de Expiração | Prazo para Início do Processo de Registro |
| Volatilidade do Preço da Ação | Volatilidade do Preço da RCE |
| Dividendo da Ação | Fluxo de Receita da Venda das RCEs |

Uma ampla discussão sobre a influência que cada um destes fatores exerce sobre o valor de uma opção financeira pode ser encontrada no trabalho de Hull [47]. Em Batista [48], esta mesma análise é realizada considerando a opção de expandir a produção de um campo de Petróleo já desenvolvido. A produção deste campo pode ser expandida pelo início das atividades de até dois poços adicionais.

Enfim, fica claro que as mesmas técnicas empregadas para se avaliar as opções financeiras podem ser utilizadas para avaliar as opções sobre ativos reais. Na próxima seção, as técnicas mais difundidas para se avaliar as opções financeiras serão objeto de discussão. Em particular, três métodos serão descritos detalhadamente: o método da Árvore Binomial, o método de Grant, Vora & Weeks, e o método de Longstaff & Schwartz (LSM), todos empregados neste trabalho.

5.3

Métodos para a Avaliação de Opções Financeiras

As opções financeiras são geralmente classificadas de acordo com a sua possibilidade de exercício antecipado. Enquanto as opções européias só podem ser exercidas na sua data de vencimento, as opções americanas podem ser exercidas em qualquer momento até esse instante. Desde 1973, quando as opções de ações foram primeiramente negociadas em bolsa de valores, os mercados de opções

cresceram significativamente, crescendo também a demanda por técnicas para uma correta avaliação do seu valor [47].

A avaliação de opções européias apresenta-se como uma tarefa bastante simples quando comparada à avaliação de opções americanas. Uma vez que as opções européias só podem ser exercidas nas suas respectivas datas de vencimento, apenas o conhecimento do preço final do ativo é necessário para que as mesmas sejam avaliadas. Em 1973, Black & Scholes [49] desenvolveram uma solução analítica para a avaliação de opções de compra do tipo européia. Entretanto, para a maioria das opções financeiras de natureza mais complexa, por exemplo, para as opções americanas, soluções analíticas ainda não existem ou ainda não foram desenvolvidas. Neste contexto, o desenvolvimento de técnicas para a avaliação destes derivativos tem ganhado grandes proporções nas últimas décadas.

Dentre os primeiros modelos desenvolvidos para a avaliação de opções americanas, destaca-se o modelo binomial de Cox, Ross & Rubinstein [50]. A grande vantagem deste modelo é a sua capacidade em avaliar a possibilidade de exercício antecipado das opções americanas, fornecendo uma boa aproximação do seu valor. O maior problema do modelo binomial, assim como o de muitos outros métodos numéricos, reside na hipótese de que o preço do ativo objeto é o único fator a ser considerado aleatório na análise. Segundo Stentoft [51], esta não é uma suposição válida, entretanto, sabe-se que a solução do problema se torna computacionalmente inviável à medida que cresce o número de fatores estocásticos considerados. No modelo binomial, isso ocorre porque a dimensão do problema cresce exponencialmente com o número destes fatores. Esta característica é conhecida como a maldição da dimensionalidade.

Ainda na década de 70, a utilização de técnicas de simulação para avaliar opções financeiras surgiu como uma alternativa à utilização do método binomial (vide Boyle [52]). Essas técnicas ganharam popularidade devido a características como flexibilidade, transparência e simplicidade do processo, tornando o processo de avaliação independente da quantidade de variáveis de estado e dos respectivos processos estocásticos empregados. Além disso, do ponto de vista prático, a simulação permite o uso da computação em paralelo, possibilitando ganhos de eficiência e desempenho [53].

Entretanto, apesar de todas as vantagens das técnicas de simulação, inicialmente acreditava-se que seria impossível, do ponto de vista computacional, empregá-las para avaliar opções Americanas (vide Hull [47]). O problema teria origem na incapacidade destes métodos em determinar o instante ótimo para o exercício do derivativo, o qual poderia ser anterior à sua maturidade. Nestes casos, acreditava-se que os modelos de simulação, por serem inerentemente do tipo *forward*, não comportariam um modelo de programação dinâmica para a determinação da estratégia ótima de exercício antecipado, o qual é considerado *backward* por natureza.

Uma das primeiras propostas para a avaliação de opções americanas usando técnicas de simulação foi realizada por Tilley [54]. Tilley apresenta um algoritmo de simulação que imita o método da árvore binomial padrão. Posteriormente, Brodie & Glasserman [55] também utilizaram a simulação para avaliar opções Americanas, porém, a sua abordagem se mostrou ainda mais próxima do método binomial.

Finalmente, em 1996, Grant, Vora & Weeks [56] desenvolveram um dos primeiros métodos capaz de avaliar opções americanas combinando as técnicas de simulação de Monte Carlo e de programação dinâmica. O método baseia-se na determinação de um conjunto de pontos, distribuídos ao longo da vida da opção, sobre os quais é indiferente para o investidor exercer a opção imediatamente ou esperar até o próximo instante para tomar a sua decisão. A união destes pontos define a curva de gatilho do derivativo, a qual é empregada como regra ótima para o exercício antecipado da opção. A vantagem deste algoritmo é que ele trabalha independentemente do número de dimensões do problema, de forma que a curva de gatilho tem sempre a mesma dimensão do derivativo o qual se pretende avaliar. Além disso, este método é geral e aplicável a diferentes tipos de opções, tais como opções sobre vários ativos ou com vários parâmetros estocásticos. A grande desvantagem deste método é o seu alto custo computacional.

Outra classe de métodos empregada para a avaliação de opções americanas combina as técnicas de simulação, regressão e programação dinâmica para aproximar os resultados. Em 2001, Longstaff & Schwartz [57] propuseram um algoritmo que utiliza o método dos mínimos quadrados para realizar regressões *cross-sectional* sobre trajetórias simuladas para o preço do ativo. O objetivo deste

algoritmo é estimar o valor de continuação do derivativo, ou seja, o valor esperado condicional de manter a opção viva até o próximo ponto de exercício antecipado. Assim como o método de Grant, Vora & Weeks, o método proposto por Longstaff & Schwartz permite avaliar opções de diferentes tipos, envolvendo diferentes processos estocásticos ou com diferentes dimensões, porém, cabe ressaltar que a principal vantagem deste método é o seu baixo custo computacional quando comparado a outros métodos envolvendo simulação.

Nas próximas seções o método binomial, o método de Grant, Vora & Weeks, e o método de Longstaff & Schwartz serão descritos detalhadamente. Neste trabalho, estes métodos serão empregados para avaliar a oportunidade que os projetos de geração de energia elétrica desenvolvidos no Brasil possuem para produzir e comercializar RCEs no âmbito do Mecanismo de Desenvolvimento Limpo do Protocolo de Quioto.

5.3.1 Modelo Binomial

Segundo Stentoft [51], dentre os modelos binomiais empregados para a avaliação de opções financeiras, o modelo proposto por Cox, Ross & Rubinstein é considerado o mais famoso e utilizado pela literatura especializada. O princípio básico deste modelo consiste em discretizar o processo estocástico utilizado por Black & Scholes [49] para, posteriormente, empregar a técnica de programação dinâmica a fim de determinar o valor da opção.

Para cada intervalo de tempo Δt , considera-se que o preço do ativo financeiro (S) está sujeito a apenas dois tipos variações: uma variação positiva de intensidade u , ou seja, $S_{t+\Delta t} = S_t \cdot u$ onde $u > 1$, ou uma variação negativa de intensidade d , ou seja, $S_{t+\Delta t} = S_t \cdot d$ onde $d < 1$. Uma árvore binomial de apenas um passo se encontra ilustrada na Figura 5.1.

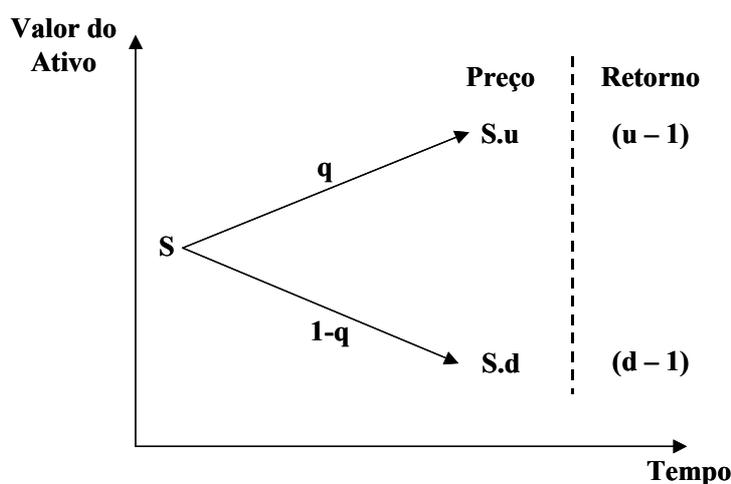


Figura 5.1 – Ilustração de uma Árvore Binomial de um Passo

De acordo com a Figura 5.1 uma determinada probabilidade q é associada a uma variação positiva no preço do ativo financeiro. Analogamente, uma probabilidade $1-q$ é associada a uma variação negativa do mesmo. Segundo Cox, Ross & Rubinstein, este método converge para a solução encontrada por Black & Scholes desde que a equação do movimento geométrico browniano seja representada como o limite contínuo de um caminho aleatório em tempo discreto, ou seja, fazendo-se com que $\Delta t \rightarrow 0$.

No instante $t + \Delta t$, o valor esperado e a variância do preço do ativo podem ser determinados, respectivamente, pelas seguintes equações (vide Hull [47]):

$$E[S_{t+\Delta t}] = S_t \cdot e^{r \cdot \Delta t} \quad (5.1)$$

e

$$\text{Var}[S_{t+\Delta t}] = S_t^2 e^{2r \Delta t} [e^{\sigma^2 \Delta t} - 1] \quad (5.2)$$

onde r representa a taxa de retorno esperada do ativo e σ representa a volatilidade do valor de S . A partir das equações 5.1 e 5.2 é possível determinar os parâmetros u , d e q necessários para a utilização do modelo binomial de Cox, Ross & Rubinstein. De acordo com o ilustrado na Figura 5.1, nota-se que o retorno esperado ($E[R]$) do ativo financeiro pode ser calculado da seguinte forma:

$$E[R] = q \cdot (u - 1) + (1 - q) \cdot (d - 1)$$

ou seja,

$$E[R] = q \cdot (u - d) + d - 1 \quad (5.3)$$

Sabendo-se que:

$$E[S_{t+\Delta t}] = S_t \cdot [1 + E(R)] \quad (5.4)$$

e substituindo a equação 5.3 na equação 5.4, o seguinte resultado é encontrado:

$$E[S_{t+\Delta t}] = S_t \cdot (1 + q \cdot (u - d) + d - 1) \quad (5.5)$$

Uma vez que os resultados do método binomial convergem para a solução de Black & Scholes a medida que $\Delta t \rightarrow 0$, os resultados das equações 5.1 e 5.5 podem ser igualados de tal forma que:

$$S_t \cdot e^{r \cdot \Delta t} = S_t \cdot (1 + q \cdot (u - d) + d - 1)$$

Rearranjando os termos desta equação o seguinte resultado é obtido:

$$q = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d} \quad (5.6)$$

O resultado encontrado especifica o valor da probabilidade neutra ao risco associada a uma variação positiva no preço do ativo financeiro. A probabilidade associada a uma variação negativa é dada por $(1-q)$. Empregando-se um raciocínio análogo ao anterior, também é possível determinar os parâmetros de intensidade (**u** e **d**) da variação sofrida pelo preço. Para tanto, trabalhar-se-á com a determinação da variância do retorno do ativo ($V[R]$), ou seja:

$$V[R] = E[R - E(R)]^2 \quad (5.7)$$

A partir do ilustrado na Figura 5.1, esta equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$V[R] = q \cdot [(u - 1) - E(R)]^2 + (1 - q) \cdot [(d - 1) - E(R)]^2 \quad (5.8)$$

Substituindo-se a equação 5.3 na equação 5.8 tem-se que:

$$V[R] = q \cdot [(u - 1) - (q \cdot u - q \cdot d + d - 1)]^2 + (1 - q) \cdot [(d - 1) - (q \cdot u - q \cdot d + d - 1)]^2$$

Desenvolvendo algebricamente esta equação o seguinte resultado é encontrado:

$$V[R] = q \cdot (1 - q) \cdot (u^2 + d^2 - 2 \cdot u \cdot d) \quad (5.9)$$

ou seja, a variância do retorno do ativo pode ser expressa somente em função dos parâmetros \mathbf{u} , \mathbf{d} e \mathbf{q} . Uma vez que a equação 5.6 especifica o parâmetro \mathbf{q} , a mesma pode ser substituída na equação 5.9 chegando-se ao seguinte resultado:

$$V[\mathbf{R}] = (\mathbf{u} + \mathbf{d})e^{r.\Delta t} - e^{2.r.\Delta t} - 1 \quad (5.10)$$

Expandindo em Taylor os termos $e^{r.\Delta t}$ e $e^{2.r.\Delta t}$, e considerando que $\Delta t^n = 0$ quando $n > 1$, a equação 5.10 pode ser escrita da seguinte forma:

$$V[\mathbf{R}] = (\mathbf{u} + \mathbf{d})(1 + r.\Delta t) - 1 - 2.r.\Delta t - 1 \quad (5.11)$$

Cabe ressaltar que Cox, Ross & Rubistein consideram o fator \mathbf{d} igual ao inverso do fator \mathbf{u} , ou seja, $\mathbf{d} = 1/\mathbf{u}$. Sendo assim, é possível mostrar que $\mathbf{u} = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e $\mathbf{d} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ satisfazem as premissas do processo estocástico utilizado por Black & Scholes. Expandindo em Taylor os termos \mathbf{u} e \mathbf{d} propostos anteriormente, tem-se que:

$$\mathbf{u} = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \cong 1 + \sigma.\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2.\Delta t}{2} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{d} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \cong 1 - \sigma.\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2.\Delta t}{2} \quad (5.13)$$

Substituindo as equações 5.12 e 5.13 em 5.11, chega-se ao seguinte resultado:

$$V[\mathbf{R}] = \sigma^2.\Delta t \quad (5.14)$$

O resultado da equação 5.14 representa a variância do retorno de um ativo que segue o mesmo processo estocástico originalmente empregado por Black & Scholes [49], ou seja, o Movimento Geométrico Browniano (vide seção 5.4.1). Este resultado corrobora com os valores de \mathbf{u} , \mathbf{d} e \mathbf{q} considerados anteriormente.

A partir de um intervalo $\Delta t = T/D$, onde \mathbf{T} representa o tempo até o vencimento da opção, e \mathbf{D} representa o número de divisões deste horizonte, entende-se que a simulação de preços representada pela árvore binomial converge para o Movimento Geométrico Browniano a medida que $D \rightarrow \infty$. Para determinar o valor de uma opção financeira do tipo americana, uma rotina de programação dinâmica é iniciada a partir da sua data de vencimento. Neste instante, o valor de uma opção de compra deve ser estabelecido por meio da seguinte equação:

$$C_T^i(S_T^i) = \max(S_T^i - X, 0) \quad \forall i \quad (5.15)$$

onde i representa o número de preços (ou nós) finais da árvore, T representa a maturidade da opção e X representa o preço de exercício da opção.

Para cada nó intermediário representado no instante $t = T - \Delta t$, o valor da opção deve ser obtido comparando-se o valor de exercício imediato (I_t) com o valor de continuação da opção (F_t), ou seja, o valor de manter a opção viva até o próximo instante. A equação 5.16 representa esta comparação.

$$C_t^i(S_t^i) = \max\{I_t^i, F_t^i\} \quad \forall i \quad (5.16)$$

onde

$$I_t^i = \max(S_t^i - X, 0) \quad (5.17)$$

e

$$F_t^i = e^{-r\Delta t} (q \cdot C_{t+\Delta t}(u \cdot S_t^i) + (1-q) \cdot C_{t+\Delta t}(d \cdot S_t^i)) \quad (5.18)$$

Trabalhando-se recursivamente até o instante $t = 0$, o valor da opção é determinado empregando-se o mesmo raciocínio descrito anteriormente para os demais nós representados pela árvore binomial.

Cabe destacar que algumas variações deste modelo utilizam valores diferentes para os parâmetros u , d e q . Alguns exemplos são os modelos de Jarrow e Rudd, Hull e White e Trigeorgis. Neste trabalho, é importante observar que os resultados obtidos pela aplicação do modelo de Cox, Ross & Rubinstein serão utilizados como *benchmark* para testar a eficiência de outros métodos numéricos empregados para a solução do problema proposto. Na próxima seção o método de Grant, Vora & Weeks será descrito detalhadamente.

5.3.2 Método de Grant, Vora & Weeks (GVW)

Em 1996, Grant, Vora & Weeks [56] propuseram um método capaz de avaliar um derivativo americano empregando as técnicas de Programação Dinâmica e de Simulação de Monte Carlo (SMC). Até então, acreditava-se que não seria possível a utilização conjunta dessas técnicas, visto que a SMC se caracteriza por movimentos *forward*, enquanto que a Programação Dinâmica se

caracteriza por movimentos *backward*. A utilização conjunta dessas técnicas foi considerada um dos principais méritos do trabalho de Grant, Vora & Weeks (GVW).

O princípio básico deste método consiste em identificar, para cada instante anterior ao vencimento da opção, o preço crítico do seu ativo objeto, ou seja, o preço no qual o investidor é indiferente entre exercer ou não a opção naquele momento. Uma vez conhecidos estes valores, argumenta-se que o derivativo americano pode ser avaliado da mesma forma que um derivativo europeu, ou seja, calculando-se a média aritmética de valores previamente simulados. O conjunto de preços críticos definidos para uma opção de venda (PUT) e para uma opção de compra (CALL) do tipo americana se encontram ilustrados na Figura 5.2.

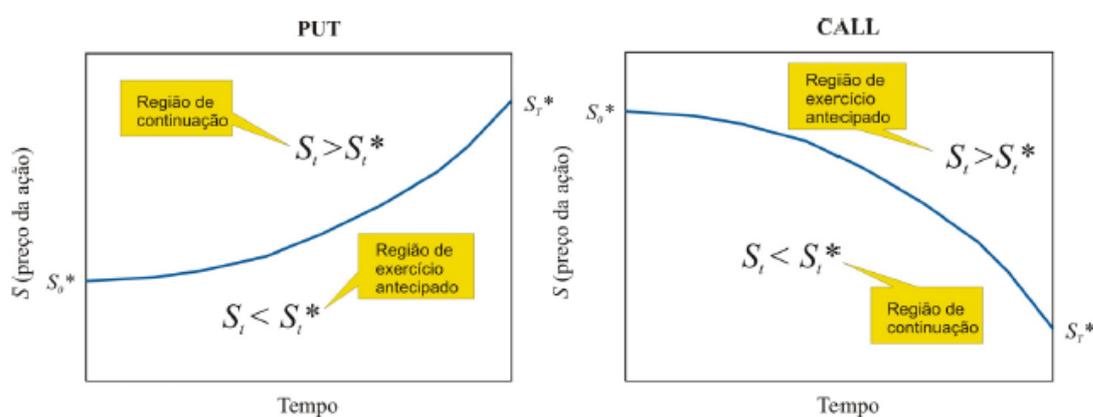


Figura 5.2 – Curvas de Gatilho de uma Opção de Venda (Put) e uma Opção de Compra (Call) do Tipo Americana

Observando a Figura 5.2, nota-se que os preços críticos (S_t^*) definem um limite entre duas regiões: a região de exercício antecipado, onde exercer a opção é a decisão ótima, e a região de continuação, onde a melhor opção é esperar até o próximo instante para tomar uma nova decisão. A curva de indiferença entre essas regiões é denominada Fronteira de Exercício Ótimo, ou Curva de Gatilho do derivativo.

Considere uma opção americana de compra que possa ser exercida em qualquer instante $t \in [0, T]$. Além disso, considere X o preço de exercício desta opção. Segundo GVW, supondo que S_t represente o preço do ativo objeto no

instante t , o valor desta opção (C_t) pode ser determinado segundo a equação 5.19 mostrada a seguir:

$$C_t(S_t, X) = \max\{I_t, F_t\} \quad (5.19)$$

onde

$$I_t = \max\{S_t - X, 0\} \quad (5.20)$$

e

$$F_t = e^{-r\Delta t} E_t[C_{t+\Delta t}(S_{t+\Delta t}, X)] \quad (5.21)$$

Esta equação é similar à equação 5.16 definida na seção anterior. Novamente, o primeiro termo do operador de maximização representa o valor do exercício imediato da opção, enquanto que o segundo termo representa o seu valor de continuação. Cabe destacar que para determinar o valor de continuação pelo método de GVW, é necessário o conhecimento prévio de todos os preços críticos entre os instantes t e o vencimento da opção.

Uma vez que o preço crítico representa o preço para o qual o valor intrínseco do derivativo é igual ao seu valor de continuação, é possível definir uma condição de contorno para S_t^* igualando-se as equações 5.20 e 5.21, ou seja:

$$S_t^* - X = e^{-r\Delta t} E_t[C_{t+\Delta t}(S_{t+\Delta t}^*, X)] \quad (5.22)$$

A partir desta equação, conclui-se que o valor de S^* pode ser facilmente determinado para a data de vencimento do derivativo. Note que, na maturidade, o valor de continuação do derivativo é igual a zero, pois não haverá outra oportunidade para o seu exercício. Sendo assim, a equação 5.22 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$S_T^* - X = 0 \quad (5.23)$$

ou seja, $S_T^* = X$. Uma vez que a determinação de S_t^* depende do conhecimento prévio de todos os preços críticos nos instantes posteriores a t , GVW propõem que a curva de gatilho seja determinada recursivamente, empregando-se a técnica de Programação Dinâmica.

O processo de otimização tem início no instante anterior ao vencimento da opção, ou seja, em $T - \Delta t$. O portador da opção de compra pode exercê-la imediatamente ou manter a opção “viva” até a sua maturidade. Empregando-se a equação 5.19, o valor da opção pode ser determinado da seguinte forma:

$$C_{T-\Delta t}(S_{T-\Delta t}, X) = \max\{I_{T-\Delta t}, e^{-r\Delta t} E_{T-\Delta t}[C_T(S_T, X)]\}$$

O preço crítico ($S_{T-\Delta t}^*$) é identificado encontrando-se o valor de $S_{T-\Delta t}$ que satisfaz a condição 5.22. Assumindo que seja possível identificar $S_{T-\Delta t}^*$, a otimização continua identificando-se o valor de $S_{T-2\Delta t}^*$ condicional ao conhecimento de $S_{T-\Delta t}^*$ e S_T^* . Por esta lógica, o processo continua até a determinação de S_0^* .

Segundo a condição 5.22, determinar o valor de S_t^* implica em determinar o valor de continuação (F) associado ao instante t , entretanto, informações sobre preços futuros ainda não são conhecidas neste instante. Grant, Vora & Weeks solucionam este problema empregando a técnica de Simulação de Monte Carlo.

A SMC é iniciada em $T - \Delta t$, adotando-se como condição inicial $S_{T-\Delta t}^* = S_T^*$. Uma vez arbitrado um valor inicial para $S_{T-\Delta t}^*$, valores de S_T são simulados a fim de se determinar o valor de continuação da opção. Caso a condição 5.22 não seja satisfeita, o valor de $S_{T-\Delta t}^*$ deve ser incrementado e a SMC repetida. Esta rotina deve ser realizada até que a condição 5.22 seja atendida.

O processo de solução continua, recursivamente, ao longo da vida da opção. Uma vez determinada a curva de gatilho do derivativo, determina-se o valor da opção através de N simulações de Monte Carlo iniciadas em $t = 0$. Para tanto, é considerado um preço inicial para ativo objeto (S_0) dado pelo mercado. O exercício antecipado ocorre no primeiro instante em que o preço do ativo ultrapassa a curva de gatilho. O valor final da opção é então determinado através da média dos valores obtidos para cada trajetória simulada, ou seja,

$$C_0 = \frac{1}{N} \sum_{w=1}^N e^{-r\tau} (S_\tau^w - X) \quad \forall S_\tau^w > S_\tau^* \quad (5.24)$$

Nesta equação, τ representa o primeiro instante em que o preço simulado ultrapassa a curva de gatilho. Caso isso não ocorra, entende-se que a decisão ótima será não exercer a opção em momento algum. Com o objetivo de consolidar o entendimento do método de GVW, a seguir o algoritmo é descrito passo a passo, de forma esquemática e ilustrativa (Figura 5.3):

Passo 1 - Discretizar a “vida” da opção em **D** partes iguais ($\Delta t = T / D$). No vencimento da opção, adota-se $S_T^* = X$;

Passo 2 - No instante $T - \Delta t$, adotar um valor inicial para $S_{T-\Delta t}^*$ próximo ou igual a S_T^* . Realizar a SMC e, em seguida, calcular o valor de continuação da opção através da equação 5.21.

Passo 3 - Verificar se a condição 5.22 é satisfeita. Caso a condição seja satisfeita, deve-se iniciar o próximo passo. Caso contrário, o valor inicialmente adotado para $S_{T-\Delta t}^*$ deve ser incrementado de $\Delta S_{T-\Delta t}$, repetindo-se as SMC. Este passo é repetido até que a condição 5.22 seja satisfeita.

Passo 4 - Repetir os passos 2 e 3, recursivamente, para os demais instantes prévios ao vencimento da opção.

Passo 5: Uma vez determinada a curva de gatilho, novas SMC devem ser realizadas a partir do preço de mercado do ativo objeto (S_0). Finalmente, calcula-se o valor da opção através da equação 5.24.

Conforme mencionado anteriormente, a determinação da curva de gatilho para um derivativo americano faz com que o mesmo possa ser avaliado como um derivativo europeu. Apesar de simples e eficiente, o método de GVW fornece resultados bastante sensíveis em relação a determinados parâmetros, tais como o número de trajetórias simuladas ou o número de datas considerado para o exercício antecipado da opção.

Em estudos específicos, Grant, Vora & Weeks [56] concluíram que 1000 trajetórias simuladas seriam suficientes para estimar um valor não tendencioso para uma determinada opção de venda. Para a mesma opção, resultados satisfatórios foram obtidos quando a maturidade da opção, igual a 6 meses, foi dividida em um número maior do que 12 intervalos. Neste trabalho é realizada

uma análise de convergência do método de GVW quando aplicado ao problema proposto no Capítulo 6. Os resultados desta análise são apresentados na seção 7.2.2 deste trabalho. Na próxima seção o Método dos Mínimos Quadrados, desenvolvido por Longstaff & Schwartz, será descrito detalhadamente.

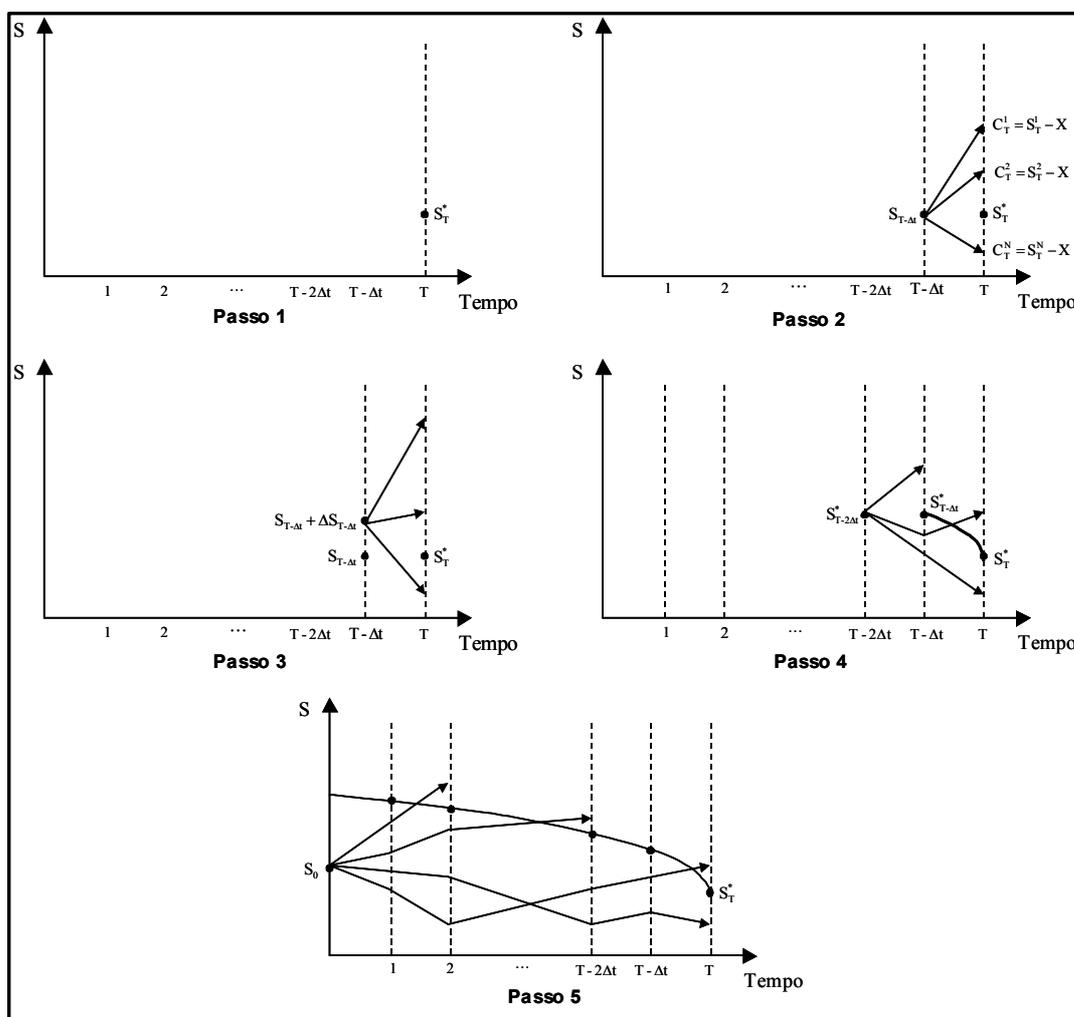


Figura 5.3 – Representação Esquemática do Algoritmo de GVW

5.3.3 Método dos Mínimos Quadrados (LSM)

Após analisar o método binomial e o método de GVW, nota-se que a decisão de exercer antecipadamente uma opção americana se baseia, principalmente, na comparação entre o valor intrínseco e o valor de continuação do derivativo. Conforme descrito nas seções 5.3.1 e 5.3.2, determinar o valor intrínseco de uma opção pode ser considerado uma tarefa pouco complexa,

entretanto, uma boa estimativa do valor de continuação é mais difícil de ser obtida.

O método binomial considera que o preço do ativo objeto está sujeito a apenas dois tipos de variações, o que simplifica significativamente a determinação do valor de continuação (vide equação 5.18). Apesar de simples, argumenta-se que este método não é flexível quanto à utilização de diferentes processos estocásticos.

Métodos numéricos que utilizam a SMC são considerados mais flexíveis quando comparados ao método Binomial, porém, a contrapartida é a maior dificuldade em se determinar o valor de continuação da opção. Por exemplo, aplicando o método de GVW, este processo demanda a realização de um grande número de SMC, o que faz com que a sua principal desvantagem seja o alto custo computacional.

Neste sentido, Longstaff & Schwartz [57] propuseram uma metodologia que reduz o custo computacional dos métodos de simulação. Comparando com o método de GVW, a principal diferença reside no cálculo do valor de continuação. Enquanto GVW estimam este valor por meio de simulações, Longstaff & Schwartz propõem que sejam realizadas regressões utilizando informações *cross-sectional* sobre o preço do ativo financeiro. Este método é denominado *Least Square Monte Carlo* (Método dos Mínimos Quadrados), ou, simplesmente, LSM.

O primeiro passo do método LSM consiste em definir um número finito de datas onde é possível o exercício antecipado da opção. Desta forma, considerando T o vencimento do derivativo, assume-se que a vida da opção pode ser dividida em D intervalos iguais de tamanho $\Delta t = T / D$. Uma vez simuladas N trajetórias para o preço do ativo objeto, Longstaff & Schwartz consideram que o valor de continuação pode ser inicialmente definido por meio da seguinte equação:

$$F(w, t) = E_Q \left[\sum_{t_j=t+\Delta t}^T e^{-r(t_j-t)} \cdot V(w, t_j, t, T) / \mathfrak{F}_t \right] \quad (5.25)$$

onde t representa um instante qualquer dentro do intervalo $[0, T]$, w representa uma das trajetórias simuladas, Q representa uma medida de probabilidade neutra ao risco e \mathfrak{F}_t representa o conjunto de informações disponíveis em t . Ainda na

equação 5.25, ressalta-se que $V(w, t_j, t, T)$ representa o fluxo de caixa gerado pelo exercício da opção em qualquer instante $t_j > t$. Uma vez que as opções americanas podem ser exercidas apenas uma vez em cada trajetória w , cabe ressaltar que, no máximo, existirá um t_j tal que $V(w, t_j, t, T) > 0$.

Conforme mencionado anteriormente, Longstaff & Schwartz supõem que o valor de continuação ($F(w, t)$) pode ser melhor estimado por meio de regressões *cross-sectional* sobre o preço do ativo financeiro. O algoritmo se sustenta na idéia de que $F(w, t)$ pode ser representado por meio de uma combinação linear de funções base (B_1), cujas constantes são determinadas através de uma regressão dos mínimos quadrados. Este raciocínio é representado pela equação 5.26, onde S representa o preço do ativo objeto da opção e a_1 representa a constante associada a cada função base B_1 .

$$F(w, t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i B_i(S) \quad (5.26)$$

Note que a equação 5.26 considera infinitos termos para o cálculo de $F(w, t)$, entretanto, para fins práticos, essa consideração não é viável computacionalmente. Neste caso, o valor de $F(w, t)$ deve ser aproximado utilizando-se um número $G < \infty$ de funções base, ou seja:

$$F(w, t) \approx F_G(w, t) = \sum_{i=0}^G a_i B_i(S) \quad (5.27)$$

A partir da equação 5.27 o método LSM estima o valor de $F_G(w, t)$ regredindo os valores de continuação inicialmente calculados em relação às funções base pré-definidas. Em um dado instante t , tal regressão é realizada considerando apenas às trajetórias em que a opção se encontra *in-the-money*²⁶, pois somente para estas trajetórias a decisão de exercício antecipado é relevante. Segundo Church [58], definindo $\hat{F}_G(w, t)$ como um estimador de $F_G(w, t)$, o

²⁶ Diz-se que uma opção se encontra *in-the-money* quando proporciona ao seu titular um fluxo de caixa positivo caso seja exercida imediatamente [47].

mesmo pode ser considerado um estimador não tendencioso, entretanto, nada se pode afirmar sobre o viés de $\hat{F}_G(w, t)$ em relação ao valor verdadeiro de $F(w, t)$.

Uma vez estimado o valor de continuação da opção, a decisão de exercê-la antecipadamente é tomada comparando-se o seu valor intrínseco com o valor de continuação estimado. Assim como no método Binomial e de GVW, o processo iterativo do método LSM é recursivo (backwards). O valor da opção (C_{LS}) é aproximado calculando-se a média aritmética da soma de todos os fluxos de caixa $V(w, t_j, t, T)$ onde o exercício da opção é ótimo, ou seja:

$$C_{LS} = \frac{1}{N} \sum_{w=1}^N \sum_{t_j=\Delta t}^T e^{-rt_j} V(w, t_j, 0, T) \quad (5.28)$$

Em resumo, o algoritmo LSM pode ser descrito da seguinte forma:

1. Gera-se N trajetórias de preços correspondentes a um determinado processo estocástico. Para cada instante t e trajetória w simulada, os preços da ação devem ser representados por meio da seguinte matriz:

$$S = \begin{bmatrix} S^1(\Delta t) & S^1(2\Delta t) & \dots & S^1(T) \\ S^2(\Delta t) & S^2(2\Delta t) & \dots & S^2(T) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S^N(\Delta t) & S^N(2\Delta t) & \dots & S^N(T) \end{bmatrix}_{N \times D}$$

onde $S^w(t)$ representa o elemento dessa matriz correspondente a trajetória w e ao instante t .

2. Na data de vencimento, o valor intrínseco da opção deve ser calculado empregando-se a seguinte equação:

$$I_T^w = \max \{S^w(T) - X, 0\} \quad \forall w = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.29)$$

3. Considerando $\Theta_{N \times D}$ a matriz de estratégias ótimas para o exercício da opção, deve-se associar o valor 1 às trajetórias onde I_T^w foi maior do que zero. Caso contrário, o valor associado deve ser nulo.
4. No instante $t = T - \Delta t$, deve-se calcular o valor de continuação inicial para a opção empregando-se a equação 5.25, ou seja:

$$F(w, t) = E_Q \left[\sum_{t_j=t+\Delta t}^T e^{-r(t_j-t)} \cdot V(w, t_j, t, T) / \mathfrak{F}_t \right] \quad \forall w = 1, 2, 3, \dots, N$$

O somatório definido nesta equação deve ser realizado até o instante em que é ótimo o exercício da opção. Posteriormente, os valores de $F(w, t)$ são utilizados para definir o vetor Y_t , onde M representa o número de trajetórias em que a opção se encontra *in-the-money*.

$$Y_t = \begin{bmatrix} F(1, t) \\ F(2, t) \\ \vdots \\ F(M, t) \end{bmatrix}$$

5. Considerando $f(S) = S^n$ a função base com a qual se determina o valor de continuação da opção, ou seja:

$$\hat{F}_G(w, t) = a_0 + a_{1t} \cdot S^w(t) + a_{2t} \cdot (S^w(t))^2 + \dots + a_{Gt} (S^w(t))^G \quad (5.30)$$

os coeficientes $a_{0t}, a_{1t}, a_{2t}, \dots, a_{Gt}$ podem ser estimados regredindo-se os termos de $\hat{F}_G(w, t)$ sobre os valores do vetor Y_t pré-determinados, ou seja:

$$Y_t = \begin{bmatrix} F(1, t) \\ F(2, t) \\ \vdots \\ F(M, t) \end{bmatrix} \text{ e } X_t = \begin{bmatrix} 1 & S^1(t) & (S^1(t))^2 & \dots & (S^1(t))^G \\ 1 & S^2(t) & (S^2(t))^2 & \dots & (S^2(t))^G \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & S^M(t) & (S^M(t))^2 & \dots & (S^M(t))^G \end{bmatrix} \Rightarrow a_0, a_{1t}, a_{2t}, \dots, a_{Gt}$$

6. Em seguida, o valor da opção deve ser calculado empregando-se a equação 5.31 mostrada abaixo:

$$C_t^w = \max \{ I_t^w, \hat{F}_G(w, t) \} \quad \forall w = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.31)$$

onde $\hat{F}_G(w, t)$ representa o valor de continuação da opção, o qual é determinado pela equação 5.30.

7. Para cada trajetória w onde o exercício da opção é ótimo, ou seja, onde $I_t^w > \hat{F}_G(w, t)$, o elemento correspondente da matriz de estratégias ótimas ($\Theta_{N \times D}$) deve ser preenchido com o valor 1. Caso contrário, o valor associado deve ser nulo. Cabe ressaltar que em cada trajetória simulada, deverá existir

apenas um elemento da matriz $\Theta_{N \times D}$ com valor 1, uma vez que a opção só poderá ser exercida uma vez em cada trajetória. Além disso, note que a matriz $\Theta_{N \times D}$ determina quais elementos serão empregados no cálculo de $F(w, t)$, conforme descrito no item 3, ou seja:

$$V(w, t_j, t, T) = \Theta_{wt_j} \cdot (S^w(t_j) - X) \quad (5.32)$$

onde $t_j > t$ e Θ_{wt_j} representa o elemento correspondente a linha w e a coluna t_j da matriz $\Theta_{N \times D}$.

8. Repete-se os passos 4, 5, 6 e 7, recursivamente até o instante $t = \Delta t$, preenchendo todos os elementos da matriz $\Theta_{N \times D}$.
9. O valor da opção Americana deve ser estimado através da equação 5.28:

$$C_{LS} = \frac{1}{N} \sum_{w=1}^N \left(\sum_{t_j=\Delta t}^T e^{-rt_j} \cdot V(w, t_j, 0, T) \right)$$

onde $V(w, t_j, 0, T)$ é calculado segundo a equação 5.32.

De acordo com o apresentado nesta seção, para que uma opção financeira possa ser devidamente avaliada, é necessário representar adequadamente a dinâmica do seu ativo objeto ao longo do tempo. Durante as últimas décadas, diversos processos estocásticos têm sido desenvolvidos com esta finalidade, dentre os quais o Movimento Geométrico Browniano (MGB) merece lugar de destaque²⁷.

Na próxima seção uma pequena discussão sobre processos estocásticos será iniciada. O objetivo é apresentar os principais conceitos que norteiam a definição dos processos utilizados neste trabalho para modelar o comportamento do preço das RCEs. Cabe ressaltar que dois processos estocásticos serão empregados com

²⁷ No início da década de 1970, Fischer Black e Myron Scholes derivaram uma equação diferencial que deve ser satisfeita pelo preço de qualquer derivativo financeiro dependente de uma ação que não paga dividendos. Em seu trabalho, Black & Scholes consideraram que o MGB seria adequado para modelar o preço da ação [49].

esta finalidade: o MGB e o movimento de difusão com saltos. Ambos os processos também serão discutidos na próxima seção.

5.4 Processos Estocásticos

Segundo Dixit & Pindyck [35], um processo estocástico pode ser definido como uma variável que se desenvolve ao longo do tempo de maneira aleatória e imprevisível. Como exemplo, uma vez que as suas realizações são aleatórias, a série temporal de preços de um ativo financeiro pode ser caracterizada como a realização de um processo estocástico.

Dentre os processos estocásticos mais conhecidos, destaca-se o processo de Markov [47]. Este é um tipo específico de processo estocástico, no qual apenas o valor corrente de uma variável é relevante para se prever o seu valor futuro. Em outras palavras, considera-se que o histórico da variável está totalmente contido no valor presente da mesma.

Segundo Hull [47], a propriedade de Markov para o preço das ações é consistente com a forma fraca de eficiência de mercado, que, por sua vez, determina que o preço atual de uma ação encerra todas as informações contidas em sua série histórica. Se esta afirmação não fosse verdadeira, analistas técnicos poderiam obter retornos acima da média simplesmente interpretando gráficos de preços históricos, o que é pouco provável de ocorrer.

Um dos processos de Markov mais conhecidos é o processo de Wiener, também denominado movimento browniano. Considerando dz a mudança no valor de uma variável z durante um intervalo de tempo infinitesimal dt , diz-se que z segue um processo de Wiener se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$, onde ε é uma variável aleatória com distribuição normal padronizada, ou seja, $\varepsilon \sim N(0,1)$; e
2. os valores de dz são independentes para quaisquer dois intervalos de tempo distintos de tamanho dt .

A partir da primeira propriedade, conclui-se que dz possui distribuição normal com média zero e variância dt , ou seja, a variância das mudanças no valor

de z é proporcional à extensão do intervalo de tempo considerado. Além disso, a segunda propriedade indica que a variável z segue o processo de Markov.

Note que o processo de Wiener não considera qualquer tendência para os valores futuros de z , ou seja, o valor esperado do processo é sempre igual ao seu valor atual. Entretanto, nem sempre esta será uma realidade no mercado financeiro. Por exemplo, se o valor de uma ação estiver correlacionado ao crescimento econômico de um determinado país, os movimentos desta ação poderão exibir uma tendência ao longo do tempo.

Sendo assim, o processo de Wiener pode ser generalizado de modo a considerar uma tendência na trajetória do ativo. Matematicamente, a variação de uma variável que segue o processo generalizado de Wiener pode ser representada pela seguinte equação diferencial:

$$dS = \alpha \cdot dt + b \cdot dz \quad (5.33)$$

onde α representa a taxa de retorno esperada, e b^2 a taxa de variância deste processo.

Segundo Hull [47], é tentador sugerir que o preço de um ativo financeiro siga um processo generalizado de Wiener. Entretanto, ao analisar o comportamento desses ativos, deve-se levar em conta que o retorno esperado percentual exigido pelos investidores é independente do seu preço atual. Isto significa que se o investidor exigir uma taxa de retorno igual a 15% ao ano quando o preço do ativo estiver em \$10, a mesma taxa de retorno será exigida quando o preço do ativo estiver em \$50. Analogamente, também é razoável supor que a variância do retorno percentual seja independente do preço do ativo financeiro.

Baseado nestas características, um novo tipo de processo estocástico pode ser definido. Para tanto, considera-se que a sua taxa de variância e de retorno esperada estão sujeitas a variações com o tempo, ou seja,

$$dS = \alpha(S, t) \cdot dt + b(S, t) \cdot dz \quad (5.34)$$

Este tipo de processo estocástico é denominado Processo de Itô. Um caso particular do processo de Itô, onde $\alpha(S, t) = \mu \cdot S$ e $b(S, t) = \sigma \cdot S$, é denominado

Movimento Geométrico Browniano. Na próxima seção serão discutidas as principais características do MGB.

5.4.1 Movimento Geométrico Browniano

Matematicamente, a variação no preço de um ativo financeiro que segue um MGB pode ser definida a partir da seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS = \mu.S.dt + \sigma.S.dz \quad (5.35)$$

onde S representa o preço do ativo, μ representa a sua taxa de retorno esperada, σ representa a volatilidade do preço do ativo, e dz representa o processo de Wiener. Conforme discutido na seção anterior, este processo considera que o retorno efetivo do ativo é proporcional ao valor de S . O mesmo raciocínio é válido para a variância deste processo.

Segundo Dias [41], o Movimento Geométrico Browniano é o processo estocástico mais empregado nas análises econômicas e financeiras da atualidade. Adicionalmente, Merton [59] argumenta que este processo consegue representar de forma adequada as alterações marginais no preço dos ativos financeiros, as quais podem ser causadas por um desequilíbrio temporário entre a sua oferta e demanda, por mudanças na taxa de juros, ou simplesmente pela chegada de novas informações sobre o ativo.

Uma vez que neste trabalho o MGB será utilizado para modelar o movimento dos preços das RCEs, a equação de simulação deste processo deve ser encontrada. Sob a hipótese do MGB, note que a variável estocástica S possui distribuição lognormal em qualquer instante futuro t .

Sendo assim, supondo um derivativo cujo valor seja igual ao logaritmo do preço do seu ativo objeto, ou seja:

$$G(S, t) = \ln S_t \quad (5.36)$$

é possível determinar a dinâmica do valor de G realizando uma expansão de Taylor sobre a equação 5.36. Logo:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial S} dS + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial t} dS \cdot dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} dt^2 + \dots \quad (5.37)$$

Substituindo a equação 5.35 em 5.37, conclui-se que:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial S} \mu \cdot S \cdot dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma \cdot S \cdot dz + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \mu^2 \cdot S^2 \cdot dt^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \mu \cdot \sigma \cdot dt \cdot dz + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 \cdot S^2 \cdot dz^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial t} \mu \cdot S \cdot dt^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial t} \sigma \cdot S \cdot dz \cdot dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} dt^2 + \dots \quad (5.38)$$

Sabendo que $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$ e considerando que $dt^n = 0 \quad \forall n > 1$, os seguintes resultados podem ser obtidos:

$$dz \cdot dt = \varepsilon \cdot dt^{\frac{3}{2}} \cong 0$$

e

$$dz^2 = \varepsilon^2 \cdot dt$$

Uma vez que a variância de dz^2 é nula, pois $\text{Var}(dz^2) = dt^2 \text{Var}(\varepsilon^2) \cong 0$, conclui-se que dz^2 não é uma variável aleatória. Uma vez que $\varepsilon \sim N(0,1)$ e que $E(\varepsilon) = 0$, pode-se deduzir que:

$$\text{Var}(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1 \Rightarrow E(\varepsilon^2) = 1$$

Conclui-se então que $dz^2 = dt$. Sendo assim, o resultado da equação 5.38 pode ser significativamente simplificado para:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu \cdot S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 \cdot S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma \cdot S \cdot dz \quad (5.39)$$

Uma vez que $G(S,t) = \ln S_t$, a equação 5.39 pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$d(\ln S_t) = \left[\frac{1}{S_t} \mu \cdot S_t + 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{S_t^2} \right) \sigma^2 \cdot S_t^2 \right] dt + \frac{1}{S_t} \sigma \cdot S_t \cdot dz_t$$

$$d(\ln S_t) = \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \sigma \cdot dz_t \quad (5.40)$$

Integrando-se ambos os lados da equação 5.40, deduz-se que:

$$\int_0^t d(\ln S_t) = \int_0^t \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \int_0^t \sigma \cdot dz_t$$

$$\ln S_t - \ln S_0 = \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] \int_0^t dt + \sigma \int_0^t dz_t$$

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] \cdot t + \sigma \cdot z_t$$

$$\frac{S_t}{S_0} = \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot t + \sigma \cdot z_t \right]$$

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot t + \sigma \cdot z_t \right] \quad (5.41)$$

Note que a equação 5.41 permite que o valor de uma variável modelada pelo MGB seja simulado através do sorteio da variável z_t . Adicionalmente, a Figura 5.4 ilustra a distribuição dos preços desta variável ao longo do tempo.

Para qualquer instante t , note que a distribuição dos preços do ativo simulado é lognormal. Além disso, cabe ressaltar que a média destes preços cresce exponencialmente com o tempo, enquanto que a variância do processo é ilimitada, ou seja, à medida que o intervalo de tempo tende ao infinito, a variância do processo também tende na mesma direção.

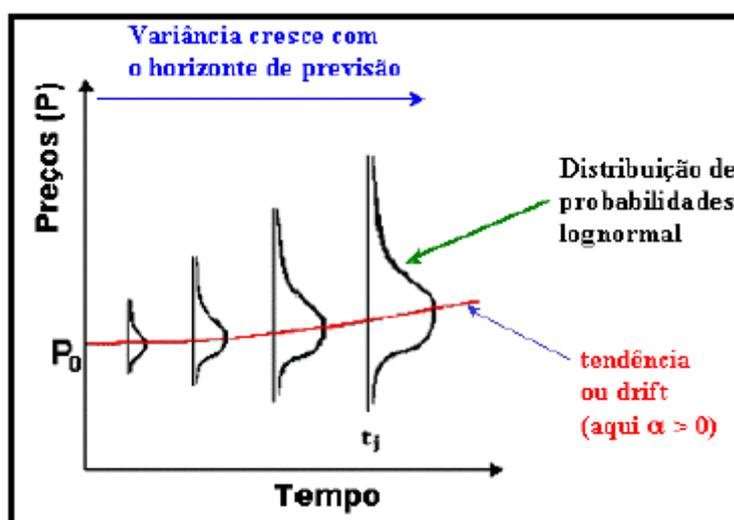


Figura 5.4 – Movimento Geométrico Browniano

Segundo Dias [42], para a avaliação de opções e derivativos em geral, é mais comum utilizar a versão neutra ao risco do processo descrito pela equação 5.35.

Neste caso, a taxa de retorno esperada do ativo deve ser representada pela taxa de juros livre de risco, ou seja:

$$dS = r.S.dt + \sigma.S.dz \quad (5.42)$$

Além disso, para os ativos financeiros que pagam uma taxa contínua de dividendos (δ), a taxa de retorno esperada do processo deve ser subtraída de δ . Isto ocorre porque a valorização do ativo financeiro representa apenas uma parte do retorno total esperado pelo investidor (vide [35], [60] ou [61]). Esta situação é representada pela equação 5.43, a qual considera o MGB neutro ao risco.

$$dS = (r - \delta).S.dt + \sigma.S.dz \quad (5.43)$$

Na próxima seção o movimento de difusão com saltos, o qual representa uma adaptação do Movimento Geométrico Browniano, será descrito detalhadamente.

5.4.2 Movimento de Difusão com Saltos

Durante as últimas décadas o mundo financeiro foi palco de diversas crises, destacando-se a crise do sistema monetário europeu (1992), a crise mexicana (1994-1995), a crise asiática (1997-1998), a crise russa (1998), a crise brasileira (1999), e, por fim, a recente crise na Argentina (2001). Nesta realidade, observa-se que os retornos de ações, títulos e moedas ficam sujeitos a variações significativas de valor em um curto espaço de tempo.

No mercado de *commodities* essa realidade não é distinta. Após a 2ª Guerra Mundial, seis crises do Petróleo ocorreram devido ao desequilíbrio entre a sua oferta e a sua demanda global. Por exemplo, durante a Guerra do Yon-Kippur, em 1973, o preço do barril subiu de US\$ 2,9 para US\$ 11,65. Da mesma forma, durante a revolução Xiita, em 1981, o preço do barril subiu de US\$ 13,00 para US\$ 34,00.

Apesar de não existir um consenso se as RCEs devem ou não serem consideradas *commodities*, sabe-se que as estimativas do seu preço têm uma alta aleatoriedade embutida devido às incertezas existentes sobre a sua oferta e demanda futura [8]. Recentemente, entre os dias 24 de abril e 12 de maio de 2006, a constatação de que as permissões de poluição (European Union Allowances)

havia sido entregues em excesso às empresas europeias fez com que o preço desses ativos caísse de 29,43 euros/tCO₂e para 10,14 euros/tCO₂e.

Tendo em vista que o valor dos ativos financeiros pode apresentar saltos discretos e aleatórios em função da chegada de novas informações, diversos estudos empíricos foram realizados com o objetivo de verificar se o modelo estocástico de difusão, baseado somente no movimento browniano, é capaz de representar adequadamente o seu comportamento [62].

Segundo Lucas & Klaasen [63], uma grande desvantagem do movimento browniano é supor que os retornos possuem distribuição normal, pois, devido ao decaimento exponencial das suas caudas, a probabilidade de que grandes crises financeiras venham a acontecer torna-se muito pequena. Além disso, a suposição de retornos normalmente distribuídos é contradita empiricamente, mostrando-se que a distribuição de retornos apresenta comportamento leptocúrtico, ou seja, com curtose maior do que três e, conseqüentemente, caudas mais largas do que as da distribuição normal.

Em sua tese de Doutorado, Herencia [64] estudou o comportamento de duas séries financeiras: os preços de fechamento das ações da empresa TELEBRÁS PN, em Dólar norte-americano²⁸, e a cotação do Marco Alemão no mercado futuro, também em relação ao Dólar norte-americano²⁹. Em ambos os casos o estudo concluiu que as distribuições são leptocúrticas.

Mandelbrot [65] e Fama [66][67], ao estudarem a série de preços de algodão e de ações de empresas norte-americanas, concluíram que a cauda da distribuição dos retornos eram extremamente pesadas, parecidas à da distribuição de Cauchy.

Segundo Herencia [64], cauda pesada é uma característica presente em quase toda série financeira. Isso significa que os retornos extremos podem ocorrer de uma maneira muito mais freqüente do que os previstos por uma distribuição normal. Enfim, a inadequabilidade do modelo estocástico de difusão padrão em

²⁸ Esta série é composta por 1599 valores, coletados no período de 3 de Janeiro de 1989 até 17 de Julho de 1995.

²⁹ Esta série é composta por 1767 valores, coletados no período de 3 de Janeiro de 1984 até 31 de Dezembro de 1990.

explicar certas características dos ativos financeiros tem levado ao desenvolvimento de modelos alternativos, entre os quais, destacam-se os modelos de difusão com saltos [62].

O modelo de difusão com saltos foi inicialmente proposto por Robert Merton [59] para o apereçamento de opções financeiras. Merton argumenta que o modelo anteriormente proposto por Black & Scholes deixa de ser válido quando a dinâmica do preço do ativo não puder ser representado por um processo estocástico de caminho contínuo, ou seja, por um processo cujo preço é passível de sofrer apenas pequenas variações dentro de pequenos intervalos de tempo. No sentido de modelar adequadamente o comportamento dos ativos financeiros, Merton considerou que o ruído no preço desses ativos deveria ser composto por dois tipos de vibrações: as normais e as anormais.

Segundo Merton [59], as vibrações normais podem ocorrer devido a um desequilíbrio temporário entre a oferta e a demanda do ativo, sejam por mudanças no cenário econômico ou simplesmente pela chegada de novas informações capazes de causar mudanças marginais no seu preço. Merton sugere que essas vibrações sejam modeladas pelo movimento geométrico browniano.

Ao contrário das vibrações normais, as vibrações anormais são consideradas fruto de novas informações capazes de produzir um efeito maior do que o marginal nos preços dos ativos. Geralmente, tais informações são específicas de uma determinada firma ou indústria. Merton sugere que este tipo de vibração seja modelado por um processo de Poisson. Cabe destacar que, neste modelo, o evento com distribuição de Poisson é a chegada de novas informações capazes de produzir saltos no preço do ativo. Estes eventos são considerados independentes e identicamente distribuídos.

Matematicamente, a equação diferencial estocástica 5.44 descreve o modelo de Merton para o caminho seguido pelo preço do ativo financeiro:

$$\frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda.k).dt + \sigma.dz + dq \quad (5.44)$$

Nesta equação, α representa o retorno esperado instantâneo do ativo, σ^2 representa a variância instantânea do retorno caso o evento de Poisson não ocorra, dz representa o processo de Wiener, dq representa o processo de Poisson, λ

representa o número médio de chegadas de eventos de Poisson por unidade de tempo, e k representa o valor esperado da variação percentual ($Y-1$) do preço do ativo caso o evento de Poisson venha a ocorrer, ou seja, $k = E(Y-1)$. Neste modelo, cabe ressaltar que dz e dq são processos independentes.

Segundo Nomi [68], de acordo com a equação 5.44 o preço da ação segue um caminho contínuo na maior parte do tempo, entretanto, ao longo de sua trajetória, existe a possibilidade de ocorrerem saltos discretos e aleatórios com diferentes sinais e amplitudes. Supondo que em um pequeno intervalo de tempo dt exista 100% de chance de que no máximo um salto venha a ocorrer, o processo estocástico definido anteriormente poderia ser escrito como:

1. situação em que ocorre o salto (probabilidade λdt).

$$\frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda.k).dt + \sigma.dz + (Y - 1) \quad (5.45)$$

2. situação em que não ocorre o salto (com probabilidade $(1 - \lambda dt)$).

$$\frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda.k).dt + \sigma.dz \quad (5.46)$$

A partir das equações 5.45 e 5.46, conclui-se que na ausência de saltos o preço do ativo seguirá a mesma dinâmica do modelo proposto por Black & Scholes [49], exceto pela presença do fator λk no termo de tendência do processo.

Segundo Souza [69], o fator λk deve ser introduzido na equação 5.44 para corrigir um possível viés introduzido pela consideração do processo de Poisson. Conforme mostrado pela equação 5.47, este viés se deve ao fato de que o valor esperado do processo de Poisson não é nulo.

$$E(dq) = \lambda.dt.E(Y - 1) + (1 - \lambda.dt).0 = \lambda.dt.k \quad (5.47)$$

Para que o valor esperado do retorno de um ativo que segue o processo de difusão com saltos seja o mesmo do obtido quando utilizado o MGB, é necessário que o termo de tendência deste processo seja subtraído de $E(dq)$. Esta afirmação é demonstrada matematicamente a seguir:

$$\frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda.k).dt + \sigma.dz + dq$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E\left[\frac{dS}{S}\right] &= E[(\alpha - \lambda.k).dt + \sigma.dz + dq] \\
\Rightarrow E\left[\frac{dS}{S}\right] &= E[(\alpha - \lambda.k).dt] + E[\sigma.dz] + E[dq] \\
\Rightarrow E\left[\frac{dS}{S}\right] &= (\alpha - \lambda.k).dt + 0 + \lambda.dt.k \\
\Rightarrow E\left[\frac{dS}{S}\right] &= \alpha.dt - \lambda.k.dt + \lambda.dt.k \\
\Rightarrow E\left[\frac{dS}{S}\right] &= \alpha.dt \tag{5.48}
\end{aligned}$$

Conclui-se que, durante a maior parte do tempo, o valor esperado do retorno do ativo sob o processo de difusão com saltos será distinto do mostrado pela equação 5.48. Entretanto, em alguns momentos aleatórios, haverá um grande deslocamento que compensará essa diferença [69].

Neste trabalho, o processo de difusão com saltos descrito na equação 5.44 é empregado para modelar o movimento dos preços das RCEs produzidas no âmbito do Mecanismo de Desenvolvimento Limpo do Protocolo de Quioto. Sendo assim, tal como realizado na seção 5.4.1, se faz necessário encontrar uma equação apropriada para a simulação deste processo. Segundo Tsay [62], o primeiro passo é supor uma situação em que o salto não ocorre, ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{dS_t}{S_0} &= (\alpha - \lambda k).dt + \sigma.dz_t \\
dS_t &= S_0(\alpha - \lambda k).dt + S_0\sigma.dz_t \tag{5.49}
\end{aligned}$$

Seguindo os mesmos passos mostrados na seção 5.4.1, deduz-se que:

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z_t\right] \tag{5.50}$$

onde $\gamma = \alpha - \lambda.k$ e representa a tendência do processo de difusão com saltos.

Considerando t_i o tempo necessário para a ocorrência do i -ésimo salto, supõe-se que nenhum salto irá ocorrer dentro do primeiro intervalo $[0, t_1)$, logo:

$$S_{t_1} = S_0 \exp \left[\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_1 + \sigma z_{t_1} \right] \quad (5.51)$$

Uma vez que ocorra um salto no instante t_1 , será causada uma alteração no valor do ativo de proporções $(Y - 1)$. O novo valor do preço será dado por:

$$S_{t_1} = S_{t_1} [1 + (Y_1 - 1)] = Y_1 S_{t_1} = S_0 \exp \left[\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_1 + \sigma z_{t_1} \right] Y_1 \quad (5.52)$$

O mesmo raciocínio pode ser empregado para o segundo intervalo $[t_1, t_2)$, ou seja:

$$S_{t_2} = S_{t_1} \exp \left[\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_2 - t_1) + \sigma (z_{t_2} - z_{t_1}) \right] \quad (5.53)$$

Substituindo-se o valor de S_{t_1} encontrado na equação 5.52, tem-se que:

$$S_{t_2} = S_0 \exp \left[\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_2 + \sigma z_{t_2} \right] Y_1 \quad (5.54)$$

Uma vez que ocorra um novo salto em t_2 , o valor de S_{t_2} será dado por:

$$S_{t_2} = S_{t_2} [1 + (Y_2 - 1)] = Y_2 S_{t_2} = S_0 \exp \left[\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_2 + \sigma z_{t_2} \right] Y_1 Y_2 \quad (5.55)$$

Seguindo o mesmo raciocínio empregado para S_{t_1} e S_{t_2} , na ocorrência de um n -ésimo salto a equação 5.55 pode ser generalizada da seguinte forma:

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma z_t \right] Y(n) \quad (5.56)$$

onde:

z_t é uma variável aleatória com distribuição normal de média zero e variância dt ;

e

$$Y(n) = 1 \text{ se } n = 0, \quad Y(n) = \prod_{j=1}^n Y_j \text{ se } n \geq 1; \text{ onde } n \text{ é o número de ocorrências}$$

do evento de Poisson distribuídos em um intervalo de tempo dt .

Finalmente, o processo de difusão com saltos tem sido empregado em diversos estudos envolvendo tanto a avaliação de riscos financeiros quanto a avaliação de opções sobre ativos financeiros. Por exemplo, Nomi [68] emprega este processo para analisar o risco de mercado de um fundo de investimento em ações atrelado ao IBOVESPA. Tal risco é mensurado empregando-se as medidas do *Value at Risk* (VaR) e do *Expected Tail Loss* (ETL).

Em particular, os problemas envolvendo a avaliação de opções financeiras na presença de saltos são especialmente complexos de serem resolvidos. Nestes casos, o princípio da ausência de arbitragem deixa de ser válido, pois o mercado se torna incompleto³⁰. Cabe ressaltar que a ausência de arbitragem é uma das premissas principais do modelo de Black & Scholes para avaliação de opções [49].

Especificamente para o modelo proposto por Merton, uma fórmula analítica foi desenvolvida para a avaliação de opções européias [59]. Neste caso, considerou-se que toda informação causadora de saltos se refere, exclusivamente, à firma ou indústria a que pertence o ativo. Desta forma, a possibilidade de que um salto venha a ocorrer pode ser considerado um risco não sistemático, ou seja, descorrelacionado com o mercado. Isso permite que uma carteira livre de risco possa ser montada, eliminando o problema da arbitragem. Entretanto, segundo Briani [70], a fórmula desenvolvida por Merton representa um caso muito particular, não podendo ser generalizada para outros tipos de opções.

Segundo Chesnev [71], um problema ainda mais complexo de ser resolvido é a avaliação de opções americanas na presença de saltos. Nestes casos, soluções analíticas são bastante difíceis de serem encontradas. Dadas as dificuldades existentes, os métodos numéricos têm sido bastante difundidos na avaliação desse tipo de opções americanas. Frota [72] emprega o método LSM para avaliar opções cujo ativo objeto segue um processo *Jump to ruin*, uma versão simplificada do modelo de Merton. Guimarães [73] utiliza o método proposto por Grant, Vora & Weeks [56] para avaliar a oportunidade de se expandir a produção de um campo

³⁰ Se o número de estados da natureza (mercado) for maior que o de ativos independentes com preços associados a esses estados, o mercado é incompleto; se for igual o mercado é dito completo; se for menor então existe arbitragem [42].

de Petróleo por meio de até 2 poços adicionais. Guimarães considera que o preço do Petróleo segue um processo de reversão à média com saltos. Cabe ressaltar que as oportunidades de investimento em ativos reais são geralmente consideradas opções americanas sobre ativos que pagam dividendos.

Neste trabalho, considera-se que um projeto de geração de energia elétrica a partir de fontes renováveis traz consigo a oportunidade de ser registrado junto ao Comitê Executivo a fim de produzir e comercializar RCEs. Três métodos numéricos são empregados na avaliação desta oportunidade: o método Binomial, o método LSM e o método de GVW.

O método Binomial é empregado sempre que o processo estocástico considerado for o MGB. Para um dado caso exemplo, será realizada uma análise de robustez da aplicação do método LSM ao problema proposto sob essas condições. Esta análise terá como *Benchmark* os resultados obtidos a partir da aplicação do método Binomial com 4000 passos.

Uma vez que o processo estocástico empregado passe a considerar possíveis descontinuidades na série de preços do ativo, o método empregado na avaliação da opção passará a ser o LSM. Nestes casos, a utilização do método binomial se torna bastante complexa devido à dificuldade para se definir os parâmetros deste método sob a hipótese de um mundo neutro ao risco. Novamente, para um caso exemplo, será testada a convergência dos resultados encontrados pelo método LSM em relação aos resultados obtidos pelo método de GVW.