4
Processos Estocásticos

Um processo estocástico $X = \{X(t), t \in T\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias. Ou seja, para cada t no conjunto de índices T, X(t) é uma variável aleatória. Geralmente t é interpretado como tempo e X(t) é chamado de **estado do processo** no tempo t. Uma realização de X(t) num intervalo de tempo é chamada de amostra de caminho (***sample path***).

Quando o conjunto de índices T é um conjunto contável, temos um processo estocástico em tempo discreto. Se esse conjunto for contínuo, o processo será um processo estocástico contínuo.

Os processos estocásticos podem ser classificados da seguinte maneira:

- Processos estacionários: as propriedades estatísticas, média e variância, da variável são constantes; e
- Processos não estacionários: o valor esperado da variável aleatória pode crescer sem limite e sua variância, T anos à frente, aumenta com T.

Uma definição mais formal poderia ser dada da seguinte forma: um processo estocástico é definido por uma lei de probabilidade de evolução da variável X(t), a variável X a cada tempo t. Ou seja, para os tempos $t_1 \langle\ t_2 \langle\ t_3$, etc., é possível calcular a probabilidade correspondente aos valores x1, x2, x3, etc., estarem em um intervalo específico, por exemplo:

$$\text{prob}\ \left(a_1 \langle\ x_1 \leq b_1, a_2 \langle\ x_2\ \leq x_2, \ldots\right)$$

Sendo assim, quando o tempo t1 chegar e o atual valor de X1 for observado, é possível ter a condição de probabilidade de futuros eventos com essa informação.

Pode-se ver um processo estocástico X(t) como uma previsão de $E[X(t)]$ mais um erro dessa previsão, ou seja:

$$X(t) = E[X(t)] + erro(t)$$

Com isso faz-se necessário calcular para cada processo estocástico sua tendência e sua volatilidade.

4.1. Principais Processos Estocásticos

4.1.1. Processo de Markov

Este é um tipo de processo estocástico onde somente o valor corrente de uma variável é relevante para prever o futuro, a propriedade de Markov nos diz que a distribuição de probabilidades dos preços em qualquer tempo no futuro depende única e exclusivamente do preço atual. Sua vantagem é que ele simplifica a análise de processos estocásticos.

Uma definição mais formal: considere um processo em tempo discreto $\{X_1, X_2, ..., X_t\}$ com distribuição de probabilidade conjunta $F(x_1, x_2, ..., x_t)$. Este processo é considerado de Markov se as suas probabilidades condicionais satisfazem as seguintes propriedades:

$$P(X_{t+S} \leq x_{t+S} / x_t, ..., x_1) = P(X_{t+S} \leq x_{t+S} / x_t)$$

Onde, **P (. /I$_t$)**, representa a probabilidade condicional ao conjunto de informações I_t.

Esse processo é considerado importante para o mercado financeiro, pois neste ambiente considera-se que todas as informações passadas sobre o preço de um determinado ativo estão contidas no valor atual do mesmo. Sendo assim qualquer previsão do futuro será baseada somente no valor corrente do ativo, desconsiderando os valores anteriores.

Será visto que o Random Walk, o AR (1) e o Processo de Wiener são chamados de processo de Markov, pois satisfazem sua propriedade.

4.1.2.
Random Walk

Este é um processo em tempo discreto e estado discreto, nesse tipo de processo X_t é uma variável aleatória e X_0 é conhecida em t=0.

O comportamento se X_t pode ser descrito da seguinte forma: X_t assume saltos de tamanho 1 para cima ou para baixo, sempre com probabilidade 1/2, e estes são independentes entre si.

Como os saltos são independentes pode-se descrever a dinâmica de X_t da seguinte forma:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

Onde ε_t é uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade:

$$\text{prob}\ (\varepsilon_t = 1) = \text{prob}\,(\varepsilon_t = -1) = \frac{1}{2}$$

A distribuição de probabilidade de Xt pode ser encontrada na distribuição binomial. Onde para t passos a probabilidade de se terem n saltos negativos e, consequentemente, t-n saltos positivos é:

$$\binom{t}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{t-n} = \binom{t}{n} 2^{-t}$$

Se $x_0 = 0$ então o valor esperado de X_t é igual à zero, pois a probabilidade de subida e descida é a mesma:

$$E_0(x_t) = 0\,.$$

Podemos verificar pela equação (1) que esse processo satisfaz a propriedade de Markov, pois a distribuição de probabilidade de X_{t+1} depende somente da distribuição de X no tempo t. Por exemplo, se $X_t = 6$, então X_{t+1} só poderá ser 5 ou 7, tendo cada possibilidade iguais chances de ocorrer. Os valores X_{t-1}, X_{t-2}, etc., são irrelevantes uma vez que sabemos X_t.

Uma possível generalização desse processo poderia ser feita alterando os valores de p e q, onde q= 1-p. Caso **p > q**, ter-se-ia um *random walk* com *drift*, e $E_0(x_t)\rangle 0$.

Outra generalização seria fazer com que o tamanho do salto em cada t fosse uma variável aleatória contínua. Caso esse salto tenha uma distribuição normal com média zero e desvio padrão σ, o processo é conhecido como processo estocástico em tempo contínuo e estado discreto, e um exemplo desse tipo de processo será visto a seguir.

4.1.3. Processo Autoregressivo de Primeira Ordem (AR 1)

Esse tipo de processo estocástico é em tempo discreto e variável contínua, e é um processo de Reversão à Média, pois X no longo prazo tende a um valor constante.

A dinâmica de Xt pode ser escrita da seguinte forma:

$$x_t = \delta + \rho x_{t-1} + \xi_t \qquad (2)$$

Onde:

- ρ e ξ são constantes,
- $-1 < \rho < 1$,
- $\xi \sim N(0,1)$.

Pela equação (2) podemos verificar que esse processo satisfaz a propriedade de Markov de maneira similar a que foi vista no processo Random Walk.

O valor esperado de Xt de longo prazo será:

$$E_0(X_n) = \frac{\delta}{1-p}$$

4.1.4.
Processo de Wiener

O Processo de Wiener, também conhecido como Movimento Browniano, é um processo de tempo contínuo e possui 3 propriedades importantes:

- É um processo de Markov (mais adiante será visto o porquê dessa afirmação), assim tudo o que se precisa saber para fazer uma boa previsão do valor futuro da variável é a sua distribuição de probabilidade e o seu valor atual;
- Possui incrementos independentes; e
- Mudanças sobre qualquer intervalo de tempo são normalmente distribuídas, com uma ***variância que aumenta linearmente*** com o intervalo de tempo, ou seja é um processo estocástico não estacionário.

Mais formalmente, seja uma variável aleatória Z que segue um processo de Wiener, então ela possui as seguintes propriedades:

- A relação entre ΔZ e Δt é dada por: $\Delta Z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, onde $\varepsilon_t \sim$ N(0 1); e
- A variável aleatória ε_t não possui correlação serial, ou seja, $E(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, para $t \neq s$. Dessa forma, os valores de ΔZ para quaisquer intervalos diferentes são independentes, de forma que Z(t) segue um processo de Markov.

Dessa propriedade segue que, ΔZ tem distribuição normal com média 0 e variância igual a Δt, ou seja, pode-se concluir que os incrementos seguem uma distribuição normal com os parâmetros, $\Delta Z \sim N(0, \Delta t)$.

Se considerarmos um intervalo de tempo $\Delta t \to 0$, o incremento do processo de Wiener pode ser representado em tempo contínuo:

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} \qquad (3)$$
$$E(dz) = 0$$
$$Var(dz) = dt \quad \Leftrightarrow \quad dz \sim N(0, dt)$$
$$\sigma(dz) = \sqrt{dt}$$

Uma observação importante é o fato desse processo não possuir derivada em relação ao tempo no sentido convencional; ou seja:

$$\frac{\Delta Z}{\Delta t} = dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} = \varepsilon_t (dt)^{-1/2} \rightarrow \text{que tende ao infinito}$$

quando Δt se aproxima de 0

4.1.4.1. Movimento Browniano com Drift ou Movimento de Wiener generalizado (Movimento Aritmético Browniano)

O processo de Wiener Generalizado, também conhecido como Movimento Browniano com drift para uma variável x pode ser definido em termos de dz pela seguinte expressão:

$$dx = \alpha\, dt + \sigma\, dz \qquad (4)$$

Onde:

- dz : é o incremento de Wiener, definido acima;
- α : é a tendência do processo, que representa a certeza, pois surge do produto de dois valores conhecidos (que nesse caso é constante); e
- σ : é a volatilidade do parâmetro, que representa a incerteza, pois resulta da multiplicação de um valor conhecido por um valor aleatório (que também é constante).

A mudança em X, denotada por dx, no intervalo de tempo Δt, é normalmente distribuída e tem $E(\Delta x) = \alpha\, \Delta t$, e a variância é $V(\Delta x) = \sigma^2 \, \Delta t$.

Assim:

$$\Delta x \sim N(\alpha\, \Delta t,\ \sigma \sqrt{\Delta t})$$

4.1.5. Movimento Browniano Generalizado - o Processo de Ito

No Movimento Browniano estudado acima, o α e o σ eram constantes. Porém o que ocorreria caso esses parâmetros não fossem constantes? Como ficaria a média e a variância desse processo?

A generalização do Movimento Browniano é dada pela equação abaixo:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \qquad (5)$$

Onde:

- dz : incremento de Wiener,
- $a(x,t)$ e $b(x,t)$:funções (não-aleatórias) conhecidas.
- a e b: são respectivamente do *drift* e a variância, porém agora são funções do tempo e do estado atuais.

A média e a variância de dx são calculadas a seguir:

$$E(dx) = a(x,t)$$
$$Var(dx) = [b(x,t)]^2 dt$$

Os parâmetros $a(x,t)$ e $b(x,t)$ são respectivamente, a taxa instantânea de crescimento esperada e a taxa instantânea de variância esperada.

4.1.5.1. Movimento Geométrico Browniano (MGB)

É um caso particular de Processo de Ito, geralmente é o processo utilizado para modelar preço de ações, taxas de juros, preços de produtos e outras variáveis financeiras e econômicas.

Uma importante generalização da equação (5) é vista a seguir:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \qquad (6)$$

Onde são α e σ constantes.

Foi visto no processo de Wiener Generalizado que as mudanças em x, dx tem distribuição Normal com parâmetros (α , σ).

No MGB qual será a distribuição de dx?

Dividindo o MGB por x vamos obter o processo de Wiener Generalizado (ou Movimento Aritmético Browniano-MAB):

$$dx = \alpha\, x\, dt + \sigma\, x\, dz$$

$$\frac{dx}{x} = \alpha\ dt + \sigma\ dz$$

$$\frac{\Delta x}{x} \cong \alpha\ \Delta t + \sigma\ \Delta z \qquad (7)$$

Da equação (7) vemos que $\frac{\Delta x}{x}$ segue um MAB e sendo assim tem uma distribuição Normal. Pode-se verificar que:

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\ dx\ = \frac{dx}{x},}$$

Ou seja, $\Delta x/x$ é o incremento de lnx e tem distribuição normal, pois seu processo é um MAB, sendo assim pode-se concluir que se lnx tem distribuição normal, x terá distribuição log-normal.

Se x (t) tem distribuição log-normal, então F(x) = ln x terá uma distribuição normal. Expandindo F por Taylor:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 \quad (8)$$

Onde :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad (9) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \quad (10) \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

Substituindo (9) , (10) e (11) em (8) teremos :

$$dF = \frac{1}{x} dx - \frac{1}{x^2} (dx)^2 \quad (12)$$

Onde : $dx = (\alpha\, x\, dt + \sigma\, x\, dz)$ (13)

Substituindo(13) em (12) :

$$dF = \frac{1}{x} (\alpha\, x\, dt + \sigma\, x\, dz) - \frac{1}{x^2} (\alpha\, x\, dt + \sigma\, x\, dz)^2$$

$$dF = \alpha\, dt + \sigma\, dz - \frac{1}{2x^2} \left(\alpha^2 x^2 dt^2 + 2\, \alpha\, \sigma\, dt\, dz + \sigma^2 x^2 dz^2 \right)$$

$$dF = \alpha\, dt + \sigma\, dz - \frac{1}{2} \sigma^2 dt$$

$$dF = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma\, dz$$

Lembrando que :

$$(dz)^2 = \left(\varepsilon \sqrt{dt}\right)^2 = \varepsilon^2 dt$$

$$Var(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - E^2(\varepsilon) = 1 \qquad \text{Pois } \varepsilon \sim N(0,1)$$

$$E(\varepsilon^2 dt) = dt\ E(\varepsilon^2) = dt$$

$$Var(\varepsilon^2 dt) = dt^2 Var(\varepsilon^2) = 0$$

Considerando o seguinte intervalo de tempo (0, T), fazendo:

- $x(T) = x_T$
- $x(0) = x_0$

Em seguida substituindo no valor de F(x), encontra-se:

$$F(x_t) - F(x_0) \sim N\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, , \sigma^2 T\right]$$

$$F(x_t) \sim N\left[F(x_0) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \ , \sigma^2 T\right]$$

Como: $F(x_t) = \ln x$,

$$\ln x_t \sim N\left[\ln x_0 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, , \sigma^2 T\right]$$

Após algumas substituições de variáveis chega-se ao valor esperado de X_T e a sua variância:

$$E(x_T) = x_0 \ e^{\alpha T}$$

$$Var\ (x_T) = x_0^{\ 2} \ e^{2\alpha T}\left(e^{\sigma^2 T} - 1\right)$$

Uma observação importante é que a variância cresce (sem limites) com o horizonte temporal, ou seja, se $T \rightarrow \infty \Rightarrow Var(x_T) \rightarrow \infty$. E a tendência é exponencial de crescimento ou de queda.

- α : é a tendência do processo (que nesse caso é constante); e
- σ : é a volatilidade do parâmetro (que também é constante).

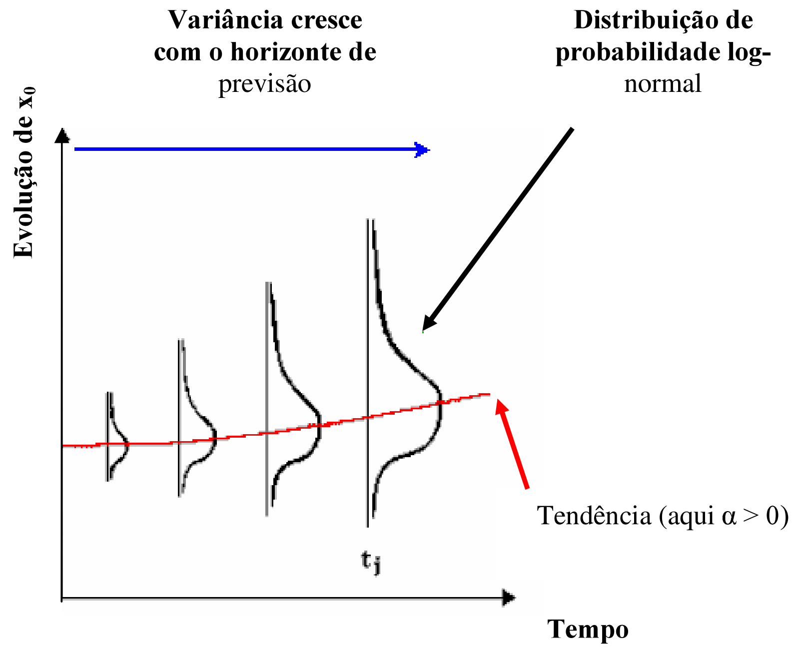

Figura 4.1: Gráfico da variância no Movimento Geométrico Browniano

Vamos ver um exemplo usando uma série de preços de óleo pesado. A série foi dividida em trimestre e compreende o período que vai do 3º trimestre de 1987 até o 2º trimestre de 2006, ou seja, são ao todo 76 dados.

Vamos supor que:

- **α** = tendência = 9% p.a (adiante será visto como calcular esse parâmetro); e
- **σ** = volatilidade = 20% p.a (também será visto adiante como calcular esse parâmetro).

Com esses dados montamos a equação de previsão:

$$\mathrm{E}(x_T) = x_0\, e^{\frac{0{,}09}{4} * T} = \mathrm{x}_0 \left(\mathrm{e}^{0{,}0225}\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{x}_0 (1{,}02275)^T$$

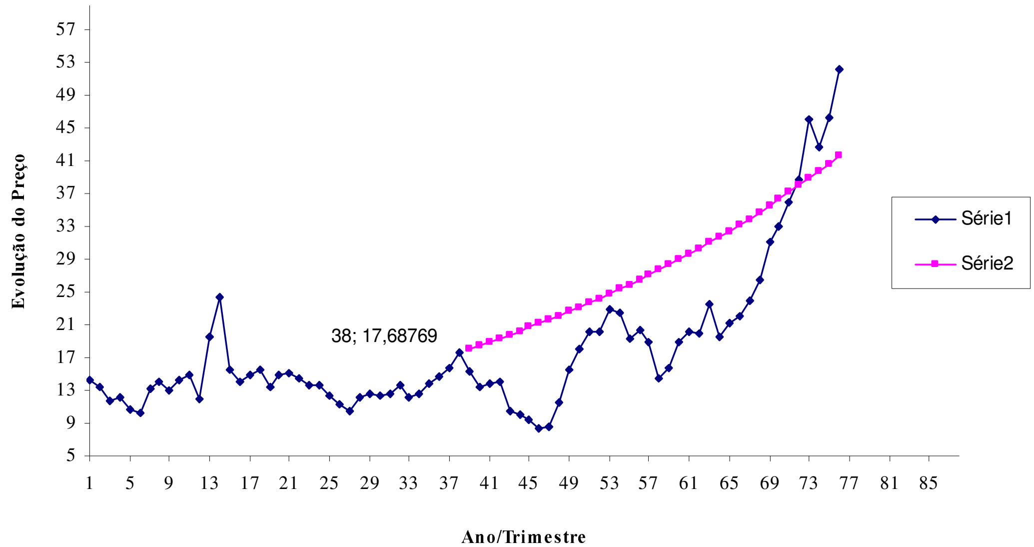

Figura 4.2: Gráfico da série de preços do óleo pesado

Onde:

- A série 1 representa os dados observados e
- A série 2 representa os dados previstos de acordo como MGB.

Pode-se observar como foi dito acima, que os dados previstos apresentam uma tendência exponencial de crescimento.

Uma outra análise importante é a construção do intervalo de confiança para os dados previstos. O tamanho da nossa amostra é igual a 76, sendo assim podemos supor que esta segue uma distribuição Normal.

$$x_{2006/2}\, e^{\alpha t} \pm Z_{5\%} \sqrt{x^2_{2006/2}\, e^{2\alpha t}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)} \qquad (15)$$

$$x_{2006/2}\, e^{\alpha t}\left(1 \pm Z_{5\%} \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}\right) \qquad (16)$$

Porém :

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3} + \dots$$

Fazendo $x = \sigma^{2} t$

$$e^{\sigma^{2} t} = 1 + \sigma^{2} t + \frac{\sigma^{4} t^{2}}{2!} + \frac{\sigma^{6} t^{3}}{3!} + \dots.$$

Consideran do que :

$\sigma \langle 1$e t é pequeno, pode − se ignorar os termos de ordem superior :

$$e^{\sigma^{2}} = 1 + \sigma^{2} t$$

$$e^{\sigma^{2}} - 1 = \sigma^{2} t \qquad (17)$$

Substituin do a (17) na (16) :

$$x_{2006/2} \;\; e^{\alpha t} \left(1 + Z_{5\%} \sqrt{\sigma^{2} t}\right)$$

Passando o σ para fora da raíz :

$$x_{2006/2} \;\; e^{\alpha t} \left(1 \pm Z_{5\%} \; \sigma \sqrt{t}\right) \qquad (18)$$

Atenção :

$$e^{\pm Z_{5\%} \; \sigma \sqrt{t}} = 1 \pm Z_{5\%} \, \sigma \sqrt{t}$$

Substituin do a (19) na (18) :

$$x_{2006/2} \;\; e^{\alpha t} \, e^{\pm Z_{5\%} \; \sigma \sqrt{t}}$$

Sustituind o valores de σ, α e $Z_{5\%}$:

$$x_{2006/2} \;\; e^{\frac{0{,}09}{4} t} \; e^{1{,}96 * 0{,}05 \; \pm \sqrt{t}} \qquad (20)$$

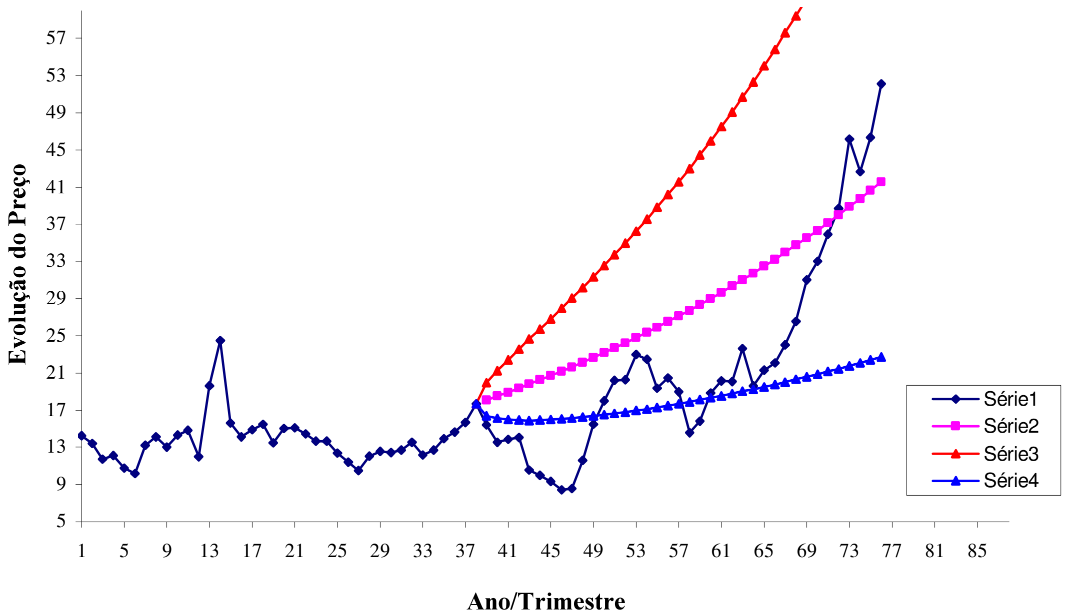

Figura 4.3: Gráfico do Intervalo de Confiança para a série de Óleo Pesado

Onde a série 1 representa os dados observados, a série 2 representa os dados previstos de acordo como MGB, a série 3 representa o limite superior do intervalo de confiança e a série 4 o limite inferior.

4.1.5.2. Processo de Reversão à Média

Pelo MGB visto acima o valor previsto tende a divergir do seu valor original, dado que o processo apresenta uma tendência exponencial de crescimento ou de queda. Existem processos que podem ser modelados por esse movimento, um deles é o preço de ativos especulativos.

A equação que define esse processo é dada por:

$$dx = \eta\,(\bar{x} - x)dt + \sigma\,dz$$

Onde:

- dz: incremento de Wiener;
- η: velocidade de reversão à média, este parâmetro indica a velocidade com que o precesso tende a voltar para o valor médio; e
- $\bar{x}$: nível normal de x (o nível para o qual x tende a reverter).

Este processo também é um processo de Markov, porém não possui incrementos de Wiener (dado que a variância de x depende da diferença ente $\bar{x}$ e x).

O valor esperado de x é:

$$E(x_t) = \bar{x} - (x_0 - \bar{x})e^{-\eta(t-t_0)}$$

A variância é dada pela seguinte equação:

$$Var\,(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta}\left(1 - e^{-2\eta(t_0 - t)}\right)$$

O próximo passo é verificar o que ocorre com a variância e o valor esperado de x quando $t \to \infty$:

$$\lim E(x_T) = \lim\left[\bar{x} - (x_0 - \bar{x})\frac{1}{e^{\eta T}}\right]$$

$$= \bar{x} - (x_0 - \bar{x}) \lim \left[\frac{1}{e^{\eta T}}\right]$$

Quando $: T \to \infty$, $e^{\eta T} \to \infty$ e $(x_0 - \bar{x})\frac{1}{e^{\eta T}} \to 0.$

$$\lim_{T \to \infty} E(x_T) = \bar{x}$$