3
Base Teórica

Visando proporcionar uma base para a compreensão dos fundamentos das metodologias de determinação de preços teóricos de ativos e opções ao longo do tempo, será feita uma revisão de algumas premissas e conceitos matemáticos que foram utilizados como base para o desenvolvimento da análise do projeto.

3.1.
Processos Estocásticos

Na TOR, se considera a natureza estocástica da evolução dos preços, devido à incerteza econômica, através de diferentes **modelos estocásticos**. Do ponto de vista teórico, esse é outro ponto a favor da teoria das opções em relação ao FCD, além dos que já foram apresentados anteriormente.

Um processo estocástico descreve o comportamento de uma variável cujas mudanças são incertas ao longo do tempo, assumindo valores imprevisíveis, ou seja, um processo estocástico envolve **tempo** e **aleatoriedade**. Quanto às suas propriedades estatísticas (média e variância, principalmente), um processo estocástico pode ser classificado como estacionário, quando mantém as mesmas propriedades ao longo do tempo, ou não-estacionário, quando as propriedades mudam ao longo do tempo. Os processos estocásticos podem ser discretos ou contínuos[2], dependendo da variável tempo. Nos processos discretos as variáveis aleatórias podem ser apuradas somente em intervalos de tempo específicos, como a produção de petróleo mensal. Àqueles cujas variáveis podem ser apuradas em qualquer instante do tempo, como a cotação das ações, chama-se de processos contínuos.

[2] Processos de tempo contínuo podem ser aproximados através de processos discretos, cuja modelagem é mais simples.

Um processo estocástico pode ser representado pela Equação 2:

$$X = \{X(t),\, t \in \mathrm{T}\} \qquad (2)$$

Onde $X(t)$ é a variável aleatória X no instante t.

Nos tópicos a seguir serão apresentados os principais processos estocásticos considerados em estudos de OR e suas características.

3.1.1. Processo de Markov

O processo estocástico mais comum para simular o comportamento das variáveis financeiras é o de Markov. Neste processo, não há relação entre o comportamento passado da variável e o comportamento esperado para o futuro. No Processo de Markov somente o valor atual da variável é relevante para predizer a evolução futura do processo, ou seja, um processo de Markov independe do passado. Isso significa que o caminho através do qual a variável atingiu o seu valor atual é irrelevante para a determinação do seu valor futuro.

No processo de Markov a distribuição da probabilidade de preço de um ativo depende exclusivamente do preço atual do mesmo, isso a qualquer tempo futuro. Um exemplo desta propriedade pode ser constatado através da seqüência abaixo:

Sendo $X(t)$ uma variável aleatória, onde t = 0, 1, ..., n. Então para cada valor de t tem-se um valor para X. Por exemplo:

$$X(t_0) = h;\ X(t_1) = l;\ \ldots;\ X(t_n) = j$$

$$Prob(X(t_{n+1}) = k \mid X(t_0) = h,\ X(t_1) = l,\ \ldots,\ X(t_n) = j),$$

Pela propriedade acima,

$$Prob(X(t_{n+1}) = k \mid X(t_n) = j).$$

Um exemplo prático: os preços atuais do petróleo no mercado internacional dependem exclusivamente do preço corrente, ou seja, do preço à vista, e não dos preços passados, mesmo que o preço esteja extremamente depreciado ou altamente elevado, pois se presume que o mercado seja eficiente no sentido de que toda a informação do passado e do presente já esteja refletida no preço à vista do petróleo. Esta propriedade simplifica bastante o tratamento matemático do processo de previsão dos valores de uma variável e será utilizada nas variáveis de *input* e *output* do projeto analisado.

Assume-se que preços de ativos em geral, como ações e *commodities* seguem um processo de Markov, uma vez que as informações públicas são rapidamente absorvidas no valor atual dos ativos. Em finanças, isso é conhecido como eficiência fraca de mercado. Dentro dessa premissa, assume-se que o preço atual de uma ação reflete todas as informações históricas bem como as expectativas a respeito do preço futuro desta ação.

3.1.2. Caminho Aleatório

O Caminho Aleatório é um dos processos estocásticos mais básicos. Os seus passos variam aleatoriamente de direção enquanto que o seu destino final se torna mais incerto com o tempo. É um processo de Markov em tempo discreto que tem incrementos independentes na forma da Equação 3:

$$X_{t+1} = X_t + \varepsilon_t \qquad (3)$$

Onde, X_{t+1} é o valor da variável no tempo $t+1$.

X_t é o valor da variável no tempo t.

ε_t é uma variável aleatória.

ε_i, ε_j são independentes.

O Caminho Aleatório pode incluir um termo de crescimento de longo prazo, ou "*drift*". Sem esse termo de *drift*, a melhor estimativa do próximo valor da variável X_{t+1} é o seu valor atual, uma vez que o termo de erro é normalmente distribuído com média zero. Já com o *drift*, ou crescimento, os valores futuros da variável tendem a crescer.

3.1.3. Processo de Wiener

Um processo de Wiener (*Wt*) é um caso particular de Markov, pois só depende do preço corrente, mas independe da trajetória passada. É uma versão contínua do Caminho Aleatório, e também é conhecido como Movimento Browniano (*Bt*) [3].

Esse processo foi descrito pela primeira vez pelo botânico Robert Brown em 1827, e utilizado na física para descrever o movimento de pequenas partículas sujeitas a um grande número de pequenos choques aleatórios. Este processo tem esse nome em homenagem ao matemático Norbert Wiener, que em 1923 desenvolveu a teoria matemática do Movimento Browniano.

Wt tem incremento descorrelacionados e independentes, ou seja, a variação num Δt é independente da ocorrida em outro Δt, por isso que o processo de Wiener é um caso particular do processo de Markov. Os incrementos têm distribuição normal com parâmetros que só dependem do intervalo de tempo (incrementos estacionários), sem *drift*. Esse processo estocástico tem média zero e variância t (variância aumenta linearmente com o tempo).

Wt é uma *Square Integrable Martingale*, ou seja, *Wt* é uma medida martingale[4] duplamente integrável ($E[(\Delta Wt)^2] \neq \infty$).

Se $z(t)$ é um processo de Wiener, então qualquer incremento Δz num intervalo de tempo Δt satisfaz as seguintes condições:

---

[3] Não há definição com relação à distribuição de *Wt*, por isso poderia se considerar *Wt* mais geral que *Bt*, mas essa idéia está errada. Com base no Teorema de Levy, os dois processos são iguais, o Movimento Browniano é um processo de Wiener e vice-versa.

[4] Um processo estocástico X(t) é martingale sob a medida de probabilidade P, se o valor esperado é o seu valor corrente. Ou seja, $E^P[X(t)]=X(0)$ com t>0. Martingale é um processo estocástico sem tendência.

1. $\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$, onde $\varepsilon_t \sim$ Normal (0,1)

2. $E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0$ para $t \neq s$

Com base no Teorema do Limite Central[5], aplicado à somatória de todos os intervalos de tempo Δt (ou T), pode-se dizer que Δz também segue uma distribuição normal, com média zero e desvio padrão $\sqrt{\Delta t}$. O fato do desvio padrão de Δz depender de $\sqrt{\Delta t}$ e não de Δt, é particularmente importante, pois para um pequeno intervalo Δt, o movimento do desvio-padrão será muito maior que o movimento do termo de tendência, ou seja, se Δt é pequeno, $\sqrt{\Delta t}$ é muito maior que Δt. Isso determina um comportamento serrilhado dos caminhos do processo de Wiener.

3.1.4. Processo Generalizado de Wiener ou Processo Aritmético

O Processo Generalizado de Wiener apresentado na Figura 2, é representado pela Equação 4:

$$dX = a.dt + b.dz \tag{4}$$

Onde X é uma variável que segue o Processo Generalizado de Wiener e os parâmetros do processo representado pelas letras a e b são constantes. A variação infinitesimal de X (dX) é composta por dois termos, sendo o primeiro, uma das constantes (tendência) multiplicada por um intervalo de tempo bem pequeno e o outro termo, sendo resultante do produto da outra constante por um componente aleatório dz (incremento de Wiener), este segundo termo representa o movimento de incerteza de X.

Como dz tem distribuição normal, dX também será normalmente distribuído com média adt e variância b^2dz.

[5] Em teoria das probabilidades, o teorema do limite central estabelece condições segundo as quais a soma de variáveis aleatórias é aproximadamente normal, ou seja, o somatório de N variáveis aleatórias é uma variável aleatória com distribuição gaussiana (ou normal).

Figura 2 – Processo Generalizado de Wiener

Fonte: Hull, 1997.

3.1.5.
Processo de Itô ou Processo Browniano Generalizado

O Processo de Itô é um Processo Generalizado de Wiener, pois o *drift* e a volatilidade deste processo estocástico, μ e σ**,** são funções da variável básica X e do tempo t. Um processo de Itô é um caso especial de uma classe mais geral chamado de "*processo de difusão forte*" que é uma classe particular em tempo contínuo de Markov e pode ser representado pela Equação 5:

$$dX = \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dz \tag{5}$$

Onde X = variável aleatória no instante t;

μ = *drift* ou a tendência instantânea do processo de Itô;

dt = variação instantânea de tempo;

σ = desvio-padrão estimado de dX no instante t;

dz = incremento de Wiener.

A variação infinitesimal ocorrida em X durante um intervalo de tempo dt é devido a um termo de valor esperado (1º termo), também chamado de tendência, e de um termo (o segundo) aleatório, proporcional ao incremento aleatório de Wiener dz. O incremento de Wiener dz é não-tendencioso (média zero) e tem variância dt, e não é diferenciável em relação ao tempo.

Com uma fórmula de cálculo semelhante a realizada para o processo de Wiener Generalizado, pode-se facilmente obter o valor esperado de dX que é igual a $\mu\,(X, t)$. dt e sua variância que é $\sigma^2\,(X, t)$. dz.

Uma das dificuldades deste processo é não possuir uma derivada convencional em relação ao tempo, ou seja, que não pode ser manipulada usando-se as regras ordinárias de cálculo. Para isto é usado o Lema de Itô, que será apresentado mais adiante.

3.1.6. Movimento Geométrico Browniano (MGB)

O MGB, um caso particular do Processo de Itô, é o processo mais utilizado no mercado para modelar o comportamento de preço de ações, de preço de mercadorias e de outras variáveis financeiras e econômicas.

Apesar de em muitos casos o MGB não se apresentar como melhor opção, este é o mais utilizado dos processos estocásticos, tanto na teoria de finanças quanto em aplicações econômicas práticas, devido a sua simplicidade de utilização e principalmente pela sua fácil compreensão.

A Equação 6 para o valor de uma variável X, que segue o MGB é igual ao do Processo de Itô com algumas substituições. Assim, a equação do MGB é, por definição:

$$dX = \alpha X dt + \sigma X dz \tag{6}$$

Com as seguintes características:

$$E[X(t)] = X_0 \,.\, e^{\alpha t} \qquad (7)$$

$$Var[X(t)] = X_0^2 \,.\, e^{2\alpha t}\,(e^{\sigma^2 t} - 1) \qquad (8)$$

Espera-se que X cresça exponencialmente à taxa α e que tenha uma distribuição lognormal. Já a variância quando o tempo t tende a infinito, ela também tende a infinito, ou seja, a variância cresce com o horizonte do tempo. Isso pode ser observado na Figura 3.

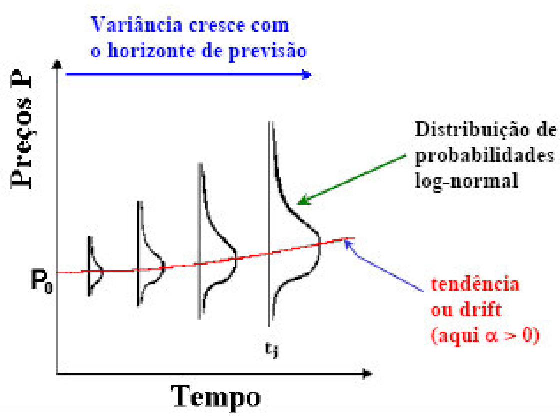

Figura 3 – Variância Crescente de um MGB

Fonte: Sítio da internet - http://www.puc-rio.br/marco.ind/

Nesse processo a variável estocástica X não pode assumir valores menores que zero, por exemplo, na hipótese de que valor de X caia até zero, o valor de dX fica igual a zero e acaba o processo estocástico. Por isso, o MGB é o mais utilizado para modelar preços.

3.1.7. Movimento de Reversão à Média (MRM)

O MGB tende a divergir do seu ponto de partida inicial com o decorrer do tempo. Essa propriedade pode ser desejada para algumas variáveis econômicas, como por exemplo, no caso dos preços de ações. Em outros casos, como o preço de *commodities*, esta propriedade não é interessante. Em se tratando de mercadorias, como petróleo e diesel, os seus preços no longo prazo tenderão a estar relacionado com o custo marginal de produção. A curto prazo esses preços podem variar aleatoriamente, num prazo mais longo eles tendem a retornar para o nível próximo ao seu custo marginal, este processo é denominado MRM.

O MRM aritmético é também chamado de *Ornstein-Uhlembeck e* é representado pela Equação 9:

$$dX = \eta(\overline{X} - X)dt + \sigma dz \tag{9}$$

onde, η = velocidade da reversão;

$\overline{X}$ = nível de equilíbrio ou média de longo prazo;

σ = volatilidade;

dz = incremento de Wiener.

Como defende Dias, na equação acima é comum modelar os preços P com reversão usando relações como x = ln(P) para evitar preços menores do que zero. E isso será adotado nesta dissertação ao simular os preços.

O MRM é um processo de Markov, apesar de seus incrementos não serem independentes. Observa-se que o valor esperado dos incrementos em X depende da diferença entre $\overline{X}$ e X. Além disso, quanto mais distante estiver X de seu valor médio $\overline{X}$, maior será a probabilidade de a variável retornar em direção ao seu nível de equilíbrio.

Uma outra medida da velocidade de reversão é o conceito de meia-vida da reversão H, que fornece uma medida de lentidão do processo. Meia vida é o tempo que a variável leva para percorrer a metade do caminho entre o seu valor corrente e a média de longo prazo. A relação entre a velocidade de reversão η e a meia vida H para o logaritmo de P é H=ln(2)/η.

As propriedades estatísticas do processo de reversão à média são[6]:

$$E[X_t] = \overline{X} + (X_0 - \overline{X})e^{-\eta t} \qquad (10)$$

$$Var[X_t - \overline{X}] = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t}) \qquad (11)$$

Analisando as características acima, pode-se observar que para valores altos da velocidade de reversão ($\eta \to \infty$) a variância do processo tende a zero, o que significa que X nunca se desviaria de $\overline{X}$. Analisando contrariamente, se a velocidade de reversão tendesse a zero ($\eta \to 0$), a expressão para a variância se resumiria a $\sigma^2 t$, o que corresponde à variância do MGB. Sendo assim, a variância de um MRM tende a crescer inicialmente e depois se estabilizar como pode ser visto na Figura 4 a seguir que mostra graficamente um exemplo típico de um processo de reversão à média. As variâncias de t_i, t_j, t_k são iguais, ou seja, se estabilizou após t_i.

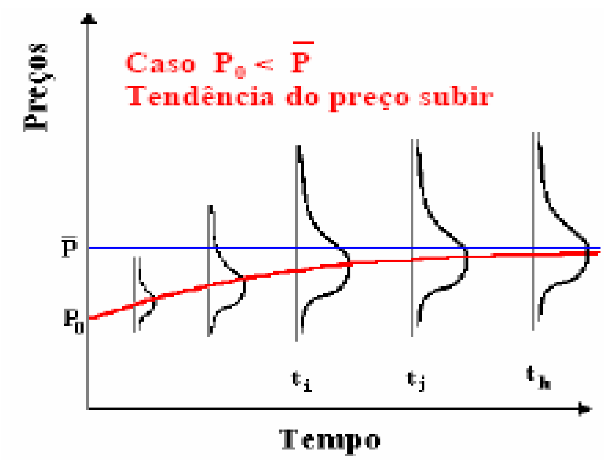

Figura 4 – MRM com tendência

Fonte: Sítio da internet - http://www.puc-rio.br/marco.ind/revers.html

---

[6] O método para obter os momentos probabilísticos de processos estocásticos é através da equação diferencial de densidade de probabilidade ou equação de Komolgorov. No apêndice do capítulo 3 do Dixit&Pindyck mostra como chegar na média e na variância através da equação diferencial de Komolgorov.

3.1.8. Processo de Poisson

Até agora o foco foi em processos estocásticos em tempo contínuo. Porém, em determinadas circunstâncias, pode ser mais realista considerar que uma variável econômica segue um processo com saltos discretos em tempo contínuo. A entrada de um novo competidor num mercado com poucos participantes, por exemplo, pode provocar um movimento brusco na evolução dos preços. Esse processo é chamado de Poisson onde as informações de mercado consideradas "normais" causam um processo de reversão à média contínua nos preços. Por outro lado, as informações consideradas "anormais" provocam saltos (discretos) de tamanho aleatório.

Um processo de Poisson simples é definido pela Equação 12:

$$dX = f(X,t)dt + g(X,t)dq \tag{12}$$

Onde, dq é o incremento aleatório, podendo assumir o valor zero (valor assumido a maior parte do tempo) ou o valor de um salto de amplitude φ (tamanho do reajuste), que ocorre com probabilidade λdt, onde λ é a freqüência do processo. O valor de φ pode ser estocástico (correlacionado ou não a X) ou determinístico.

Essa explicação sobre o incremento dq fica mais bem definida com as expressões abaixo:

$dq = 0$ com probabilidade (1 - λdt)

$dq = \varphi$ com probabilidade λdt

Em alguns casos, os processos estocásticos podem ser mistos. O preço de um determinado ativo pode evoluir continuamente segundo o MGB ou MRM na maior parte do tempo, mas eventualmente pode sofrer grandes oscilações instantâneas em decorrência de eventos raros. Esses saltos podem ser decorrentes de guerras e revoluções, como devido a ações de cartéis. O processo misto chamado de difusão com saltos é representado pela Equação 13:

$$dx = f(x,t)dt + g(x,t)dz + h(x,t)dq \qquad (13)$$

Onde dz é um incremento de Wiener e dq um incremento de Poisson. Destaca-se o fato de ambos serem independentes.

Nos últimos trinta anos, o mercado de petróleo teve saltos na sua cotação, o que caracterizaria bem um Processo de Poisson. Esse grande aumento ou redução repentina de preço veio em decorrência de alguns acontecimentos de natureza política ou econômica, que introduziram incertezas na relação entre oferta e demanda no cenário mundial. A Figura 5 ajuda a visualizar melhor esse processo de difusão com saltos.

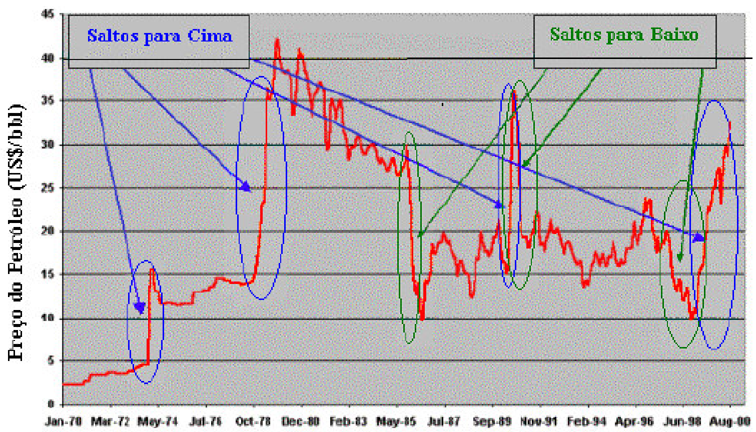

Figura 5 – Mercado de petróleo com saltos

Fonte: Sítio da internet - www.puc-rio.br/marco.ind

Nas aplicações para o preço do petróleo, o processo de difusão com saltos ganha destaque, principalmente quando associado à reversão à média (processo contínuo). Esse processo de difusão com saltos descreve melhor a realidade do ponto de vista estatístico, pois explica os fenômenos empíricos como assimetria de retornos e do ponto de vista econômico faz com que os saltos evitem o excesso de previsibilidade.

Para modelar o processo de reversão à média com *jumps*, se junta o modelo de *Ornstein-Uhlembeck*, apresentado anteriormente, com o termo dos saltos aleatórios:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz + \varphi\ dq \tag{14}$$

Essa equação mostra uma força de reversão η sobre a variável x, e os saltos quando ocorrem são de tamanho aleatório φ e taxa de ocorrência λ. O valor esperado e a variância de x(t) neste processo são dados através das expressões do MRM, porém com a adição no termo de variância que representa a presença dos eventos aleatórios. Se o valor esperado dos saltos é zero (distribuição simétrica para saltos para baixo e saltos para cima) restou:

$$E(x_t) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x}) * e^{-\eta * t} \tag{15}$$

$$Var[x - \bar{x}] = \frac{(\sigma^2 + \lambda * \mathrm{E}[\varphi^2])}{2\eta} * (1 - e^{-2*\eta*t}) \tag{16}$$

Esse processo também tem desvantagens, pois com a existência de saltos, não é possível construir uma carteira livre de risco, a não ser que o risco dos saltos tenha prêmio de risco zero, o que não parece muito razoável. Além disso, a quantidade de parâmetros a serem estimados irá aumentar e alguns deles são difíceis de serem estimados.

3.1.9. Lema de Itô

O nome Lema de Itô foi em homenagem ao matemático Kiyoshi Itô que chegou em 1951 a resultados importantes. Processos de Itô, bem como processos de Wiener, são processos estocásticos em tempo contínuo, porém não são diferenciáveis. Para resolver esta problemática é necessário utilizar o Lema de Itô, ou como também conhecido, o Teorema Fundamental do Cálculo Estocástico.

O Lema de Itô pode ser entendido como uma versão da Expansão de Taylor para o cálculo estocástico. Para ilustrar sua utilidade prática será considerada uma variável X que siga o processo de Itô, na Equação 17:

$$dX = a(X,t)dt + b(X,t)dz \tag{17}$$

$$Onde, \quad dz = \varepsilon\sqrt{dt}$$

$$\varepsilon \sim N(0,1)$$

Assim,

$$dX = a(X,t)dt + b(X,t)\varepsilon\sqrt{dt} \tag{18}$$

O Lema de Itô mostra que uma função, G, de X e t segue o processo:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial X}dX + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2}dX^2 \tag{19}$$

E utilizando-se a Expansão de Taylor, é possível calcular a diferencial da função G com base na equação do Lema de Itô como mostra a Equação 20:

$$dG = \left[\frac{\partial G}{\partial t} + a(X,t)\frac{\partial G}{\partial X}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2}b^2(X,t)\right]dt + b(X,t)\frac{\partial G}{\partial X}dz \tag{20}$$

3.2. Técnicas de Otimização Dinâmica sob Incerteza

De maneira geral, podem-se destacar duas principais técnicas matemáticas de modelagem de decisões de investimento em regime de incerteza: programação dinâmica e análise de direitos contingenciais. Ambos estão intimamente relacionados e levam à resultados idênticos em várias situações, mas partem de pressupostos diferentes quanto ao mercado financeiro e às taxas de desconto que as firmas usam para descontar seus fluxos de caixa. Na programação dinâmica a taxa de desconto exigida pelo ativo é a taxa de retorno ajustada ao risco, na análise de ativos contingenciais usa-se a taxa livre de risco obtida junto ao mercado de capitais.

3.2.1. Programação Dinâmica

A programação dinâmica é uma ferramenta muito usada em problemas de otimização dinâmica, e é útil para o tratamento de incertezas. Basicamente, a programação dinâmica divide a seqüência de decisões em duas partes: uma decisão imediata e uma função de valoração que engloba os resultados das decisões subseqüentes. No caso de o horizonte planejado ser finito, a última tomada de decisão pode ser realizada usando-se técnicas tradicionais de otimização estática. Essa solução fornece uma função de avaliação para a penúltima decisão. Esse processo é repetido sucessivamente, até se chegar à decisão inicial (processo *backward*). Se o horizonte de planejamento é infinito, o que parece dificultar os cálculos simplifica-se pelo fato de que cada decisão tomada leva a um outro problema semelhante ao original.

A essência da programação dinâmica aplicada à OR pode ser representada pela Equação 21:

$$F_t(x_t) = \max_{u_t}\left\{\pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t\left[F_{t+1}(x_{t+1})\right]\right\} \tag{21}$$

Onde, x_t = variável de estado no instante t;

u_t = variável de decisão no instante t (investir ou esperar, por exemplo);

ρ = taxa de desconto (exógena ao projeto);

$F_t(x_t)$ = valor da oportunidade de investimento no instante t;

$\pi_t(x_t, u_t)$ = lucro imediato no instante t;

$E_t\left[F_{t+1}(x_{t+1})\right]$ = valor esperado, na data t, dos fluxos de caixa futuros a partir do instante $t + 1$ (valor de continuação).

Analisando a equação, o primeiro termo representa a parcela de lucro imediato, enquanto que o segundo termo constitui o valor de continuação. A ação ótima no instante t é aquela que maximiza a soma desses dois componentes.

Esta equação é conhecida como Equação de Bellman. Como afirma Dixit & Pindyck, a idéia por trás da equação é formalmente descrita no *Princípio de*

Otimização de Bellman: "Uma estratégia ótima tem a propriedade de, qualquer que seja a ação inicial, as escolhas restantes constituem uma estratégia ótima com relação ao subproblema que se inicia com o estado resultante das ações iniciais".

Em tempo contínuo, após algumas manipulações numéricas, a equação de Bellman fica:

$$\rho F_t(x_t) = \max_u \left\{ \pi(x,u,t) + \frac{1}{dt} E(dF) \right\} \tag{22}$$

Para um investidor que mantenha o ativo de valor $F(x,t)$ por um curto intervalo de tempo, o fluxo de benefícios imediato junto com o ganho esperado de capital produzem uma taxa de retorno total igual a ρ. Como afirma Dias, o principal problema no uso da programação dinâmica é determinar a taxa de desconto. Esta dificuldade existe porque há um elevado grau de subjetividade quando não se tem um mercado suficientemente completo que permita uma correta definição do risco do projeto.

3.2.2. Direitos Contingenciais

A técnica da análise de direitos contingenciais tem como base os conhecimentos da teoria de finanças e é usado em situações de mercado completo. Assumindo que num mercado completo, negociam-se ativos de todos os tipos, com riscos e retornos diversos, se a oportunidade de investimento em questão é negociada neste mercado, ela terá um preço conhecido. Porém, mesmo que ele não seja negociado diretamente no mercado, pode-se montar uma carteira (formada por outros ativos que são negociados no mercado) que replique o comportamento do ativo ao longo do tempo e o valor da oportunidade de investimento será igual ao valor total desta carteira, pois qualquer diferença entre os dois valores daria margem a ganhos de arbitragem.

O primeiro passo nesse método é montar uma carteira livre de risco, ϕ. Assim, assume-se uma posição comprada na opção de investir no ativo, F_0, e uma posição a descoberto em n posições no ativo base, cujo preço unitário é P_0. Assim a carteira é dada pela Equação 23:

$$\phi_0 = F_0 - nP_0 \tag{23}$$

O número de posições do ativo base será ajustado de forma a neutralizar o risco ao qual a carteira está exposta, fazendo com que seu valor no instante seguinte independa se o preço do ativo aumentar ou diminuir. Já que não haverá possibilidade de arbitragem, a sua taxa de retorno será igual à taxa livre de risco. Embora esta técnica seja mais restrita em suas aplicações, ela evita a necessidade de se estabelecer a taxa de desconto ajustada ao risco, e por isso esta abordagem tornou-se bastante popular na área de finanças. Um exemplo clássico de aplicação desta técnica foi o estudo em que Black & Scholes obtiveram a solução analítica de uma opção européia.

3.3. Método de Avaliação de Opções

3.3.1. Modelo Binomial

Um dos métodos mais utilizados para avaliação de ativos é o método binomial. O modelo é considerado o mais intuitivo de todos os métodos numéricos, além de ser muito simples e flexível, sendo aplicado tanto para opções européias como para americanas, que pagam ou não dividendos, e também para as opções exóticas[7].

Esse método proposto por Cox, Ross & Rubinstein (CRR) em 1979, assume que em um intervalo de tempo Δt (o tempo é dividido em períodos discretos) o preço do ativo objeto pode realizar um movimento de alta (*up*) ou de baixa (*down*)

---

[7] Opções que oferecem um perfil de pagamento diferente das usuais opções de compra ou venda, são chamadas de opções exóticas. Existem vários tipos de opções exóticas, cada uma com o seu perfil específico de pagamento, desde as mais simples (binárias), até as que são constituídas por um payoff complexo e estruturado.

com probabilidades q e (1-q), respectivamente[8]. Sob aversão ao risco, qualquer ativo com risco é apreçado como uma expectativa do valor futuro descontado ao valor presente:

$$S = \frac{qS_u + (1-q)S_d}{1+k} \qquad (24)$$

Onde k é o fator de desconto adequado ao risco (o retorno livre de risco mais um prêmio pelo risco associado) e S é o preço do ativo.

A partir do argumento de ausência de arbitragem, dados os valores de S, u, e d pode-se substituir as probabilidades q e (1-q) por probabilidades p e (1-p) que permitem mudar o fator de desconto (k) por um livre de risco (r). Estas probabilidades são chamadas probabilidades neutras ao risco[9].

Para justificar a existência de probabilidades, considera-se um caso possível de arbitragem: $u > d > 1+ r$, onde se poderia tomar emprestado a taxa livre de risco, comprar uma ação e no período seguinte ter um retorno maior que à taxa livre de risco. Isto não seria possível, pois todos os investidores teriam esta estratégia. A taxa livre de risco deveria ser ajustada de modo que $u > 1+ r > d$.

Na Figura 6, u e d representam os fatores de subida e descida, respectivamente. Escolhendo-se fazer d=1/u e S é o preço do ativo no instante t=0. A Figura 6 mostra os possíveis valores de S ao longo de três intervalos de tempo.

---

[8] As outras premissas do modelo são: que a taxa livre de riscos é constante; os indivíduos podem emprestar e tomar emprestado à mesma taxa; não existem impostos, custos de transação, ou exigências de margem; e a venda a descoberto é permitida sem restrições, com total uso dos seus recursos.

[9] Probabilidades neutras ao risco também são chamadas de probabilidades de martingale, a partir de uma medida de probabilidade que é martingale equivalente.

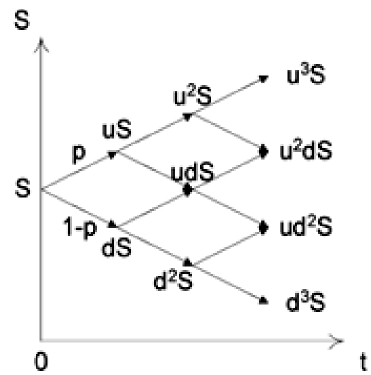

Figura 6 – Árvore Binomial em três passos

CRR desenvolveram um método que converge para a solução dada por Black&Scholes, a medida que se aumenta a discretização do tempo (aumenta-se n). Eles demonstraram que a equação do MGB poderia ser obtida como um limite contínuo de um caminho aleatório em tempo discreto.

3.3.2. Simulação de Monte Carlo (SMC)

O nome "Monte Carlo" tem a sua origem no famoso cassino de Mônaco, fundado em 1862, e da analogia aos sorteios das simulações. O conceito básico do método de Monte Carlo é a simulação, por repetidas vezes, de um processo estocástico para uma variável, simulando a maior parte dos resultados possíveis.

A SMC pertence aos casos em que não se dispõe de uma expressão matemática que expresse o fenômeno pesquisado, sendo necessário o emprego de métodos de simulação de eventos para se obter um resultado aproximado, fazendo simulações (*forward*) e não otimização (*backward*).

Este método tem como objetivo simular caminhos para evolução de um fenômeno até encontrar uma aproximação satisfatória que o explique. A SMC é uma técnica muito importante na análise de risco e retorno que consiste em simular eventos futuros, geralmente em computador devido a grande quantidade de cálculos necessários para se obter um resultado. Essa simulação é realizada, a partir de um programa computacional, com um modelo que leve em consideração medidas de sensibilidade e distribuição de variáveis.

Existe uma dificuldade na modelagem destes algoritmos, mas tal empecilho não tem sido suficiente para impedir a sua utilização, pois os resultados obtidos com essa técnica de simulação têm demonstrado forte poder de previsão. As simulações procuram reproduzir um cenário real de tomada de decisões através de um modelo matemático, que busca capturar as características funcionais mais importantes do projeto à medida que eventos aleatórios ocorrem. A SMC aplicada a OR geralmente segue os seguintes passos:

1. Modelagem do projeto através de uma série de equações matemáticas e identidades para todas as variáveis de entrada importantes, incluindo uma descrição das correlações entre diferentes variáveis;

2. Especificação das distribuições de probabilidade neutras ao risco para cada uma das variáveis de entrada, com base num histórico de dados.

3. Uma amostra aleatória é então obtida (usando um gerador de números aleatórios) a partir da distribuição de probabilidades dos dados de entrada.

4. O processo é repetido diversas vezes, obtendo-se para cada vez que se repete o processo um *payoff*. Ao final, calcula-se a média dos *payoffs* para se obter uma estimativa para o mundo neutro ao risco e desconta-se à taxa livre de risco para se obter o VPL do projeto.

A avaliação de opções através da SMC pode ser resumida em três etapas:

1. Simulações dos fatores de incerteza do ativo (preço, volatilidade, dividendos, etc);

2. Determinação do *payoff* do ativo - o computador deve simular o caminho que o ativo objeto poderia percorrer. Obtendo–se assim, um valor ou um preço final teórico para esse ativo.

3. Apreçamento da opção através da média das simulações e determinação da precisão do resultado através do intervalo de confiança e desvio-padrão.

O método está esquematizado na Figura 7 para esclarecer melhor o seu entendimento. As distribuições de entradas e as equações que as ligam aos resultados têm que ser previamente conhecidas.

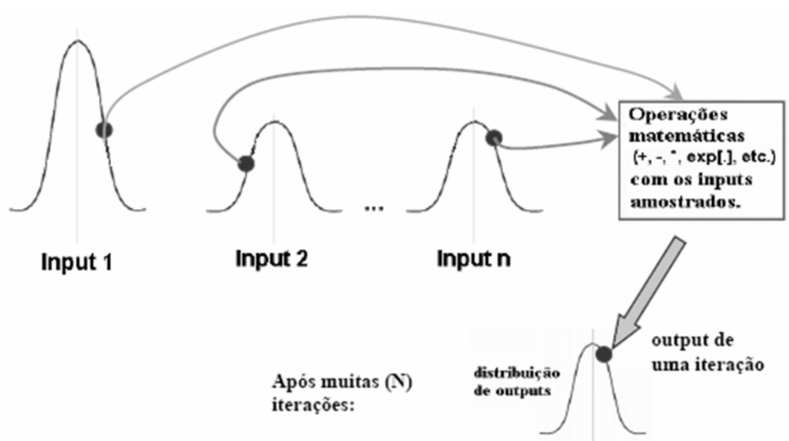

Figura 7 – Funcionamento da SMC

Fonte: Dias

A utilização da SMC é especialmente adequada para opções dependentes de múltiplas variáveis de estado ou opções que dependem do caminho.

Por exemplo, supondo que a variável de mercado, *S* (ação, por exemplo) segue um MGB, já explicado anteriormente, em um mundo neutro ao risco dado por:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \qquad (25)$$

Onde *dz* é um incremento de Wiener, μ é a taxa sem risco e σ é a volatilidade. Para simular o caminho percorrido por *S*, divide-se a vida do derivativo *N* em intervalos curtos de cumprimento Δt, aproximando a Equação 25 tem-se a Equação 26:

$$S(t+\Delta t) - S(t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) S(t) \Delta t + \sigma S(t) \varepsilon \sqrt{\Delta t} \qquad (26)$$

Onde *S(t)* representa o valor de *S* no instante t e ε é agora uma variável aleatória normal padronizada. A equação acima permite calcular o valor de S em qualquer instante de tempo. Isso acontece porque os valores de ΔS nos tempos (0,

$\Delta t, 2\Delta t, ..., T$) são computados. Simulando assim um caminho percorrido por S. As demais n simulações são igualmente repetidas. Para cada iteração, tem-se um valor da ação para a i-ésima iteração S_i, dado pela Equação 27:

$$S_i(T) = S_i(0) + \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i(j\Delta t) \tag{27}$$

e cujo valor da opção de compra européia para esta i-ésima será Max[0, $S_i(T) - K$] , dado o valor de exercício da opção, K . O valor da opção pelo Método de Monte Carlo será a média dos resultados obtidos com as n simulações, ou seja:

$$\hat{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \max[0, S_i(T) - K] \tag{28}$$

A maneira correta de se simular o caminho percorrido por S é através da Equação 29:

$$S(t + \Delta t) = S(t) e^{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right]} \tag{29}$$

A SMC pode ser estendida para a precificação de opções européias com dividendos discretos ou contínuos. Até pouco tempo SMC era só usado em opções européias, mas pode-se valorar OR do tipo americana (apesar de ser um problema mais complexo) [10]. Uma vantagem do método é a de não impor restrições à distribuição dos retornos do ativo objeto, ou seja, a única restrição é a possibilidade de encontrar uma função geradora de números aleatórios que representa com boa aproximação a distribuição correspondente do ativo objeto.

3Para melhorar a precisão dos resultados da SMC, pode-se aumentar o número de simulações, o que por sua vez pode elevar demasiadamente o custo computacional deste processo. Para solucionar este problema, existem algumas técnicas de

---

[10] Além disso, a SMC pode ser aplicada na precificação de opções exóticas que dependem do caminho traçado pelo ativo objeto correspondente.

redução de variância que aumentam a eficiência da SMC sem um acréscimo significativo do custo computacional[11].

[11] Algumas das técnicas utilizadas para reduzir a variância em torno do valor estimado pela SMC podem ser: variável de controle, variável antitética, estratificação, importance sampling, e Latin hipercube. Ver Frota (2003).