

Estimação de Canal Adaptativa com Símbolos Piloto

No capítulo anterior foram apresentados métodos para estimação de canal utilizando símbolos piloto em sistemas CP-OFDM e ZP-OFDM. As estimativas de canal, obtidas no início do bloco de símbolos OFDM recebidos, são utilizadas em equalizadores ZF ou MMSE, sendo os sinais na saída deste equalizadores utilizados na detecção dos sub-símbolos OFDM. A estimativa de canal inicial é então utilizada pelos equalizadores ao longo de todo bloco de símbolos OFDM.

Esta seção aborda métodos para redução da variância do erro da estimativa inicialmente obtida ao longo do bloco de símbolos OFDM. Isto é especialmente importante para canais variantes no tempo, pois neste caso a variância do erro da estimativa inicial aumenta gradativamente ao longo do bloco de símbolos OFDM.

A estimativa do canal utilizando matriz purificadora $\hat{\mathbf{q}}_{\text{final}}$ em (4-15) é obtida através de um símbolo piloto OFDM. A matriz covariância $\mathbf{K}_{\mathbf{q}_{\text{final}}}$ das estimativas é dada então por (4-14). Para canais fixos, as componentes desta matriz variâncias podem ser diminuídas se a estimativa de canal for o resultado da média de N estimativas obtidas independentemente. Chamando a média de N estimativas independentes $\hat{\mathbf{q}}_{\text{final}}(1)$, $\hat{\mathbf{q}}_{\text{final}}(2)$, ..., $\hat{\mathbf{q}}_{\text{final}}(N)$ de $\hat{\mathbf{q}}_{\text{médio}}$ tem-se que:

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{médio}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{q}}_{\text{final}}(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\mathbf{q} + \mathbf{n}_{\text{final}}(n)) = \mathbf{q} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{n}_{\text{final}}(n) \quad (5-1)$$

Onde \mathbf{q} é a resposta de frequência do canal dado em (4-12a) e $\mathbf{n}_{\text{final}}$ dado em (4-13) é o ruído da estimativa $\hat{\mathbf{q}}_{\text{final}}$. Considerando que os vetores de ruído no somatório em (5-1) são estatisticamente independentes e têm média nula, a matriz covariância de $\hat{\mathbf{q}}_{\text{médio}}$ é dado por:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{q}} \text{ médio} = \frac{1}{N^2} \sum_n \mathbb{E}[\mathbf{n}_{\text{final}}(n) \mathbf{n}_{\text{final}}^H(n)] = \frac{N}{N^2} \mathbf{K}_{\mathbf{q}} \text{ final} = \frac{1}{N} \mathbf{K}_{\mathbf{q}} \text{ final} \quad (5-2)$$

Assim as variâncias das componentes da média das estimativas do canal são reduzidas por um fator de $\frac{1}{N}$.

Assim o uso de N símbolos piloto, ao invés de apenas um símbolo piloto, no início de cada bloco de símbolos OFDM, $\mathbf{x}(n)$ definido em (4-1), transmitidos tem a vantagem de produzir uma estimativa com uma variância menor, à custa da redução do *throughput*, pois neste caso utiliza-se N símbolos somente para transmissão de símbolos piloto.

Uma maneira alternativa para obter a redução da variância da estimativa do canal sem a utilização de N símbolos piloto pode ser feita utilizando um símbolo piloto no início do bloco OFDM para gerar a estimativa de canal refinada $\hat{\mathbf{q}}_{\text{final}}$, estimativa esta que é, então, utilizada como condição inicial para o método de decisão direta (*decision directed*) utilizado para obtenção das estimativas de canal em cada símbolo $\mathbf{x}(n)$ do bloco OFDM. A estimativa de canal de cada símbolo $\mathbf{x}(n)$ é utilizada para se estimar um vetor $\hat{\mathbf{s}}(n)$ contendo os valores complexos transmitidos em cada subportadora do símbolo OFDM posterior. O vetor $\hat{\mathbf{s}}(n)$ é finalmente utilizado para gerar uma estimativa do canal $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n)$ no n -ésimo símbolo $\mathbf{x}(n)$ da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbf{B} \hat{\mathbf{S}}(i)^{-1} \mathbf{x}(i) = \frac{\mathbf{B}}{n+1} \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{S}}(i)^{-1} \mathbf{x}(i) \quad (5-3)$$

onde \mathbf{B} é a matriz purificadora definida após (4-15), para sistemas CP-OFDM $\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}_{\text{cp}}(n)$, definido em (4-17) e para sistemas ZP-OFDM $\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}_{\text{zp}}(n)$, definido em (4-23). A matriz $\hat{\mathbf{S}}(n) = \text{diag}(\hat{\mathbf{s}}(n))$ onde $\hat{\mathbf{s}}(n)$ é dado por:

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \text{disc}[\mathbf{D}(\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n-1))^{-1} \mathbf{x}(n)] = \hat{\mathbf{d}}(n) \quad , n = 1, 3, \dots \quad (5-4a)$$

para sistemas CP-OFDM e por:

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathbf{V} \text{disc}[(\mathbf{D}(\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n-1)\mathbf{V})^\dagger \mathbf{x}(n))] = \mathbf{V} \hat{\mathbf{d}}(n) \quad , n = 1, 3, \dots \quad (5-4b)$$

para sistemas ZP-OFDM.

A função $\text{disc}[\mathbf{z}]$ retorna, para cada componente de \mathbf{z} , o símbolo da constelação M -PSK utilizado, pelo critério de mínima distância, resultando em um vetor $\hat{\mathbf{d}}(n)$. No instante inicial $n = 0$ tem-se:

$$\hat{\mathbf{S}}(0) = \mathbf{S}(0) \quad (5-5)$$

onde \mathbf{S} é a matriz diagonal contendo os símbolos piloto definida em (4-1). Para sistemas CP-OFDM $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{cp}}$, definida em (4-17), e para sistemas ZP-OFDM, $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{zp}}$, definida em (4-23b).

Pode-se observar a partir de (5-3) que a estimativa $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n)$ no instante inicial $n = 0$ é igual a estimativa do canal refinada $\hat{\mathbf{q}}_{\text{final}}$ gerada a partir do símbolo piloto inicial.

Comparando-se (5-3) com (4-15) e (4-2) nota-se que $\mathbf{B} \hat{\mathbf{S}}(i)^{-1} \mathbf{x}(i)$ é uma aproximação da estimativa de canal purificada $\hat{\mathbf{q}}_{\text{final}}(i)$ pois $\hat{\mathbf{S}}(i)$ pode diferir de $\mathbf{S}(i)$ visto que as componentes de $\hat{\mathbf{S}}(i)$ contêm estimativas dos símbolos transmitidos nas subportadoras do símbolo OFDM no instante i . Deste modo $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n)$ pode ser visto como uma aproximação de $\hat{\mathbf{q}}_{\text{médio}}$, no instante n . Assim, a estimativa de canal $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n)$ tem a variância reduzida em relação a $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(0)$, a estimativa obtida a partir do símbolo piloto, tendo o fator de redução um limite inferior de $\frac{1}{n+1}$.

Para um bloco de símbolos OFDM recebido, as estimativas de canal são calculadas para cada instante n e refinadas utilizando as estimativas calculadas anteriormente constituindo-se assim um método adaptativo para redução da variância. É importante ressaltar que em situações de baixa relação sinal-ruído os erros em $\hat{\mathbf{s}}(n)$, dado em (5-4), podem se propagar continuamente, aumentando o erro da estimativa em (5-3).

O método de redução da variância da estimativa apresentada em (5-1) e (5-3) é uma aproximação da média estatística da estimativa de canal $\hat{\mathbf{q}}_{\text{final}}(n)$. A média estatística de uma seqüência de variáveis aleatórias de média constante pode ser vista como a componente DC da mesma, deste modo a operação que a retorna a média estatística de uma variável aleatória pode ser vista como uma filtragem passa-baixa perfeita que retorna a componente DC da seqüência. Assim a aproximação da média estatística em (5-1) e (5-3) pode ser entendida como um processo de filtragem da estimativa de canal visando reduzir o ruído da estimativa. Para o caso de canal fixo com resposta de freqüência \mathbf{q} , a média da estimativa de canal é a própria resposta em freqüência do canal \mathbf{q} como pode ser visto em (4-1). Deste modo a filtragem da estimativa de canal utilizando (5-1) e (5-3) converge no sentido da média quadrática, para o valor correto \mathbf{q} .

Para canais variantes no tempo, o método de redução da variância da estimativa do canal apresentado em (5-1) deve ser modificado para se adaptar as variações temporais do canal. A introdução de um fator de esquecimento $0 < \lambda < 1$, em (5-3), faz com as estimativas de canal $\hat{\mathbf{q}}_{\text{final}}(n)$ nos instantes n mais recentes tenham maior peso no somatório que as estimativas em instantes n mais distantes do presente, “esquecendo” assim o passado:

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \mathbf{B} \hat{\mathbf{S}}(i)^{-1} \mathbf{x}(i) = \mathbf{B} \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \hat{\mathbf{S}}(i)^{-1} \mathbf{x}(i) \quad (5-6)$$

Para canais com variações temporais rápidas o valor de λ deve ser reduzido para que uma maior quantidade de estimativas passadas, que tenham variado significativamente em relação à estimativa atual, sejam descartadas. Porém isto torna a redução da variância da estimativa menor, pois o número de termos significativos no somatório em (5-6) diminui. Para canais com variações lentas, a resposta de freqüência do canal, $\mathbf{q}(n)$, varia pouco ao longo bloco de símbolos OFDM assim λ pode ser escolhido próximo à unidade fazendo com que a redução da variância da estimativa de canal no instante n seja bem próxima a redução obtida para canais fixos. Alternativamente, analisando o somatório em (5-6) verifica-se que se trata da operação de convolução discreta da seqüência

$\mathbf{B}\hat{\mathbf{S}}(n)^{-1}\mathbf{x}(n)$ com a seqüência $\lambda^n u(n)$, onde $u(n)$ representa a seqüência degrau unitário. Esta convolução discreta equivale a passar a seqüência $\mathbf{B}\hat{\mathbf{S}}(n)^{-1}\mathbf{x}(n)$ por um filtro passa-baixas discreto com um pólo λ . Assim a banda do filtro passa-baixas deve ser suficiente para acomodar as variações temporais de $\mathbf{q}(n)$ evitando-se distorção do espectro, e estreita o suficiente para reduzir a variância do ruído em $\mathbf{B}\hat{\mathbf{S}}(n)^{-1}\mathbf{x}(n)$. Assim como a banda desse filtro é inversamente proporcional a λ , se o canal varia rápido a banda do filtro deve ser aumentada e conseqüentemente λ deve ser diminuído. Caso o canal varie mais lentamente reduz-se a banda do filtro aumentando λ . Para canais fixos o valor de λ é igual a unidade torna (5-7) igual a (5-3) e conforme n aumenta, (5-7) tende para um passa-baixas ideal que retorna somente a componente DC da seqüência $\mathbf{B}\hat{\mathbf{S}}(n)^{-1}\mathbf{x}(n)$, ou seja a média estatística da seqüência $\mathbf{B}\hat{\mathbf{S}}(n)^{-1}\mathbf{x}(n)$ que é a resposta em freqüência do canal \mathbf{q} .

Assim foi apresentado em (5-6) um método adaptativo para redução da variância do erro da estimativa, obtida a partir de uma estimativa inicial. Analisando (5-6) é observado que a redução da variância da estimativa é obtida através da média ponderada das estimativas de canal $\hat{\mathbf{S}}(n)^{-1}\mathbf{x}(n)$, obtidas através do método *decision-directed*, e são posteriormente refinadas pela matriz purificadora **B**.

Um procedimento adaptativo para reduzir a variância do ruído da estimativa de canal a partir de uma estimativa inicial com um desempenho superior ao uso da média ponderada, dada em (5-6), pode ser obtido utilizando-se o *algoritmo* LS (*Least Squares*) para aproximar a solução MMSE (*solução de Wiener*) [3], [8], [21].

5.1

Estimação de Canal Adaptativa utilizando algoritmo LS

A idéia por trás do algoritmo LS é minimizar a função custo *Least Squares* ponderado definido como [3], [8], [21]:

$$\mathbf{C}(\hat{\mathbf{q}}) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} |\mathbf{e}(i)|^2 \quad (5-7)$$

onde $0 < \lambda \leq 1$, introduzido em (5-6) é um fator de esquecimento que efetivamente limita o número de amostras de entrada na função custo, tendo a mesma função que em (5-6), ou seja, dar um peso maior as entradas nos instantes mais recentes. O vetor erro $e(i)$ é a diferença entre o vetor observado $\mathbf{x}(i)$ e o vetor que observaríamos se $\mathbf{q}(n) = \hat{\mathbf{q}}(n)$ e se não houvesse ruído. É provado que algoritmos baseados na função custo (5-7), chamados de algoritmos LS possuem a taxa de convergência mais rápida que outros algoritmos adaptativos como o LMS [8].

Para o modelo de estimação do canal introduzido nesta dissertação o vetor erro é dado por:

$$\mathbf{e}(i) = \mathbf{x}(i) - \hat{\mathbf{S}}(i) \hat{\mathbf{q}} \quad (5-8)$$

onde $\hat{\mathbf{S}}(i)$, é definido após (5-3) e $\hat{\mathbf{q}}(n)$ é a estimativa resposta de frequência do canal no domínio da frequência (não necessariamente purificada pela matriz B). Substituindo (5-8) em (5-7) tem-se:

$$C(\hat{\mathbf{q}}(n)) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left| \mathbf{x}(i) - \hat{\mathbf{S}}(i) \hat{\mathbf{q}}(n) \right|^2 \quad (5-9)$$

A função custo $C(\hat{\mathbf{q}}(n))$ é minimizada calculando seu gradiente em relação as componentes de $\hat{\mathbf{q}}(n)$ e igualando o resultado a zero:

$$\nabla C(\hat{\mathbf{q}}(n)) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} 2 \left[\hat{\mathbf{S}}(i)^H \hat{\mathbf{S}}(i) \hat{\mathbf{q}}(n) - \hat{\mathbf{S}}(i)^H \mathbf{x}(i) \right] \quad (5-10)$$

$$\nabla C(\hat{\mathbf{q}}(n)) = 0 \therefore \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[\hat{\mathbf{S}}(i)^H \hat{\mathbf{S}}(i) \right] \hat{\mathbf{q}}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[\hat{\mathbf{S}}(i)^H \mathbf{x}(i) \right] \quad (5-11)$$

Esta igualdade pode ser escrita sob forma de matrizes:

$$\mathbf{R}(n)\hat{\mathbf{q}}(n) = \mathbf{P}(n) \quad (5-12)$$

$$\text{onde } \mathbf{R}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[\hat{\mathbf{S}}(i)^H \hat{\mathbf{S}}(i) \right] \text{ e } \mathbf{P}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[\hat{\mathbf{S}}(i)^H \mathbf{x}(i) \right]$$

De (5-12) tem-se que o vetor $\hat{\mathbf{q}}(n)$ que minimiza a função custo em (5-9) é dada por:

$$\hat{\mathbf{q}}(n) = \mathbf{R}(n)^{-1}\mathbf{P}(n) \quad (5-13)$$

A estimativa de canal $\hat{\mathbf{q}}(n)$ é a estimativa que minimiza a soma dos erros quadráticos obtidos para um certo número de entradas passadas que é determinado pelo fator de esquecimento λ obtida para cada instante n através de (5-13), sendo uma aproximação da solução de *Wiener* [8]. De fato, λ dá um peso maior as amostras mais recentes, de modo que $\mathbf{C}(\hat{\mathbf{q}}(n))$ tende a esquecer o passado, fazendo com que pequenas variações temporais possam ser rastreadas. Para canais fixos o valor de λ deve ser igual à unidade. Em um ambiente de canal variante o valor λ não tem influência na taxa de convergência, porém determina a capacidade de rastreamento do algoritmo [8].

A fim de obter uma maior velocidade de convergência em (5-13), multiplica-se a estimativa de canal $\hat{\mathbf{q}}(n)$ em cada instante n , pela matriz purificadora \mathbf{B} fazendo com que a variância da estimativa de canal seja reduzida em cada instante n :

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n) = \mathbf{B}\hat{\mathbf{q}}(n) = \mathbf{B}\mathbf{R}(n)^{-1}\mathbf{P}(n) \quad (5-14)$$

Assim $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n)$ pode ser expresso como:

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n) = \mathbf{B} \left[\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[\hat{\mathbf{S}}(i)^H \hat{\mathbf{S}}(i) \right] \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[\hat{\mathbf{S}}(i)^H \mathbf{x}(i) \right] \right] \quad (5-15)$$

Um desenvolvimento análogo pode ser feito utilizando uma estimativa de canal $\hat{\mathbf{q}}(n)$ com uma restrição dada por:

$$\hat{\mathbf{q}}(n) = \sqrt{N} \mathbf{W}_o \hat{\mathbf{h}}_L(n) \quad (5-16)$$

onde $\hat{\mathbf{h}}_L(n)$ é a estimativa da resposta impulsional do canal com L componentes, ou seja, com o mesmo comprimento da resposta impulsional do canal $\mathbf{h}(n)$. Isto significa que a estimativa de canal $\hat{\mathbf{q}}(n)$ fica restrita ao sub-espaco gerado por \mathbf{W}_o , ou seja ao subespaco onde a verdadeira resposta de frequência tem que estar, em outras palavras $\hat{\mathbf{q}}(n)$ está purificado. Assim a função a ser minimizada passa a ser então:

$$\mathbf{C}(\hat{\mathbf{h}}_L(n)) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left| \mathbf{x}(i) - \hat{\mathbf{S}}(i) \sqrt{N} \mathbf{W}_o \hat{\mathbf{h}}_L(n) \right|^2 \quad (5-17)$$

Minimizando-se (5-17) em relação a $\hat{\mathbf{h}}_L$ e utilizando-se (5-16) obtêm-se uma estimativa de canal $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n)$ já purificada dada por:

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n) = \mathbf{W}_o \left[\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[\mathbf{W}_o^H \hat{\mathbf{S}}(i)^H \hat{\mathbf{S}}(i) \mathbf{W}_o \right] \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[\mathbf{W}_o^H \hat{\mathbf{S}}(i)^H \mathbf{x}(i) \right] \right] \quad (5-18)$$

Conforme visto em (5-4a), para sistemas CP-OFDM, as componentes da matriz diagonal $\hat{\mathbf{S}}(n)$ são símbolos M -PSK com norma unitária, deste modo tem-se:

$$\hat{\mathbf{S}}(n)^H \hat{\mathbf{S}}(n) = \mathbf{I} \quad (5-19)$$

conseqüentemente:

$$\mathbf{W}_o^H \hat{\mathbf{S}}(n)^H \hat{\mathbf{S}}(n) \mathbf{W}_o = \mathbf{I} \quad (5-20)$$

Assim substituindo (5-19) e (5-20) em (5-15) e (5-18) respectivamente obtêm-se, para sistemas CP-OFDM, obtêm-se uma expressão simplificada para $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n)$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n) &= \mathbf{W}_o \left[\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[\mathbf{W}_o^H \hat{\mathbf{S}}(i)^H \mathbf{x}(i) \right] \right] = \\ &= \mathbf{B} \left[\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[\hat{\mathbf{S}}(i)^H \mathbf{x}(i) \right] \right] = \\ &= \mathbf{B} \left[\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \right] \left[\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[\hat{\mathbf{S}}(i)^H \mathbf{x}(i) \right] \right] \end{aligned} \quad (5-21)$$

Assim a partir de (5-21) observa-se que para sistemas CP-OFDM, a estimativa de canal purificada $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n)$ que aproxima a solução de *Wiener* obtida, minimizando a função de custo para estimativas de canal geral, dada em (5-9), e posteriormente multiplicando o resultado pela matriz de purificação \mathbf{B} gera o mesmo resultado que minimizando a função de custo para estimativas de canal pré-purificadas dada em (5-17).

Para sistemas ZP-OFDM, as componentes da matriz diagonal $\hat{\mathbf{S}}(n)$ são o resultado da combinação linear de símbolos M -PSK com norma unitária, conforme visto em (5-4b) assim a condição dada em (5-19) não é mais válida. Neste caso $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n)$ deve ser obtido através de (5-15) ou (5-18) que geram resultados bastante semelhantes. Assim nesta dissertação a expressão dada (5-15) é utilizada pela menor complexidade computacional, pois exige uma inversão de uma matriz diagonal $P \times P$ ($\hat{\mathbf{S}}(n)^H \hat{\mathbf{S}}(n)$) enquanto que (5-18) exige uma inversão de uma matriz não diagonal $P \times P$ ($\mathbf{W}_o^H \hat{\mathbf{S}}(n)^H \hat{\mathbf{S}}(n) \mathbf{W}_o$).

5.1.1

Algoritmo LS Recursivo (RLS - *Recursive Least Squares*)

Na subseção anterior foi derivado uma expressão (5-14) para determinar a estimativa da frequência de canal $\hat{\mathbf{q}}(n)$, que minimiza a função custo dada em (5-9), repetida aqui por conveniência:

$$\hat{\mathbf{q}}(n) = \mathbf{R}(n)^{-1} \mathbf{P}(n)$$

que pode ser resolvida recursivamente como será visto a seguir.

Expressando primeiramente $\mathbf{P}(n)$, dada em (5-12), em termos de $\mathbf{P}(n)$ e $\mathbf{P}(n-1)$:

$$\mathbf{P}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[\hat{\mathbf{S}}(i)^H \mathbf{x}(i) \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-i} \left[\hat{\mathbf{S}}(i)^H \mathbf{x}(i) \right] + \lambda^0 \hat{\mathbf{S}}(n)^H \mathbf{x}(n) \quad (5-22)$$

$$\mathbf{P}(n) = \lambda \mathbf{P}(n-1) + \hat{\mathbf{S}}(n)^H \mathbf{x}(n) \quad (5-23)$$

Similarmente para $\mathbf{R}(n)$, dado em (5-12), em termos de $\mathbf{R}(n)$ e $\mathbf{R}(n-1)$:

$$\mathbf{R}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[\hat{\mathbf{S}}(i)^H \hat{\mathbf{S}}(i) \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-i} \left[\hat{\mathbf{S}}(i)^H \hat{\mathbf{S}}(i) \right] + \lambda^0 \left[\hat{\mathbf{S}}(n)^H \hat{\mathbf{S}}(n) \right] \quad (5-24)$$

$$\mathbf{R}(n) = \lambda \mathbf{R}(n-1) + \hat{\mathbf{S}}(n)^H \hat{\mathbf{S}}(n) \quad (5-25)$$

Como $\mathbf{R}(n)$ é uma matriz diagonal o cálculo de sua inversa é simples, não sendo necessário assim desenvolver uma forma recursiva para calcular diretamente $\mathbf{R}(n)^{-1}$ como é feito nos algoritmos RLS convencionais [8], [21].

Para sistemas CP-OFDM, observa-se através de (5-20), que a matriz $\mathbf{R}(n)^{-1}$ não varia com n sendo definida por:

$$\mathbf{R}(n)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda \\ 1 - \lambda^{n+1} \end{bmatrix} \mathbf{I} \quad (5-26)$$

Assim para se obter $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n)$, em sistemas CP-OFDM, é necessário calcular recursivamente a matriz $\mathbf{P}(n)$. Desta forma substituindo (5-23) em (5-21) obtêm-se a expressão recursiva:

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n) = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 - \lambda \\ 1 - \lambda^{n+1} \end{bmatrix} [\lambda \mathbf{P}(n-1) + \hat{\mathbf{S}}(n)^H \mathbf{x}(n)] = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 - \lambda \\ 1 - \lambda^{n+1} \end{bmatrix} \mathbf{P}(n) \quad (5-27)$$

onde as condições iniciais para $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(0)$ e $\mathbf{P}(0)$ são obtidas partir do símbolo piloto no início do bloco de símbolos CP-OFDM recebidos:

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(0) = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}(0) \quad (5-28)$$

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{S}^H \mathbf{x}(0) \quad (5-29)$$

onde \mathbf{S} é a matriz diagonal contendo os símbolos piloto definida em (4-1).

Para sistemas ZP-OFDM, $\mathbf{R}(n)$ não é constante, tendo assim que ser calculada recursivamente. Desta forma $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n)$ é obtida substituindo (5-23) e (5-25) em (5-15) resultando em:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n) &= \mathbf{B} [\lambda \mathbf{R}(n-1) + \hat{\mathbf{S}}(n)^H \hat{\mathbf{S}}(n)]^{-1} [\lambda \mathbf{P}(n-1) + \hat{\mathbf{S}}(n)^H \mathbf{x}(n)] = \\ &= \mathbf{B} \mathbf{R}(n)^{-1} \mathbf{P}(n) \end{aligned} \quad (5-30)$$

onde as condições iniciais para $\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(0)$, $\mathbf{R}(0)$ e $\mathbf{P}(0)$ são obtidas partir do símbolo piloto no início do bloco de símbolos ZP-OFDM recebidos:

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(0) = \mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}(0) \quad (5-31)$$

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{S}^H \mathbf{x}(0) \quad (5-32)$$

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{S}^H \mathbf{S} \quad (5-33)$$

Assim foi desenvolvido em (5-27) e (5-30), um algoritmo recursivo RLS, para sistemas CP e ZP-OFDM respectivamente que retorna para cada instante n a estimativa da resposta de frequência do canal que minimiza a função custo em (5-9) a partir de uma estimativa inicial, purificada pela matriz \mathbf{B} , obtida pelo símbolo piloto no início do bloco de símbolos CP e ZP-OFDM recebidos.

O desempenho deste esquema adaptativo de estimação de canal para sistemas CP-OFDM e ZP-OFDM, é mostrado na próxima seção.

5.2

Desempenho do esquema de estimação de canal adaptativo RLS nos sistemas CP-OFDM e ZP-OFDM

Nesta Seção são apresentados os resultados do desempenho do esquema de estimação de canal adaptativa Pós-DFT, obtidas através de (5-14) que utiliza matriz purificadora, utilizando o algoritmo RLS apresentado na subseção 5.1.1, considerando-se como comparação o esquema de estimação de canal adaptativa RLS sem purificação, obtidos a partir de (5-13), para sinais CP-OFDM e ZP-OFDM, em um canal de propagação fixo descrito por $\mathbf{h}_L = [0.8677 \ 0.4339 \ 0.2169 \ 0.1085]^T$. A fim de se observar o desempenho do esquema de estimação RLS em ambientes de propagação com variações temporais são utilizados canais de propagação variantes, descrito na subseção 3.3.4, onde o valor de $f_d T_{ofdm}$ é

variado a fim de se verificar o desempenho do esquema de estimação RLS em diferentes velocidades de desvanecimento atuante no canal.

Os resultados das simulações foram obtidos por meio de rotinas de simulação dos conceitos teóricos desenvolvidas em MATLAB.

As curvas obtidas são o resultado da média de 100 experimentos cada qual composto da transmissão e recepção de 100 símbolos OFDM, onde cada símbolo é formado por $M + G$ sub-símbolos QPSK, onde o primeiro símbolo OFDM é utilizado como símbolo piloto. O número de subportadoras é $M = 40$ e o intervalo de guarda possui dimensão $G = 10$.

Para sistemas CP-OFDM, os equalizadores ZF e MMSE, nas curvas de desempenho, definidas em (3-16) e (3-17) para canais fixos e (3-47) e (3-48) para canais variantes. No caso de sistemas ZP-OFDM, a detecção utiliza os equalizadores ZF e MMSE em (3-23) e (3-24) para canais fixos e (3-49) e (3-50) para canais variantes. Em ambos os casos, é considerado o conhecimento perfeito do canal no receptor para os casos de canal fixo e variante. Assim os dois equalizadores são considerados como figura de mérito para comparação com o desempenho dos equalizadores ZF dados por:

$$\mathbf{y}_{cp}(n) = \mathbf{D}(\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n))^{-1} \mathbf{x}_{cp}(n) \quad (5-34)$$

para sistemas CP-OFDM e

$$\mathbf{y}_{zp}(n) = (\mathbf{D}_P(\hat{\mathbf{q}}_{\text{adap}}(n))\mathbf{V})^\dagger \mathbf{x}_{zp}(n) \quad (5-35)$$

para sistemas ZP-OFDM

Para sistemas CP-OFDM, as curvas de desempenho obtidas, sem compensação da degradação imposta pelo canal de propagação, são o resultado da detecção das observações definidas em (3-15), usando um detector de mínima distância. De igual modo, para sistemas ZP-OFDM as curvas de desempenho obtidas, sem compensação de canal, resultam da detecção das observações

definidas em (3-22) multiplicadas por \mathbf{V}^H , conforme o equalizador subótimo apresentado em (3-25), neste caso sem compensação de canal.

5.2.1

Desempenho do esquema de estimação de canal adaptativo RLS nos sistemas CP-OFDM e ZP-OFDM para canal fixo

Nesta subseção são apresentados os resultados das simulações para sinais CP-OFDM e ZP-OFDM, em um canal de propagação fixo descrito por $\mathbf{h}_L = [0.8677 \ 0.4339 \ 0.2169 \ 0.1085]^T$. Primeiramente é considerado o conhecimento a priori do comprimento do canal $L = 4$, deste modo a matriz \mathbf{W}_0 possui L colunas para os sistemas CP e ZP-OFDM. O valor de λ foi 0,999, bem próximo a unidade, visto que o canal é fixo.

Abaixo são apresentadas, para os sistemas CP e ZP-OFDM, curvas para taxa de erro de bit média em função da relação sinal ruído e o erro médio quadrático das estimativas de canal produzidas pelos esquemas de estimação RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora, para um valor de $E_b/N_0 = 13\text{dB}$, para ambos os sistemas:

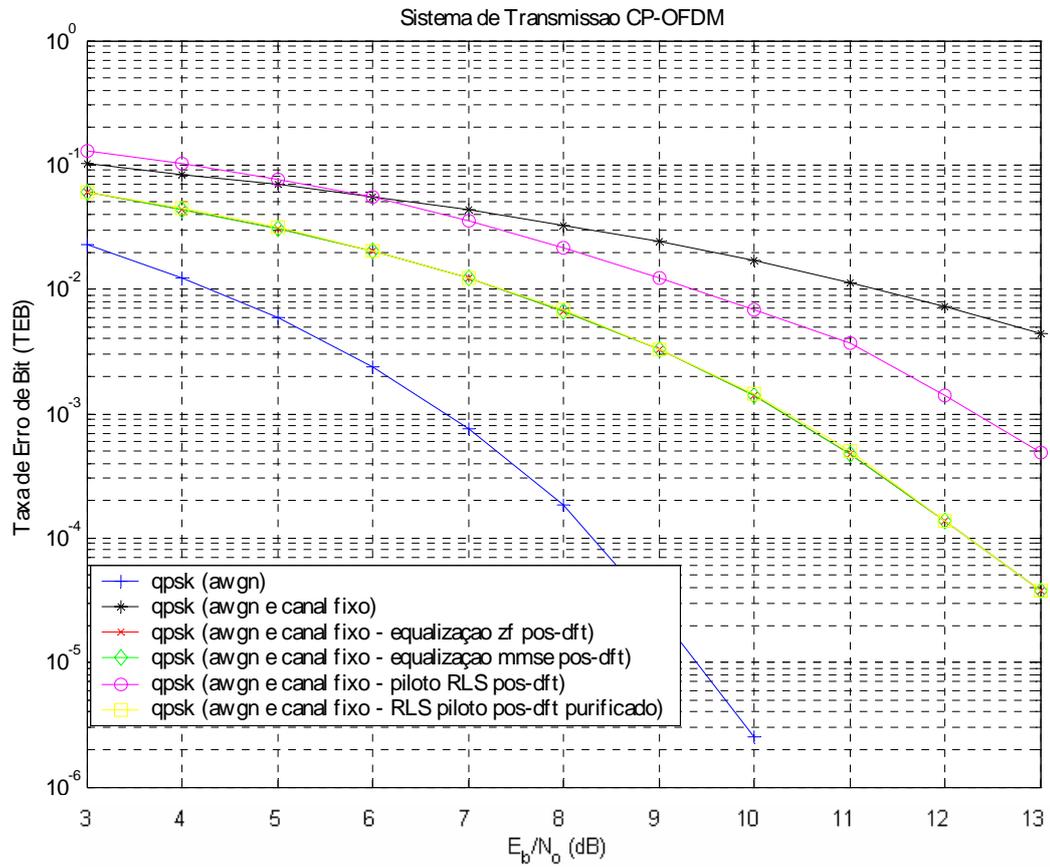


Figura 5.1 – CP-OFDM - Canal Fixo - Estimação de Canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS-comprimento do canal conhecido *a priori*

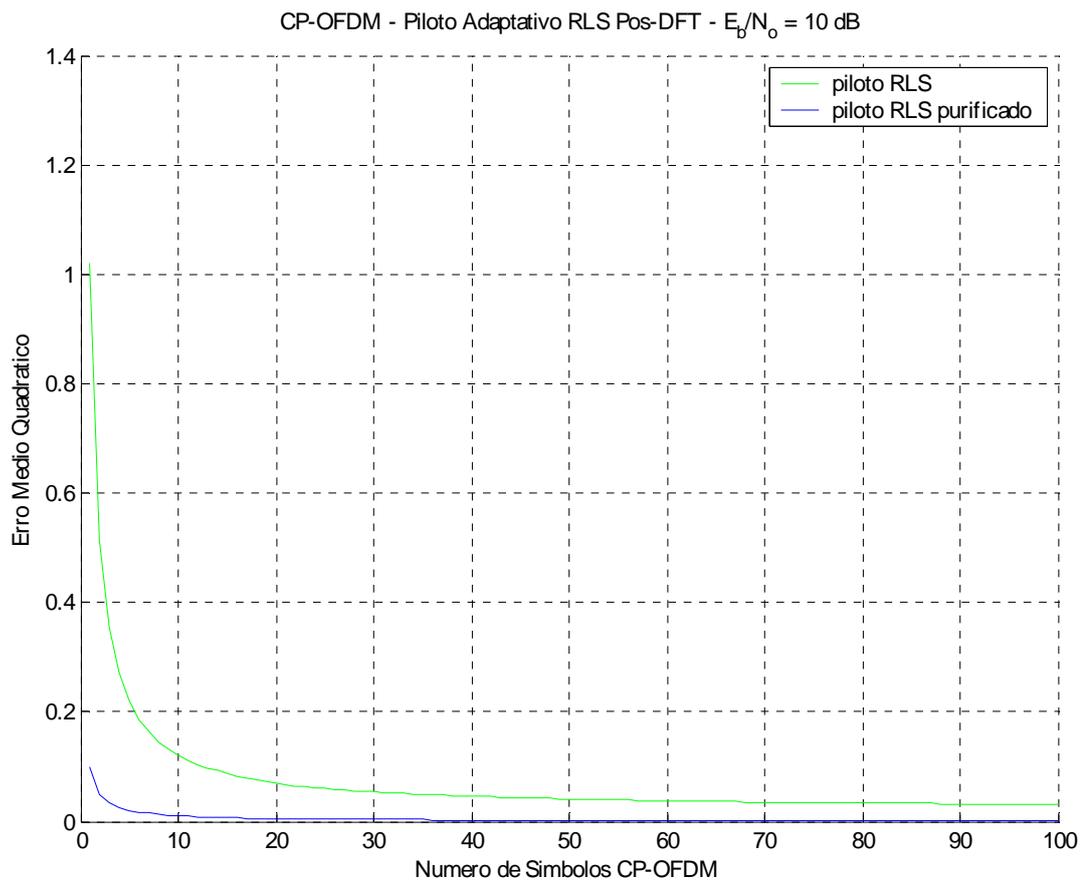


Figura 5.2 – CP-OFDM - Canal Fixo – Erro Médio Quadrático entre as estimativas de canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora

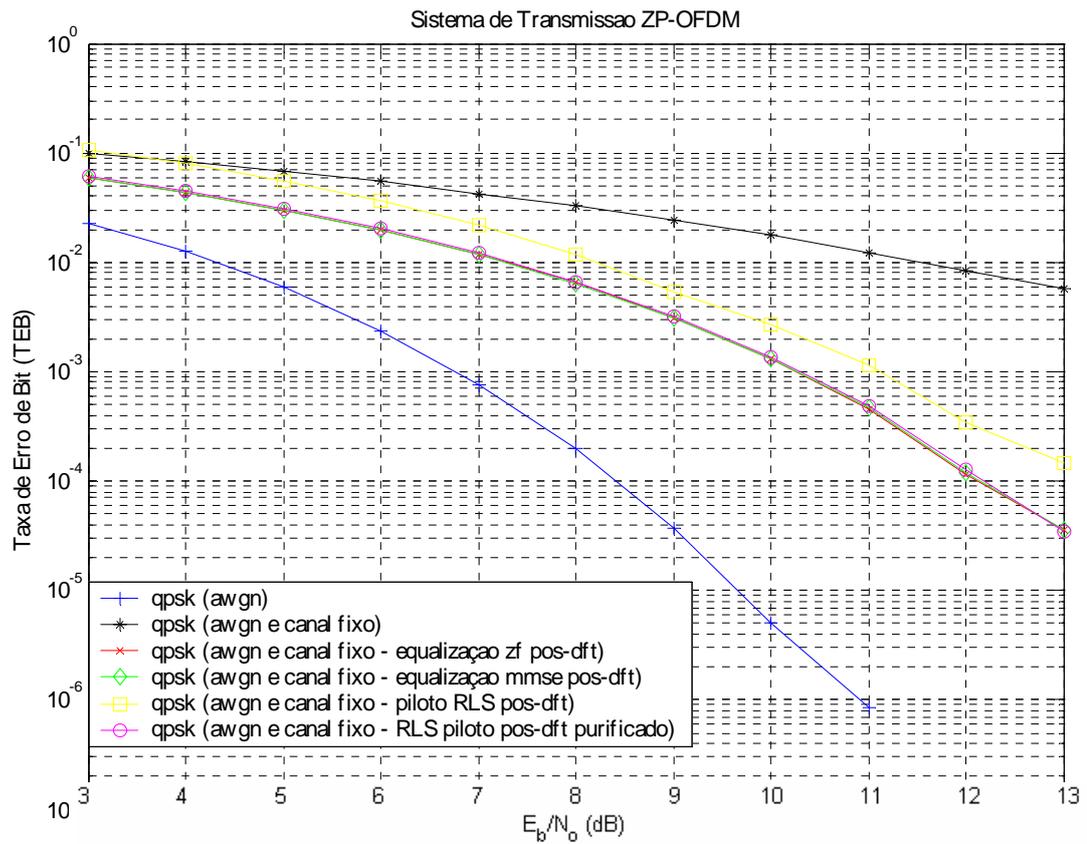


Figura 5.3 – ZP-OFDM - Canal Fixo - Estimação de Canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS-comprimento do canal conhecido *a priori*

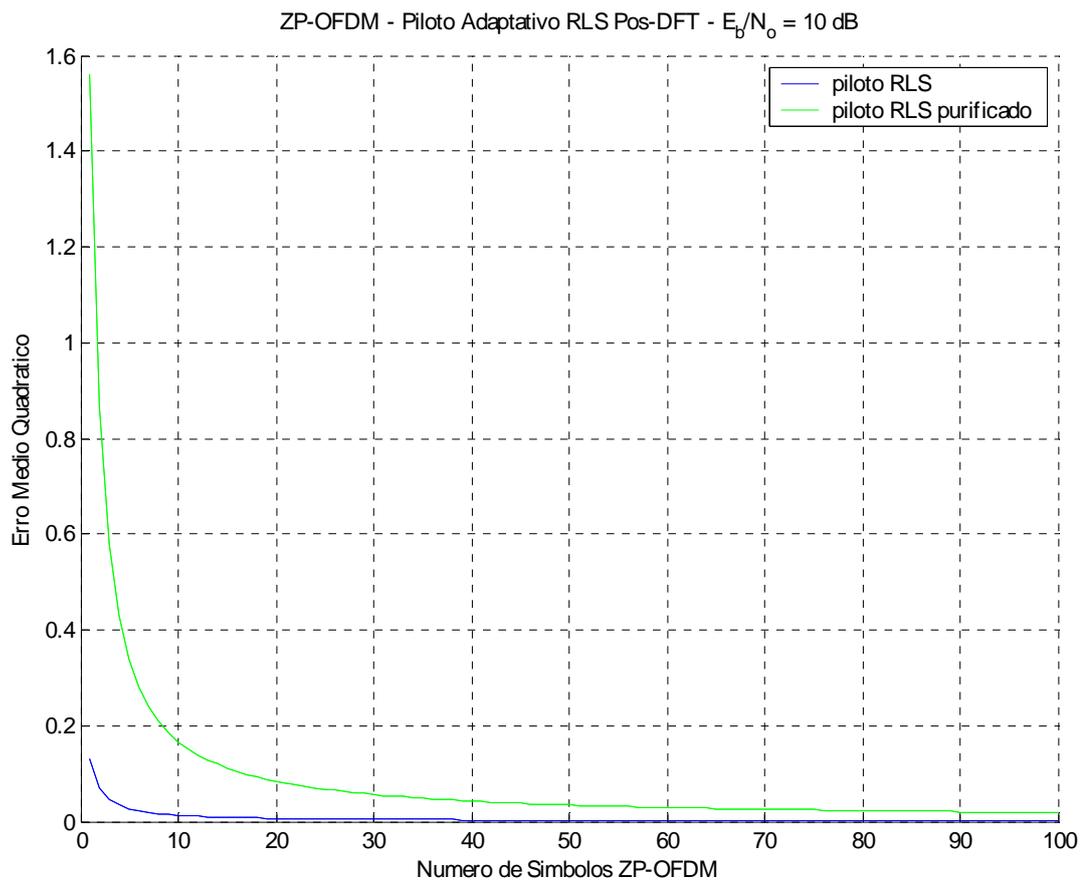


Figura 5.4 – ZP-OFDM - Canal Fixo – Erro Médio Quadrático entre as estimativas de canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora

Observando as curvas de desempenho, nas Figuras 5-1 e 5-3, que em ambos os sistemas CP-OFDM e ZP-OFDM as curvas de desempenho utilizando o esquema de estimação RLS de canal com matriz purificadora, são praticamente coincidentes com as curvas dos equalizadores ZF e MMSE onde o canal é conhecido no receptor. Além disso, o valor de E_b/N_0 requerido para uma dada probabilidade de erro para o esquema de estimação RLS utilizando matriz purificadora é 2 dB menor que o esquema de estimação RLS sem matriz purificadora para sistemas CP-OFDM e 1dB menor para sistemas ZP-OFDM.

O melhor desempenho do esquema de estimação RLS com matriz purificadora pode ser verificado nas figuras 5-2 e 5-4 onde o erro médio quadrático das estimativas RLS purificadas e não purificadas são apresentadas para um valor de $E_b/N_0 = 13$ dB. Verifica-se que a estimativa inicial no esquema

RLS purificado, para o sistema CP-OFDM e ZP-OFDM, possui um erro médio quadrático $\frac{L}{M}$ vezes menor que o erro médio quadrático da estimativa inicial do esquema RLS não purificado. No caso RLS purificado o erro médio quadrático converge para zero em aproximadamente 20 símbolos enquanto que no caso RLS não purificado o erro médio quadrático não converge para zero ficando um erro residual em ambos os sistemas CP-OFDM e ZP-OFDM.

A fim de se verificar a perda de desempenho caso se utilize o comprimento da faixa de guarda $G = 10$ como estimativa do comprimento de canal quando este é um parâmetro desconhecido em sistemas CP-OFDM e ZP-OFDM, neste caso a matriz \mathbf{W}_0 possui G colunas, são apresentadas curvas para taxa de erro de bit média em função da relação sinal ruído para estimativas pelos esquemas de estimação RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora e o erro médio quadrático das estimativas de canal produzidas pelos esquemas de estimação RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora para os dois sistemas:

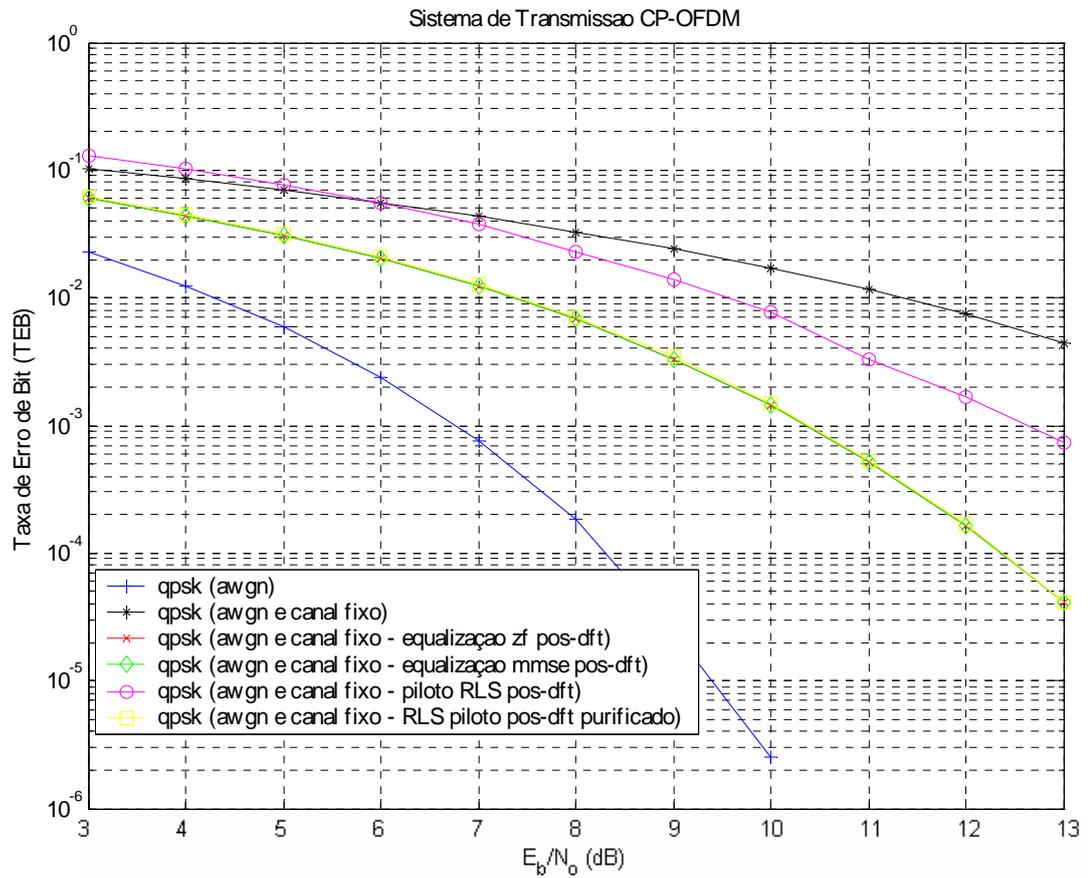


Figura 5.5 – CP-OFDM - Canal Fixo - Estimação de Canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS-comprimento G da faixa de guarda utilizado para estimar o comprimento do canal

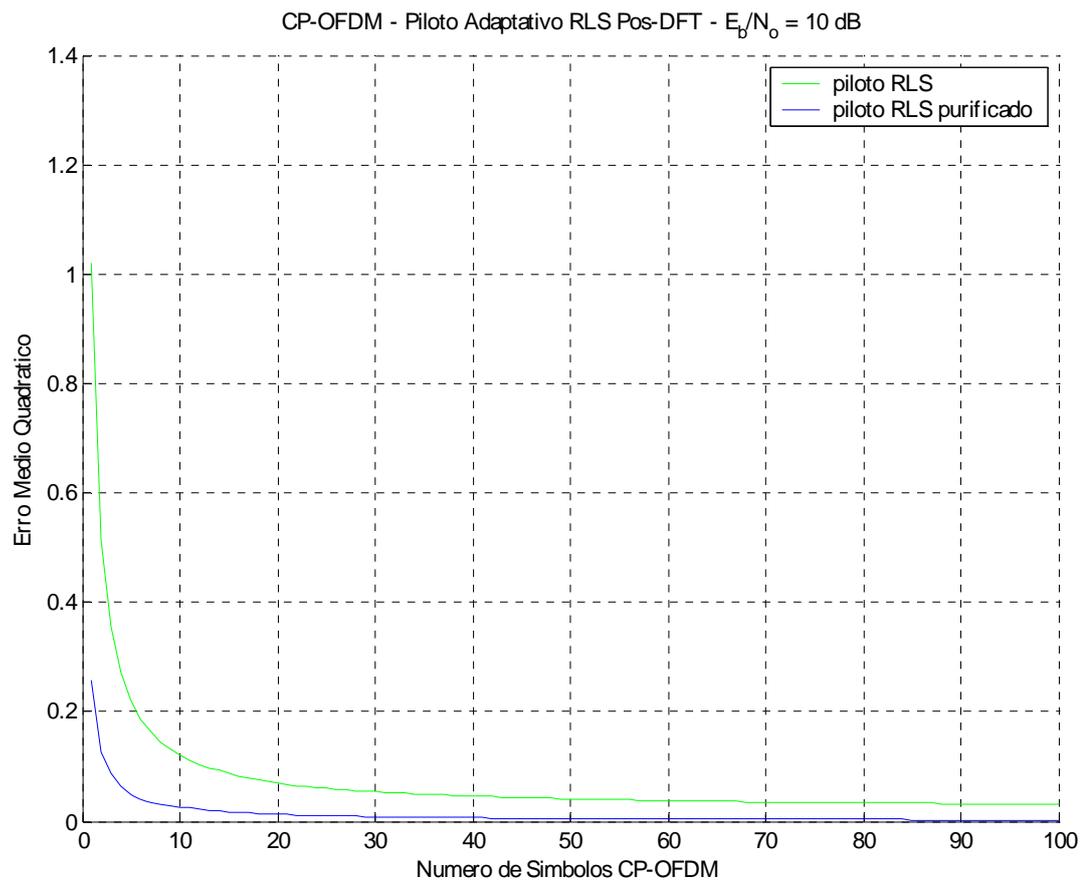


Figura 5.6 – CP-OFDM - Canal Fixo – Erro Médio Quadrático entre as estimativas de canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora

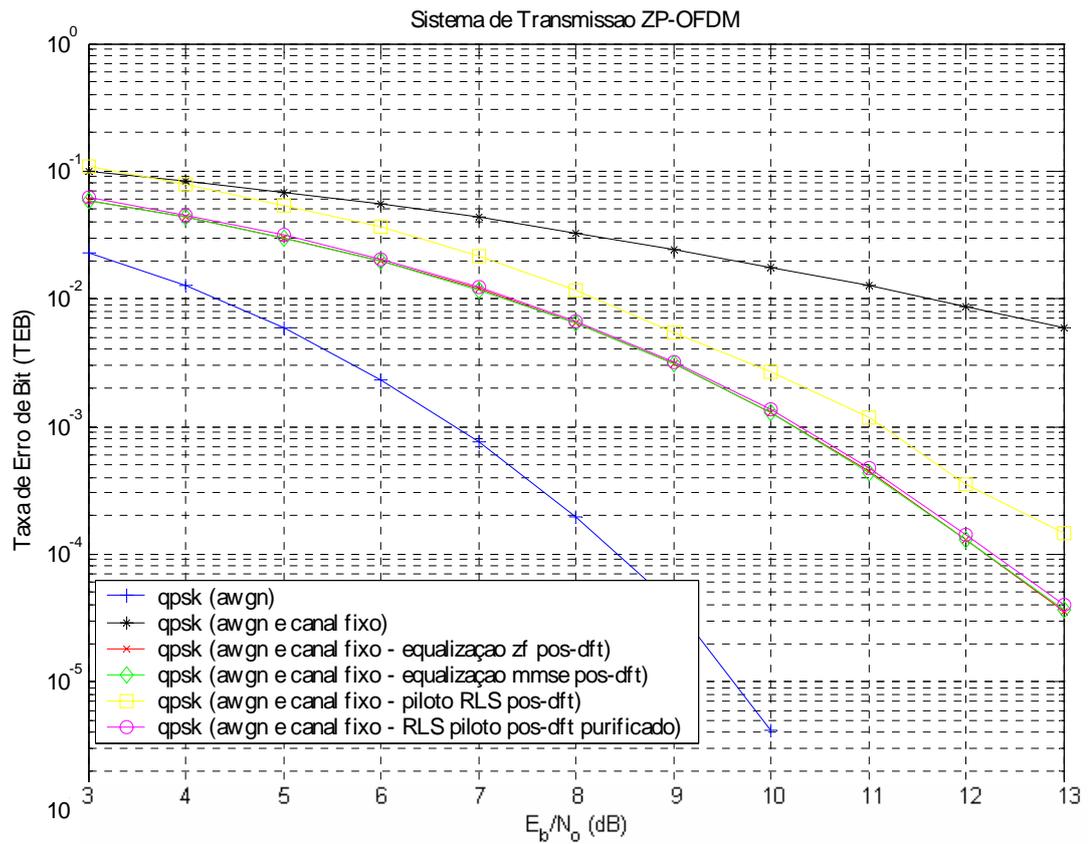


Figura 5.7 – ZP-OFDM - Canal Fixo - Estimação de Canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS-comprimento G da faixa de guarda utilizado para estimar o comprimento do canal

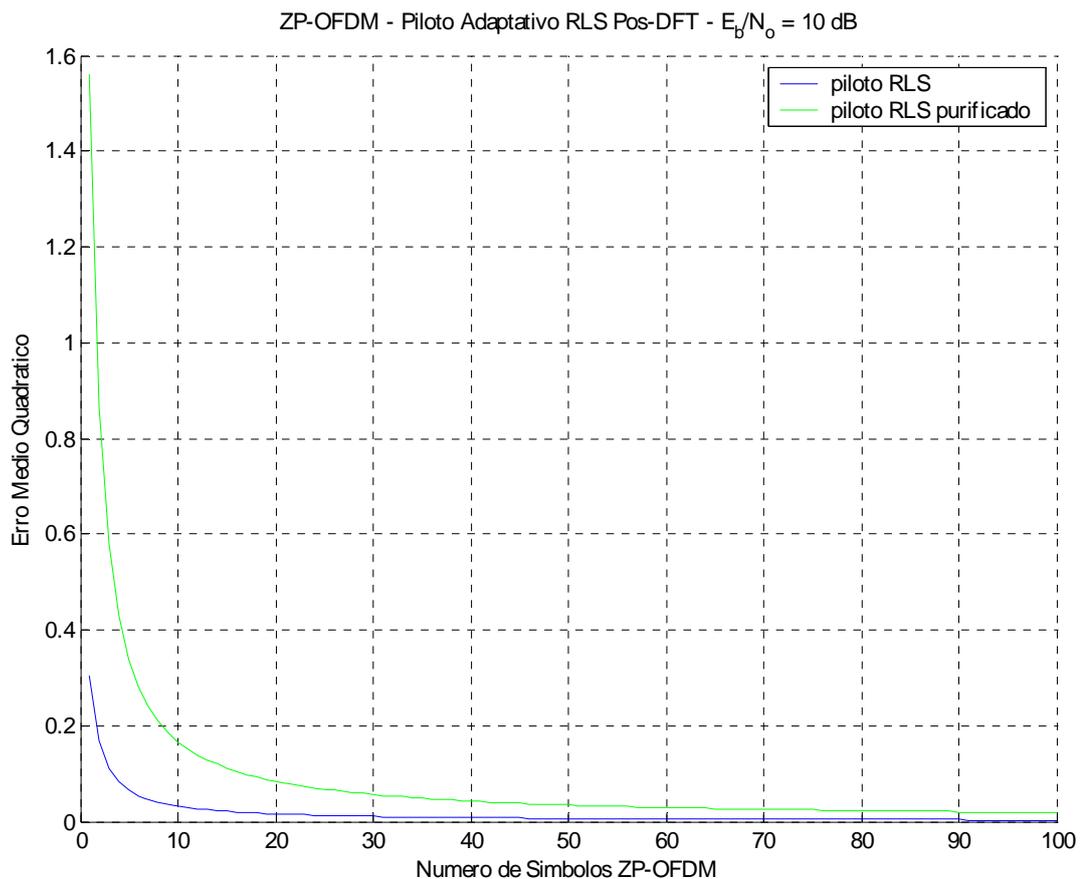


Figura 5.8 – ZP-OFDM - Canal Fixo – Erro Médio Quadrático entre as estimativas de canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora.

A perda de desempenho pode ser verificada através das figuras 5-6 e 5-8 onde são apresentadas os valores de erros médios quadráticos das estimativas RLS purificadas e não purificadas para um $E_b/N_0=13$ dB para os sistemas CP-OFDM e ZP-OFDM respectivamente. Verifica-se que a estimativa inicial no esquema RLS purificado, para o sistema CP-OFDM e ZP-OFDM, possui um erro médio quadrático $\frac{G}{M}$ vezes menor que o erro médio quadrático da estimativa inicial do esquema RLS não purificada. No esquema de estimação com matriz purificada o valor de erro médio quadrático converge para zero em aproximadamente 50 símbolos. No entanto esta perda de desempenho no erro médio quadrático quando se utiliza o comprimento G da faixa de guarda ao invés do comprimento L do canal não é perceptível no desempenho da taxa de erro bit média visto que

observando as curvas de desempenho, nas figuras 5-5 e 5-6, que em ambos os sistemas CP-OFDM e ZP-OFDM as curvas de desempenho utilizando o esquema de estimação RLS de canal com matriz purificadora, são praticamente iguais às curvas dos equalizadores ZF e MMSE onde o canal é conhecido no receptor como no caso anterior onde o comprimento $L = 4$ era conhecido, o que indica que o esquema de estimação de canal RLS utilizando matriz purificadora é pouco sensível a estimativas conservadoras do comprimento do canal.

Assim se o comprimento da faixa de guarda for bem dimensionado, sendo seu comprimento G maior que o comprimento L do canal, a matriz \mathbf{W}_0 pode ser feita com G colunas não sendo necessário o conhecimento a priori do canal.

Na próxima subseção será apresentado o desempenho do esquema de estimação de canal RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora para canais variantes utilizando G como estimativa do comprimento do canal.

5.2.2

Desempenho do esquema de estimação de canal adaptativo RLS nos sistemas CP-OFDM e ZP-OFDM para canal variante

Nesta subseção são apresentados os resultados das simulações para sinais CP-OFDM e ZP-OFDM, em um canal de propagação variante, com as características descritas na sub-seção 3.1.1, onde é descrito que as variações temporais do canal ocorrem somente entre símbolos OFDM, de modo que as características do canal permanecem fixas dentro do intervalo de duração T_{ofdm} do símbolo OFDM. Para se verificar o desempenho do esquema de estimação RLS para diferentes velocidades de desvanecimento do canal são utilizados três valores para $f_d T_{ofdm}$: 10^{-5} , 10^{-4} e 10^{-3} de forma que a velocidade do canal aumenta gradativamente desde o mais lento (10^{-5}) até o mais rápido (10^{-3}). O valor de λ foi ajustado para acompanhar as variações do canal, quanto mais lento o canal mais próximo da unidade deve ser este valor. Para os valores $f_d T_{ofdm} = 10^{-5}$, 10^{-4} e 10^{-3} , os valores de λ utilizados foram 0,99, 0,95 e 0,75 respectivamente, para ambos os sistemas CP-OFDM e ZP-OFDM.

Para o esquema de estimação de canal com matriz purificadora o comprimento do intervalo de guarda G é utilizado como estimativa do

comprimento do canal. Assim a matriz \mathbf{W}_0 possui G colunas para os sistemas CP e ZP-OFDM.

Abaixo são apresentadas curvas para taxa de erro de bit média em função da relação sinal ruído e curvas de erro médio quadrático para estimativas obtidas pelos esquemas de estimação RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora a para os sistemas CP-OFDM e ZP-OFDM:

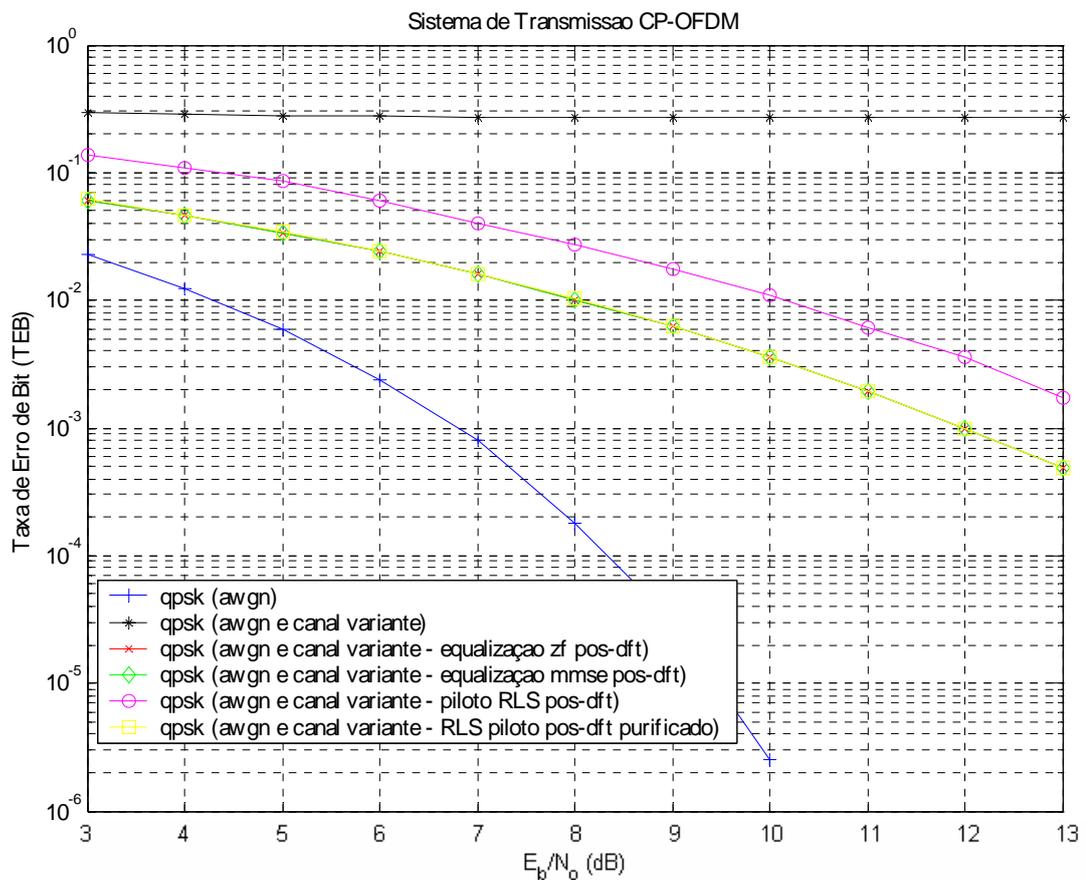


Figura 5.9 – CP-OFDM - Canal Variante $f_d T_{ofdm} = 10^{-5}$ - Estimação de Canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS.

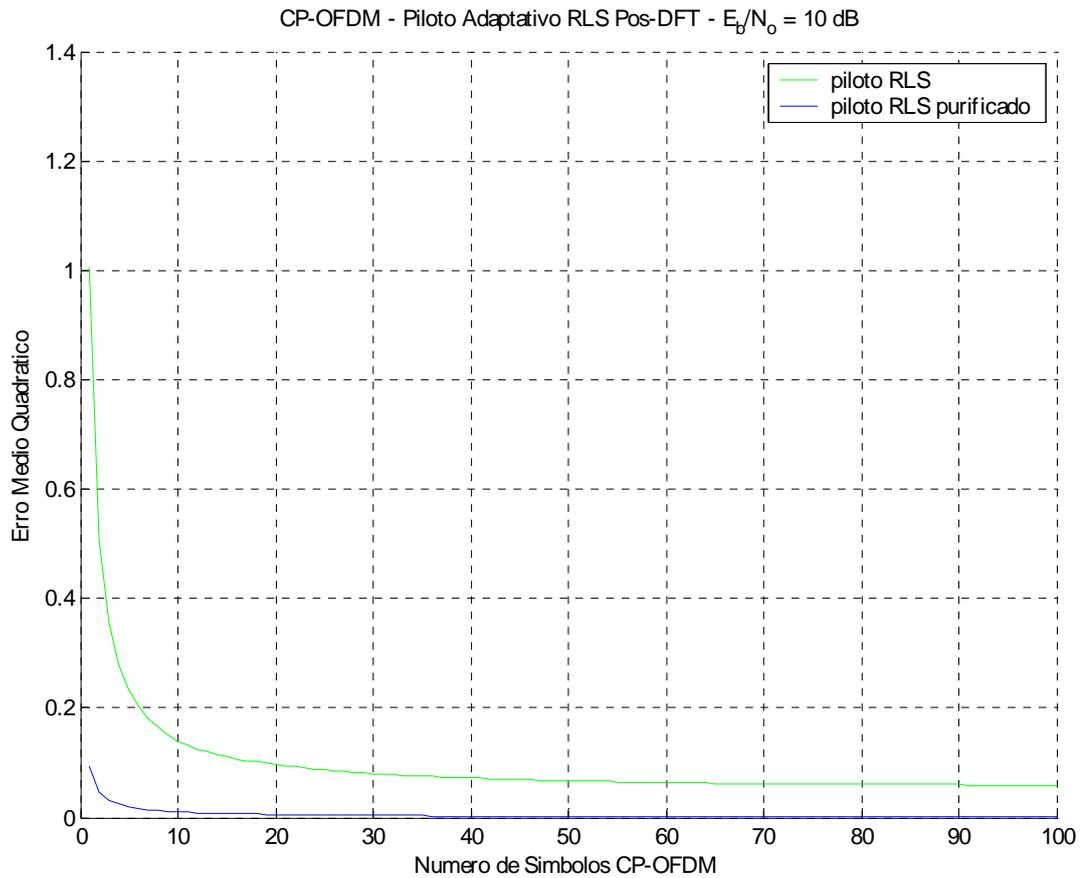


Figura 5.10 – CP-OFDM - Canal Variante $f_d T_{ofdm} = 10^{-5}$ – Erro Médio Quadrático entre as estimativas de canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora

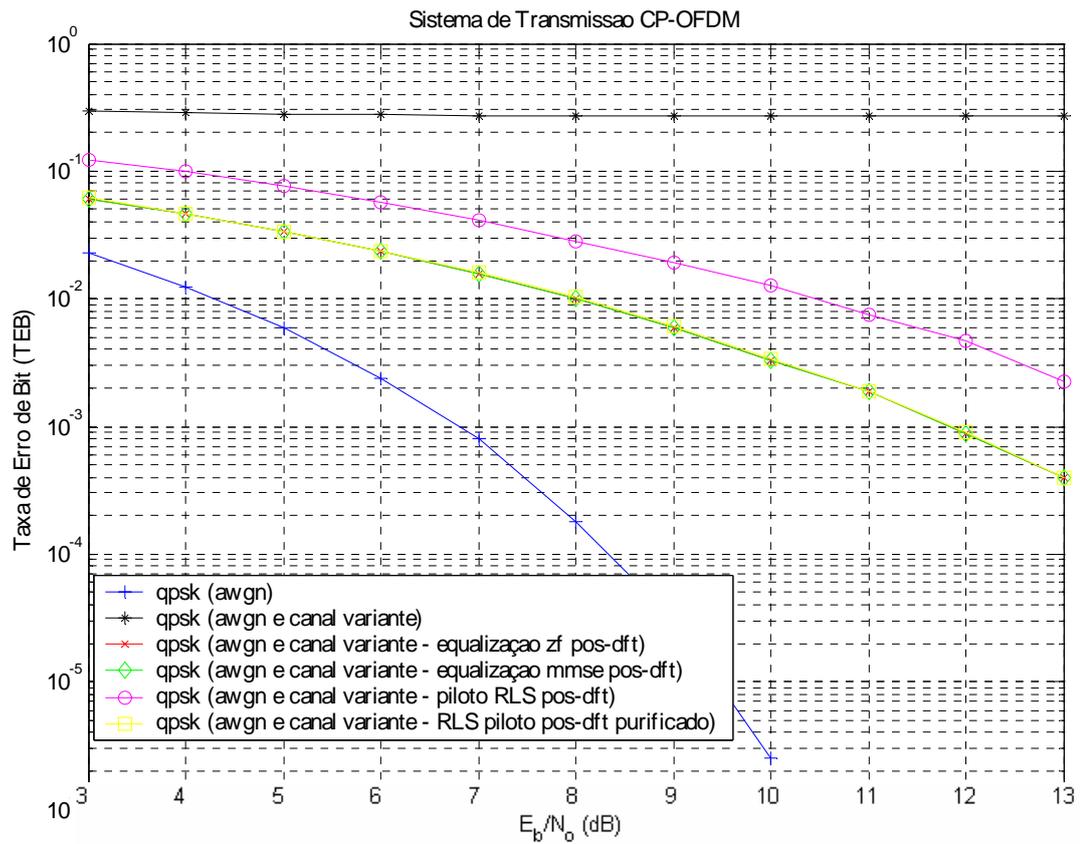


Figura 5.11 – CP-OFDM - Canal Variante $f_d T_{ofdm} = 10^{-4}$ - Estimação de Canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS

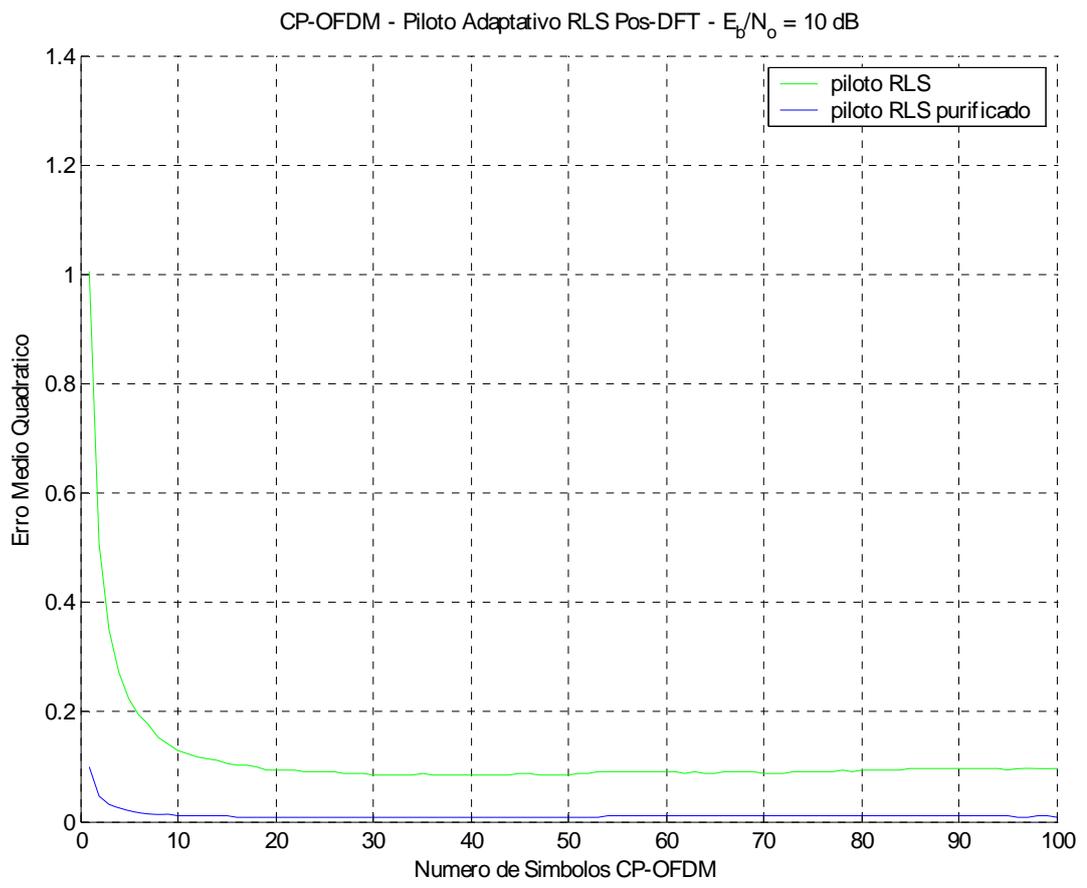


Figura 5.12 – CP-OFDM - Canal Variante $f_d T_{ofdm} = 10^{-4}$ – Erro Médio Quadrático entre as estimativas de canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora

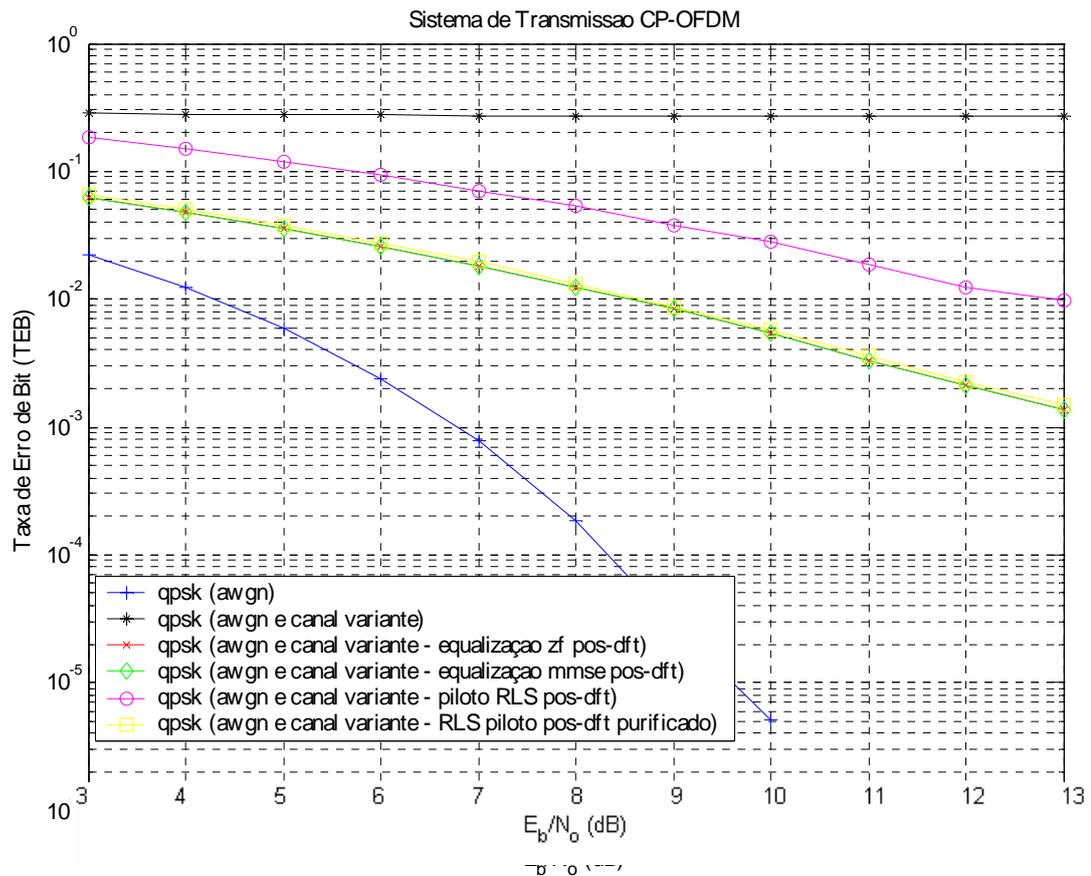


Figura 5.13 – CP-OFDM - Canal Variante $f_d T_{ofdm} = 10^{-3}$ - Estimação de Canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS

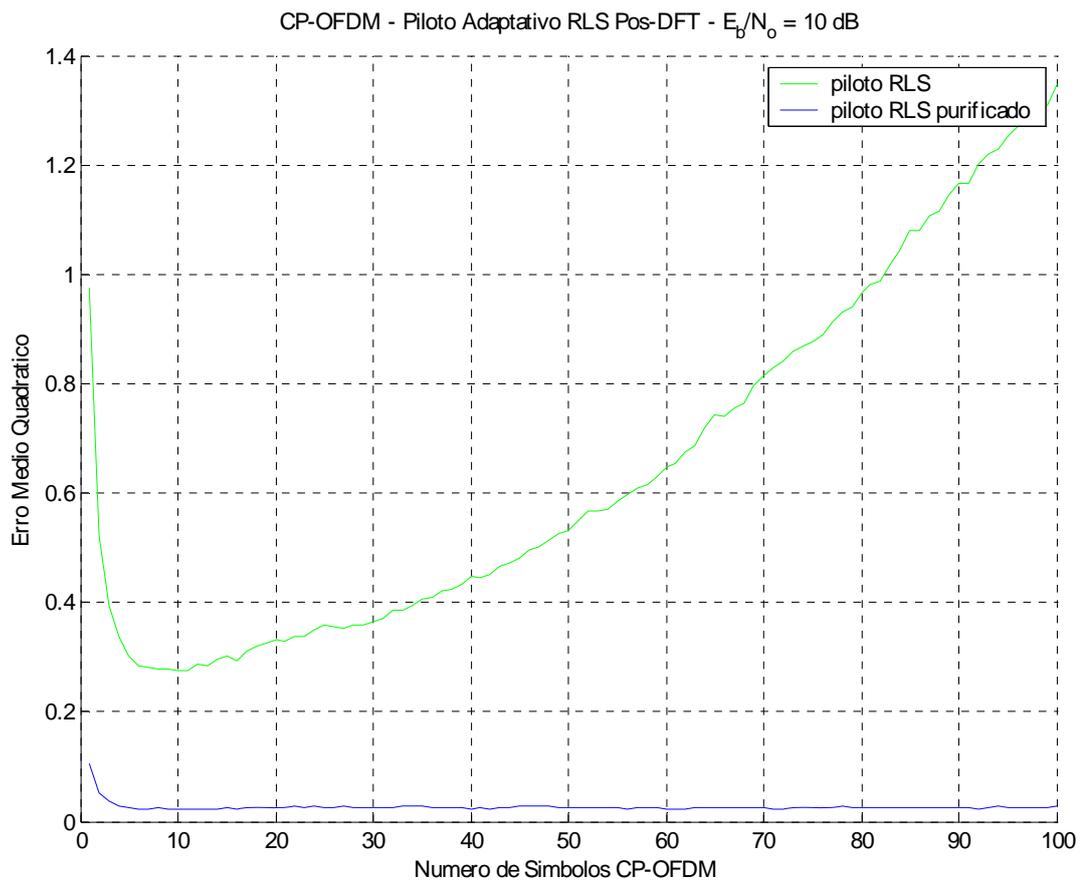


Figura 5.14 – CP-OFDM - Canal Variante $f_d T_{ofdm} = 10^{-3}$ – Erro Médio Quadrático entre as estimativas de canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora

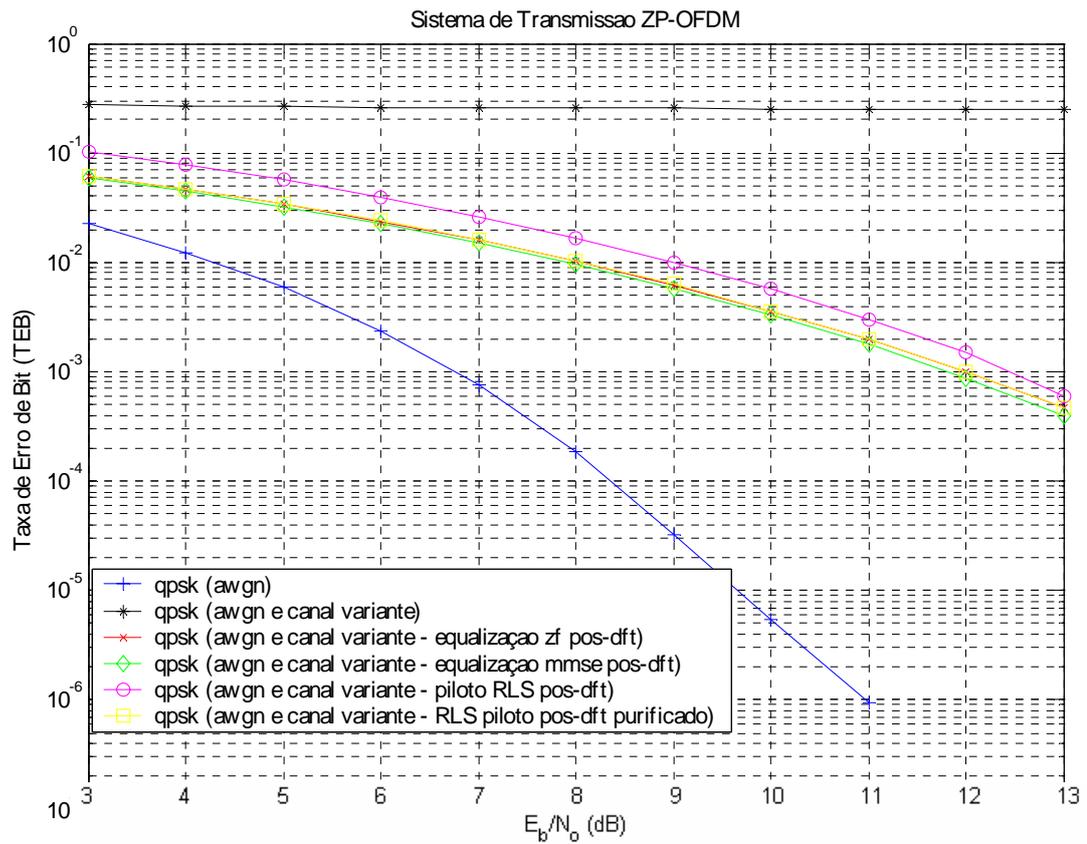


Figura 5.15 – ZP-OFDM - Canal Variante $f_d T_{ofdm} = 10^{-5}$ - Estimação de Canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS

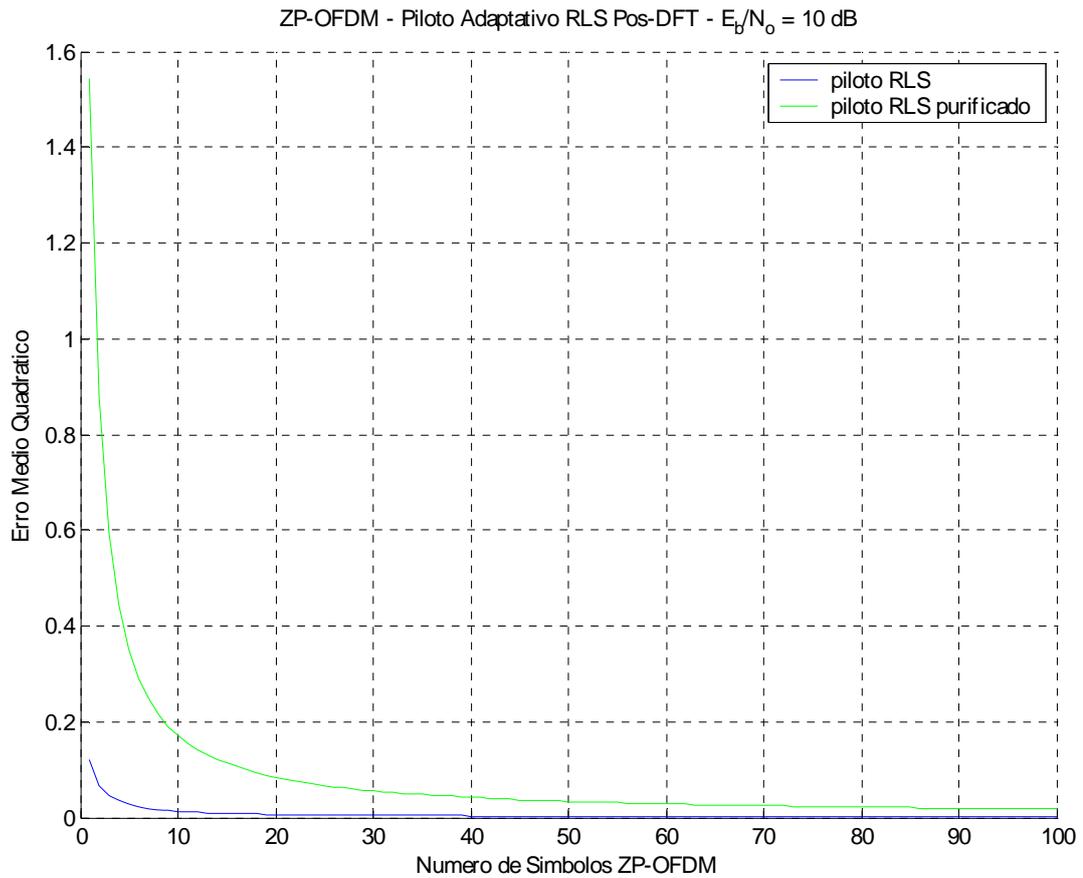


Figura 5.16 – ZP-OFDM - Canal Variante $f_d T_{ofdm} = 10^{-5}$ – Erro Médio Quadrático entre as estimativas de canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora

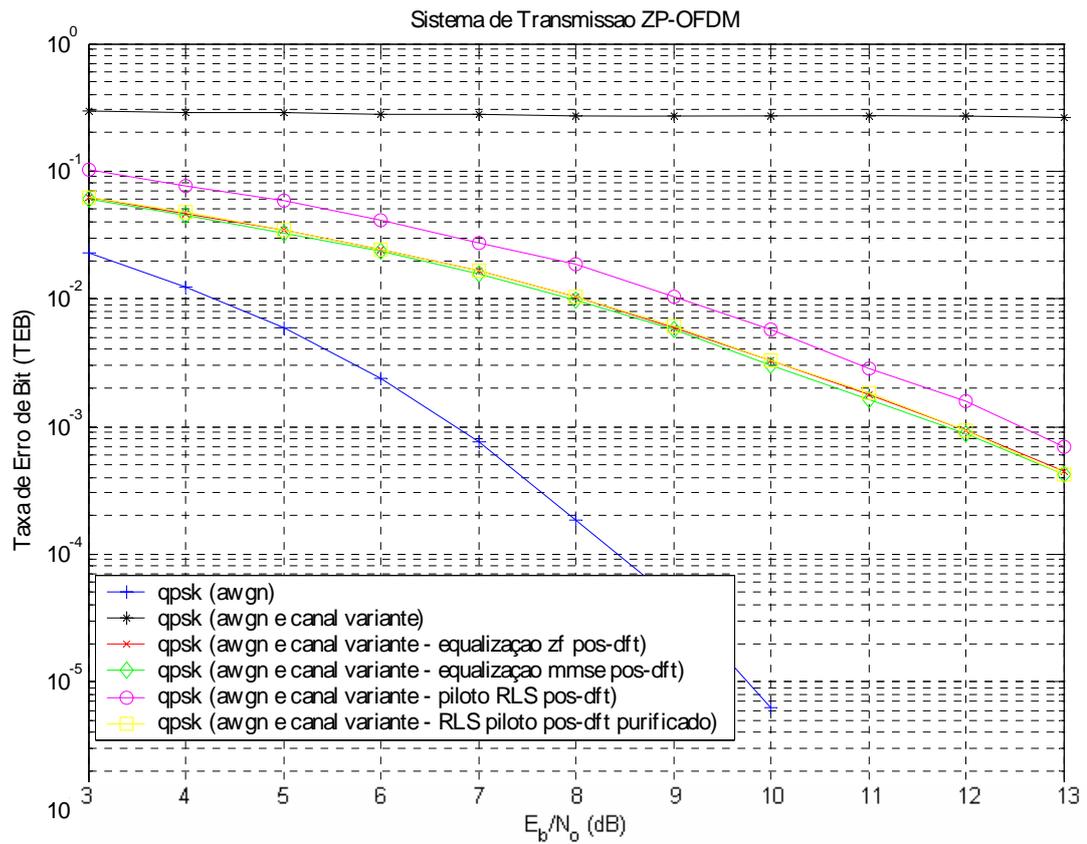


Figura 5.17 – ZP-OFDM - Canal Variante $f_d T_{ofdm} = 10^{-4}$ - Estimação de Canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS

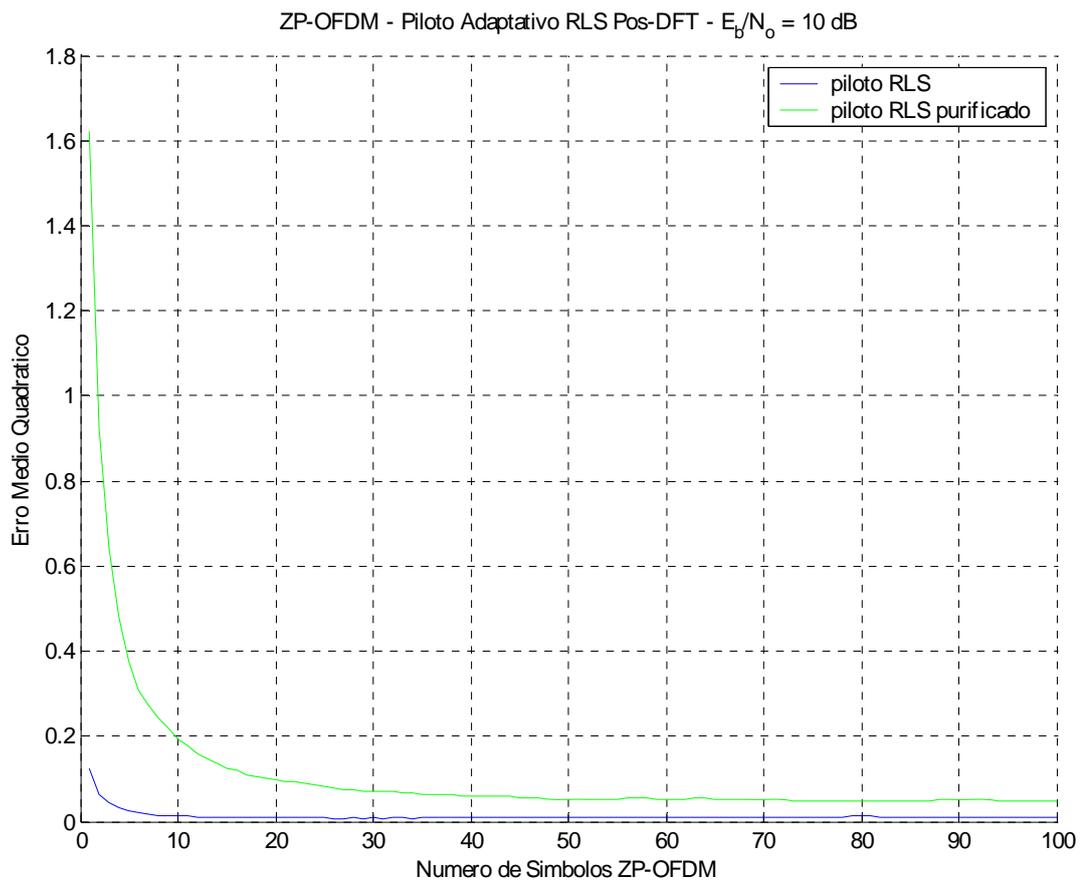


Figura 5.18 – ZP-OFDM - Canal Variante $f_d T_{ofdm} = 10^{-4}$ – Erro Médio Quadrático entre as estimativas de canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora

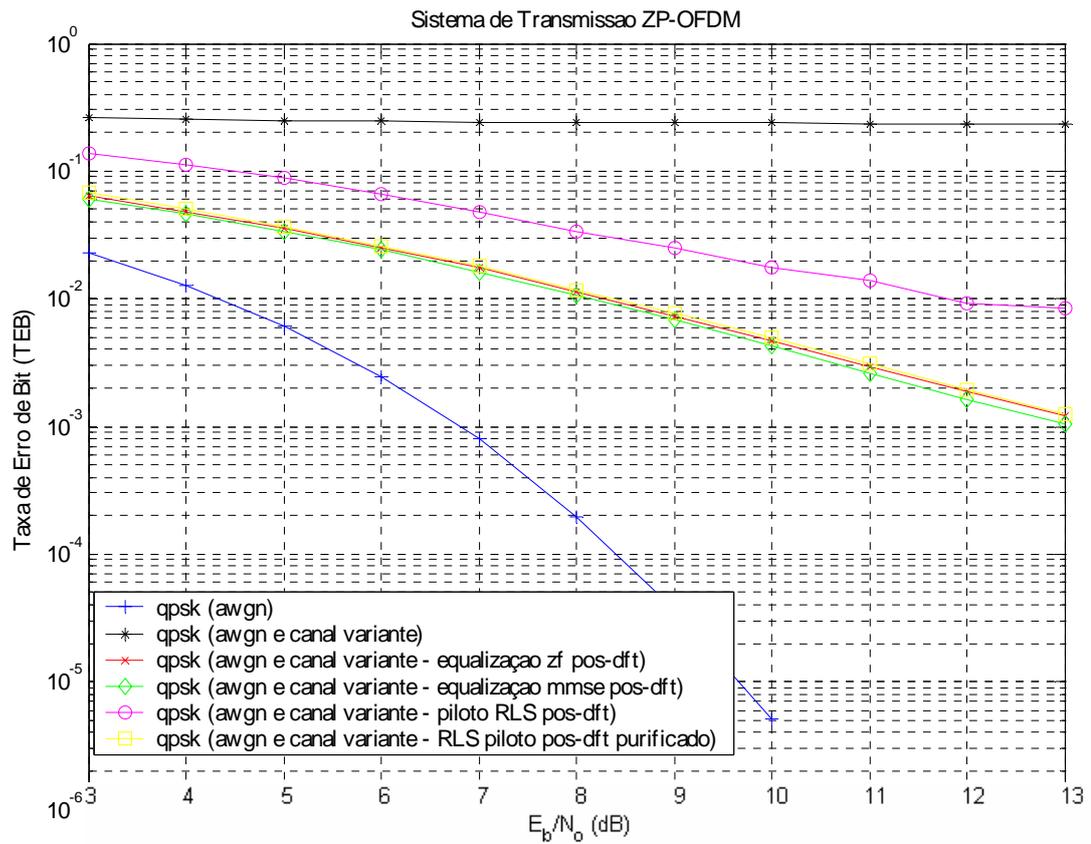


Figura 5.19 – ZP-OFDM - Canal Variante $f_d T_{ofdm} = 10^{-3}$ - Estimação de Canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS

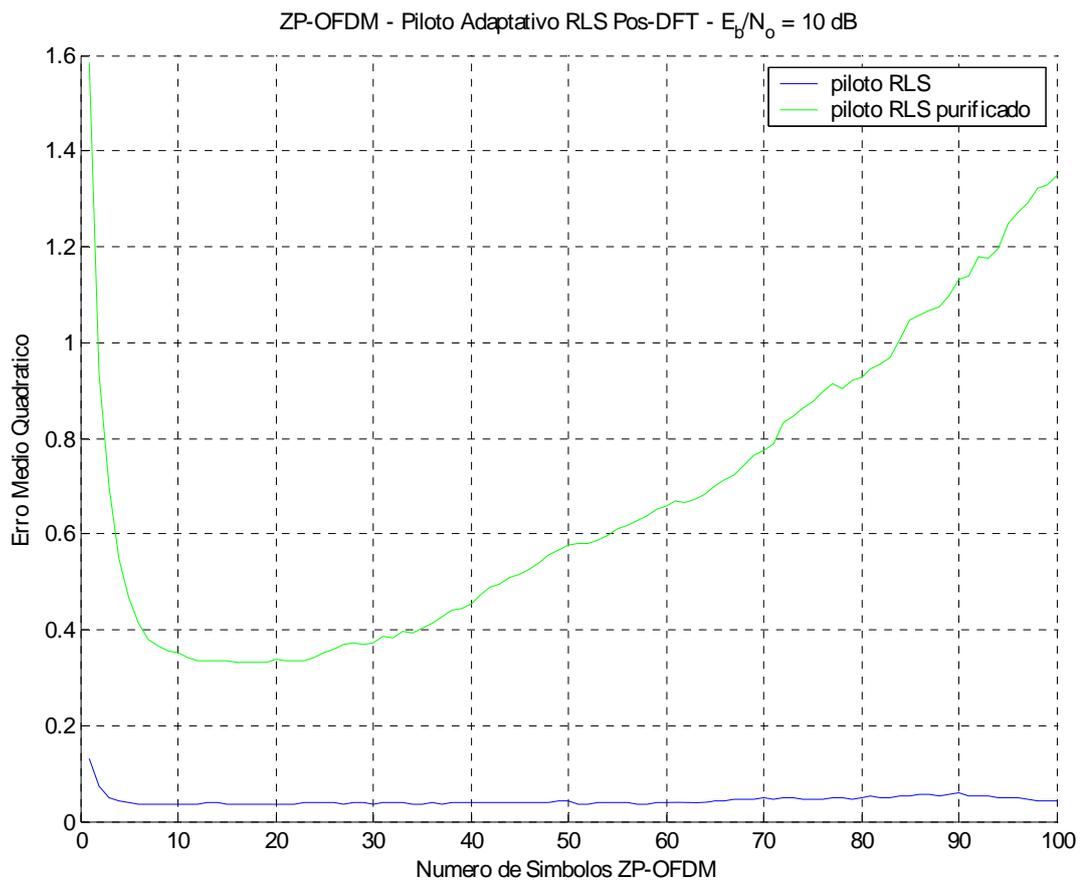


Figura 5.20 – ZP-OFDM - Canal Variante $f_d T_{ofdm} = 10^{-3}$ – Erro Médio Quadrático entre as estimativas de canal com Pilotos utilizando algoritmo RLS com matriz purificadora e sem matriz purificadora

Observando as curvas de desempenho para os sistemas CP-OFDM e ZP-OFDM verifica-se que as curvas de desempenho utilizando o esquema de estimação RLS de canal com matriz purificadora, são praticamente coincidentes com desempenhos das curvas dos equalizadores ZF e MMSE onde o canal é conhecido no receptor. Para os canais mais lentos, $f_d T_{ofdm} = 10^{-5}$ e 10^{-4} , o valor de E_b/N_0 requerido para uma dada probabilidade de erro para o esquema de estimação RLS utilizando matriz purificadora é aproximadamente 2 dB menor que o mesmo esquema de estimação sem matriz purificadora para sistemas CP-OFDM e 1dB menor para sistemas ZP-OFDM mantendo assim a mesma relação observada mesmo no caso de canal fixo. Isto pode ser verificado analisando as curvas de erro médio quadrático para canais variantes mais lentos, $f_d T_{ofdm} = 10^{-5}$ e 10^{-4} . Nestas figuras observa-se que os valores de erro médio quadrático das

estimativas RLS purificadas convergem para aproximadamente zero em 20 símbolos similarmente ao caso de canal fixo e as estimativas RLS não purificadas apresentam um erro residual um pouco maior que no caso do canal fixo. Assim o compromisso de se aumentar a banda do filtro, por meio da redução de λ , para tentar acompanhar as variações da resposta de frequência do canal sem aumentar demasiadamente a variância do ruído da estimativa é melhor atendido pelo esquema de estimação com matriz purificadora.

Isto é mais notável para canais mais rápidos, como o canal com $f_d T_{ofdm} = 10^{-3}$. Observa-se nas figuras 5-13 e 5-19, que as curvas de desempenho utilizando o esquema de estimação de canal com matriz purificadora continuam praticamente coincidentes aos desempenhos das curvas dos equalizadores ZF e MMSE. Porém o E_b/N_o requerido para uma dada probabilidade de erro neste caso para o esquema de estimação utilizando matriz purificadora é aproximadamente 5 dB menor que o esquema sem matriz purificadora para sistemas CP-OFDM e 4dB menor para sistemas ZP-OFDM, aumentando assim a vantagem observada no caso de canal fixo. Isto pode ser verificado através das figuras 5-14 e 5-20, onde os erros médios quadráticos das estimativas purificadas e não purificadas para $f_d T_{ofdm} = 10^{-3}$ estão apresentadas. Nestas figuras observa-se que os valores de erro médio quadrático das estimativas RLS purificadas apresentam um pequeno valor residual de erro após convergência enquanto que para as estimativas não purificadas estes valores não convergem no intervalo de observação utilizado nas simulações. Assim, para canais rápidos o compromisso de se aumentar a banda do filtro, por meio da redução de λ , para tentar acompanhar as variações da resposta de frequência do canal sem aumentar demasiadamente a variância do ruído da estimativa só pode ser atendido pelo esquema que utiliza matriz purificadora.