

3

Preliminares teóricas: funções do plano no plano

Neste capítulo, introduziremos definições e resultados básicos da análise matemática que serão úteis para a descrição do $\mathbf{wx2x2}$. As demonstrações podem ser encontradas nas referências [MST1], [MST2] e, para aspectos mais gerais, [LAN]. Os algoritmos implementados no $\mathbf{wx2x2}$, por sua vez, serão apresentados no Capítulo 5.

3.1

Primeiras definições

Seja F uma função diferenciável do plano no plano. Um ponto p do domínio de F é *regular* se a matriz jacobiana DF nesse ponto é inversível, em outras palavras, se $\det(DF(p)) \neq 0$. A partir do Teorema da Função Inversa, após mudanças de variáveis em vizinhanças apropriadas de p e $F(p)$, a função F toma a forma $\tilde{F}(x, y) = (x, y)$. Mais precisamente, existem difeomorfismos locais Φ e Ψ tal que $F = \Phi \circ \tilde{F} \circ \Psi$. Um ponto do domínio que não é regular é chamado de *ponto crítico*. O ponto p é uma *pré-imagem* de q quando $F(p) = q$. Um ponto q da imagem de F é um *valor crítico* se alguma pré-imagem for um ponto crítico. Um ponto do contradomínio que não é um valor crítico é chamado de *valor regular*. Denotaremos por \mathcal{C} o conjunto dos pontos críticos de F e por $F(\mathcal{C})$ o conjunto dos valores críticos de F .

Seja p um ponto crítico tal que $\text{grad}(\det DF)(p) \neq 0$. Pelo *Teorema da Função Implícita*, as soluções de $\det(DF(x)) = 0$ próximas a p formam uma curva suave. Assim, o conjunto crítico \mathcal{C} seria um conjunto de curvas simples se só constasse de pontos regulares.

Um ponto crítico p da função F é uma *dobra* (resp. *cúspide*) se existir dois difeomorfismos locais (preservando orientação) ϕ e ψ em torno de p e $F(p)$, respectivamente, sobre vizinhanças da origem no plano, de modo que $\psi \circ F \circ \phi$ seja dada por (3-1) (resp. (3-2)) abaixo:

$$(u, v) \mapsto (u, v^2) \tag{3-1}$$

$$(u, v) \mapsto (u, \alpha v^3 - uv), \quad \alpha = \pm 1. \tag{3-2}$$

Vejamos uma caracterização mais explícita para dobras e cúspides. Um ponto crítico p é uma dobra se

- a) $\text{grad}(\det DF)(p) \neq 0$,
- b) o núcleo K de DF em p tem dimensão 1,
- c) K e a reta tangente T ao conjunto crítico em p não coincidem.

E um ponto crítico p é uma cúspide se

- a) $\text{grad}(\det DF)(p) \neq 0$,
- b) o núcleo K de DF em p tem dimensão 1,
- c) K e a reta tangente T ao conjunto crítico em p coincidem,
- d) para uma parametrização suave $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de \mathcal{C} perto de p , com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) \neq 0$, o ângulo $\theta(\gamma(t))$ entre o núcleo $K(\gamma(t))$ de $DF(\gamma(t))$ e a reta tangente $T(\gamma(t))$ a \mathcal{C} satisfaz $\theta'(0) \neq 0$.

Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ suave. Dizemos que F é uma *função excelente* se todo ponto crítico de F for uma dobra ou uma cúspide. Para F excelente, 0 (zero) é valor regular de $\det(DF)$ pois $\text{grad}(\det DF)(p) \neq 0$ para todo p do plano e daí, como conseqüência do Teorema da Função Implícita, o conjunto \mathcal{C} é uma família de curvas simples regulares disjuntas [MI]. Em [W], precisamente no Teorema 13A, Whitney demonstra que, numa topologia apropriada, funções genéricas do plano no plano são funções excelentes.

Uma função contínua F do plano no plano é *própria* se a pré-imagem de qualquer subconjunto compacto é um conjunto compacto. Isso equivale a dizer que F leva infinito a infinito, $\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} |F(x,y)| = \infty$.

Seja $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função contínua ($S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$) e q fora de sua imagem. O *número de rotação* de γ em torno de q , $\omega(\gamma, q)$, ou *índice do ponto q com respeito a γ* , é o grau da função $\nu(\theta) = (\gamma(\theta) - q)/|\gamma(\theta) - q|$ de S^1 em S^1 . Informalmente, o número de rotação conta as voltas da curva (orientada) dada pela imagem de γ em torno do ponto q . Se, além disso, γ tem uma derivada sempre não nula, a *giração* $\tau(\gamma)$ de γ é o número de rotação da função de S^1 em S^1 dada por $\vartheta(t) = \gamma'(t)/|\gamma'(t)|$ em torno da origem, $\tau(\gamma) = \omega(\vartheta, 0)$. A giração conta as voltas do vetor tangente a γ ao longo de γ .

Para U aberto limitado de \mathbb{R}^2 , e uma função contínua $F : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $q \notin \partial U$, definimos seu *grau topológico* (ou, simplesmente, grau) que, genericamente, é dado pela expressão

$$\text{deg}(F, U, q) = \sum_{F(p)=q, p \in U} \text{sgn det}(DF(p)).$$

Suponha que, por alguma razão, a expressão acima não faça sentido (ainda que mantenhamos $q \notin \partial U$): F , por exemplo, poderia não ser diferenciável, ou q poderia ter um número infinito de pré-imagens em U . É parte da construção do grau topológico que qualquer aproximação razoável de F para o qual a expressão faz sentido é adequada para o cálculo do grau. Informalmente, o grau conta algebricamente (isto é, com uma escolha apropriada de sinais) o número de pré-imagens de q em U . O grau $\text{deg}(F, \mathbb{R}^2, q)$ também é bem definido para funções próprias $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, e, nesse caso, independe de q .

Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função excelente e própria. Ela é *cordata* se seu conjunto crítico \mathcal{C} é limitado e a imagem $F(\mathcal{C})$ consiste de uma família normal de curvas. Uma curva $F(\gamma)$ é normal quando nenhum ponto seu tem mais de duas pré-imagens em γ e, em pontos de autointerseção, os vetores tangentes a $F(\gamma)$ são linearmente independentes.

O conjunto $\mathcal{F} = F^{-1}(F(\mathcal{C}))$ é a *flor* da função F . Dado um subconjunto X do plano as componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus X$ são as *placas* de X . Neste texto, consideraremos com freqüência as placas de \mathcal{F} , de \mathcal{C} e de $F(\mathcal{C})$.

Seja Γ uma curva crítica de uma função cordata F , limitando um disco topológico aberto D . Uma cúspide $p \in \Gamma$ é chamada de *interna* se, para toda vizinhança suficientemente pequena U_p de p , $F^{-1}(F(\Gamma)) \cap U_p$ está contida em \bar{D} ; caso contrário, o ponto p é chamado de cúspide *externa*.

Para F cordata, o *sentido de dobra* de uma curva crítica Γ no domínio é a orientação que deixa os pontos p com $\det(DF(p)) > 0$ imediatamente à esquerda de Γ , como indicado na Figura 3.1. A composição de F com uma parametrização da curva crítica, orientada com sentido de dobra, induz uma orientação para $F(\Gamma)$, o *sentido de dobra* de $F(\Gamma)$, com a seguinte propriedade geométrica: a imagem de uma pequena vizinhança de um ponto de dobra $p \in \Gamma$ está inteiramente à esquerda de $F(\Gamma)$, como na Figura 3.1. Isso segue da forma normal da dobra. O sentido de dobra de Γ corresponde à orientação positiva (sentido anti-horário) se $\det(DF)$ é positivo imediatamente dentro de Γ .

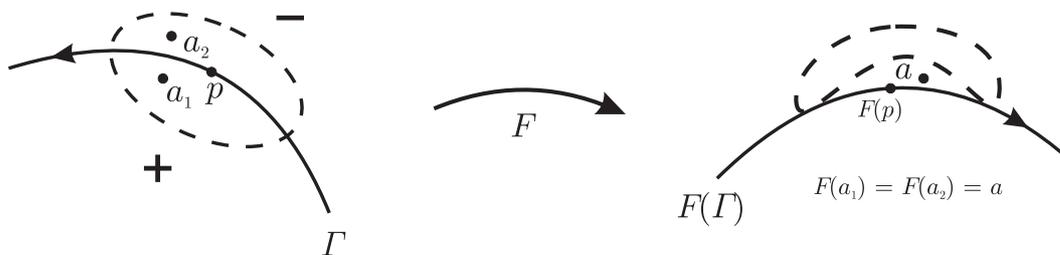


Figura 3.1: Sentido de dobra

3.2

Um pouco da teoria geral

Nesta seção apresentaremos os teoremas que embasam os algoritmos que compõem o **wx2x2**.

Teorema 3.1 *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função suave própria, $q \in \mathbb{R}^2$ e γ uma parametrização de uma curva fechada normal simples Γ orientada positivamente tal que todas as pré-imagens de q estão do lado de dentro de Γ . Então*

- a) *O número de rotação $\omega(F \circ \gamma, q)$ independe de γ e q ;*
- b) *Se q é um valor regular de F então*

$$\omega(F \circ \gamma, q) = \sum_{F(p)=q} \text{sgn det}(DF(p)).$$

O teorema é empregado para o cálculo do grau de uma função, um dos primeiros procedimentos executados pelo programa ao receber uma função declarada pelo usuário como cordata. Assim, o grau é o número de rotação em torno de zero da imagem de um grande círculo orientado positivamente centrado na origem.

Teorema 3.2 *Seja E um recobrimento de um conjunto simplesmente conexo X por uma função F . Então F é um homeomorfismo.*

Um exemplo desse resultado já foi mostrado no Capítulo 2: a função F estudada leva cada placa ciano ao triângulo ciano da imagem homeomorficamente. Isso não acontece necessariamente para placas com buracos, como é o caso de uma das placas amarelas do domínio, nem para placa branca.

Teorema 3.3 *Seja F cordata, E uma placa de \mathcal{F} e X a placa de $F(\mathcal{C})$ que contém $F(E)$. Então E é um recobrimento de ordem finita de X por F .*

Assim, podemos falar em *pré-imagens* de X quando X for uma placa de $F(\mathcal{C})$, pois o conjunto $F^{-1}(X)$ é uma reunião disjunta de placas de \mathcal{F} , cada uma das quais chamada de *pré-imagem de X* . Em particular, nesse caso, o número de pré-imagens de qualquer ponto em uma mesma placa X é constante.

Corolário 3.4 *Seja F cordata. Então a pré-imagem da placa ilimitada de $F(\mathcal{C})$ é a placa ilimitada de \mathcal{F} . O grau de F não é nulo (logo F é sobrejetora) e o número de pré-imagens da placa ilimitada de $F(\mathcal{C})$ é igual ao módulo do grau.*

No Capítulo 2, para a função F estudada, a placa amarela possui 6 placas pré-imagens. Todavia, cada ponto dessa placa possui 7 pré-imagens. Para a placa ilimitada, cada ponto possui 3 pré-imagens pois $\deg(F) = 3$ (o programa informa este valor na área de log).

Aliás, o comportamento de uma função cordata em infinito é bastante simples.

Teorema 3.5 *Seja F uma função cordata e $n = |\deg(F)| \neq 0$. Então, em vizinhanças de ∞ , no domínio e na imagem, a menos de trocas de variáveis, F comporta-se como $z \mapsto z^n$ ou $z \mapsto \bar{z}^n$. O primeiro caso ocorre exatamente quando $\deg(F) > 0$.*

Assim, em princípio, para uma função cordata, não é difícil calcular as outras pré-imagens de um ponto $q = F(p)$, onde p é dado, suficientemente longe do conjunto crítico \mathcal{C} .

O resultado seguinte mostra como empregar informação sobre o número de pré-imagens em infinito para a contagem de pré-imagens das placas limitadas da imagem.

Teorema 3.6 *Seja F uma função cordata. Então numa vizinhança de uma imagem q de uma dobra, na imagem q' de uma cúspide ou de um ponto de intersecção q'' com k pré-imagens, o número de pré-imagens muda de acordo com os diagramas na Figura 3.2, onde as setas indicam o sentido de dobra.*

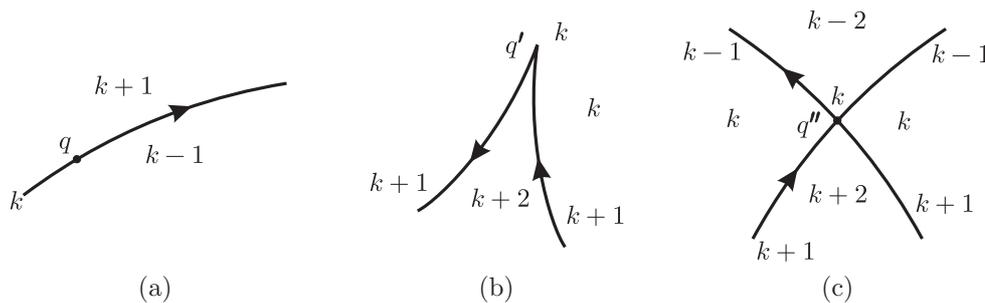


Figura 3.2: Diagrama de mudança de pré-imagens

Mais uma vez, o Capítulo 2 mostra o teorema em ação para as placas na imagem da função F , onde seus pontos possuíam 3, 5, 7 ou 9 pré-imagens.

A partir de agora, apresentaremos relações de compatibilidade que serão úteis na identificação das curvas críticas de uma função F cordata. Os teoremas a seguir buscam caracterizar seus conjuntos \mathcal{C} e $F(\mathcal{C})$. Como veremos na próxima seção, o wx2x2 utiliza o conhecimento desses conjuntos para inverter pontos. Na pesquisa de curvas críticas, o programa usa essas relações para

determinar se o conjunto de curvas críticas já calculado \mathcal{C}_\bullet e sua imagem $F(\mathcal{C}_\bullet)$ de fato são iguais aos conjuntos críticos \mathcal{C} e $F(\mathcal{C})$ de F , respectivamente.

Para uma curva orientada Γ , definimos a giração de sua imagem $\nu(\Gamma) = \tau(F(\Gamma))$. Denotamos por $\kappa_{int}(\Gamma)$ e $\kappa_{ext}(\Gamma)$ o número de cúspides internas e externas em Γ .

Teorema 3.7 (Teste de Contagem) *Seja F uma função cordata, com conjunto crítico \mathcal{C} . Considere uma placa de \mathcal{C} , com fronteira exterior Γ_0 (caso exista) e fronteiras interiores $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ (caso existam). Então*

$$\nu(\Gamma_0) - \kappa_{int}(\Gamma_0) + \sum_{1 \leq i \leq m} (\nu(\Gamma_i) - \kappa_{ext}(\Gamma_i)) = 1 - m.$$

Se não existir fronteira exterior, $\nu(\Gamma_0)$ deve ser interpretado como $|\deg(F)|$.

Corolário 3.8 *Seja F uma função cordata com conjunto crítico \mathcal{C} consistindo de curvas $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, com um total de κ cúspides. Então*

$$|\deg(F)| = 1 + \kappa - 2 \sum_{1 \leq i \leq n} \nu(\Gamma_i).$$

O Teorema 3.7 fornece um conjunto de condições necessárias, uma em cada placa de \mathcal{C} , que devem ser satisfeitas para conjuntos de curvas candidatas a formar o conjunto crítico de uma função cordata, mas essas condições não são suficientes. Por exemplo, suponha que para uma função cordata F , tivéssemos encontrado duas curvas críticas sem cúspides Γ_0 e Γ_1 , orientadas por sentido de dobra como na Figura 3.3, junto com suas imagens. É fácil ver que o Teorema 3.7 é satisfeito na placa interior a Γ_0 , mas não vale para a placa entre Γ_0 e Γ_1 : ao orientar as curvas como indicado no teorema, obtemos $1 + 1 = 1 - 1$, mostrando que existem pontos críticos nessa placa.

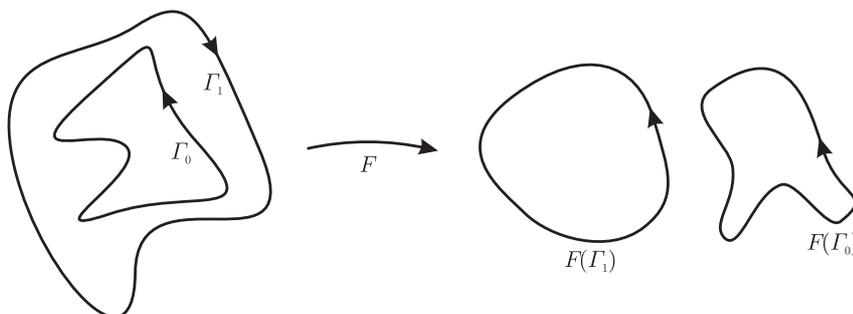


Figura 3.3: Faltam curvas críticas no anel entre Γ_0 e Γ_1

O Teorema 3.7 fornece condições que devem ser satisfeitas por \mathcal{C} — quando parar? Condições adicionais, que são também suficientes, seguem da *Teoria de Blank-Troyer* ([MST1]). Os resultados fazem uso de construções de topologia combinatória, e foram detalhados nas referências. Nesse texto, não acrescentamos nada a esta parte do programa. Vale, entretanto, observar que, ao longo de uma quantidade substancial de exemplos estudados, verificou-se que os testes de contagem são muito rigorosos: sempre que um conjunto de curvas críticas \mathcal{C}_\bullet e sua imagem satisfaziam esses testes, eles também satisfaziam aos testes de Blank-Troyer. Esses testes adicionais são bastante exigentes computacionalmente, e o programa tem um parâmetro, descrito no capítulo seguinte, que permite desativá-los.

3.3

Um exemplo explícito: $\tilde{F}(z) = z^2 + \bar{z}$

Vamos calcular o conjunto crítico e a flor da função $F(x, y) = (x^2 + y^2 + x, 2xy - y)$, ou $\tilde{F}(z) = z^2 + \bar{z}$, em notação complexa. Sua jacobiana no ponto (x, y) é

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} 2x + 1 & -2y \\ 2y & 2x - 1 \end{bmatrix}$$

e seu determinante,

$$g(x, y) = \det(DF(x, y)) = 4(x^2 + y^2) - 1. \quad (3-3)$$

Daí, o conjunto crítico de F , $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$, é dado pela circunferência de raio $\frac{1}{2}$ centrada na origem, que parametrizamos por $\gamma(t) = (\frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t)$. Notemos que $\nabla g(x, y) = (8x, 8y)$ é não nulo para todos os pontos em \mathcal{C} , e assim a primeira condição para um ponto crítico ser dobra ou cúspide é satisfeita. O núcleo de DF no ponto $(\frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t)$ é gerado pelo vetor $(\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2})$, pois

$$DF\left(\frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t\right) \begin{bmatrix} \sin \frac{t}{2} \\ \cos \frac{t}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t + 1 & -\sin t \\ \sin t & \cos t - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \frac{t}{2} \\ \cos \frac{t}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Alinhando o vetor gerador do núcleo e o vetor $\gamma'(t)$, obtemos os valores de t para os quais a reta tangente ao conjunto crítico coincide com o núcleo da jacobiana: $t = 0, \frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$. Logo, com exceção das raízes cúbicas da unidade (divididas por 2), os pontos de \mathcal{C} são dobras. Para mostrar que esses três pontos são de fato cúspides falta verificar o item (d) da definição (pág. 18). Sejam $\theta_1(t) = \frac{\pi}{2} + t$ e $\theta_2(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$, respectivamente, os argumentos do vetor tangente e do gerador do núcleo de DF . Então $\theta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t) = \frac{3t}{2}$, e daí

$\theta'(t)$ é sempre não nulo. Assim, os três pontos são de fato cúspides.

Agora mostraremos que $F(\mathcal{C})$ é uma curva fechada sem auto-intersecções. Consideremos dois pontos (x, y) e (u, v) em \mathcal{C} com a mesma imagem. Algebricamente, isso corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} & , \quad u^2 + v^2 = \frac{1}{4} \\ x^2 - y^2 + x = u^2 - v^2 + u & , \quad 2xy - y = 2uv - v \end{aligned}$$

que tem a única solução $x = u$ e $y = v$. Portanto, $F(\mathcal{C})$ não possui pontos de auto-intersecção.

Finalmente, para mostrarmos que F é cordata falta verificar que F é própria, o que é imediato de sua forma complexa, já que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\tilde{F}(z)| = \infty$.

Observamos, a partir da Equação (3-3) que o sinal de $\det DF$ na origem é negativo, portanto o sentido de dobra coincide com o sentido horário. O módulo do grau de F pode ser obtido através do Corolário 3.8: $|\deg(F)| = 1 + 3 - 2 \cdot 1 = 2$, ou da forma complexa \tilde{F} . Circunferências de raio arbitrariamente grande centradas na origem e orientadas positivamente são levadas em circunferências a curvas que dão duas voltas no sentido anti-horário em torno da origem: assim, $\deg(F) = 2$.

A Figura 3.4 exibe os conjuntos \mathcal{C} , $F(\mathcal{C})$ e \mathcal{F} para a nossa função exemplo. O Corolário 3.4 nos diz que F é sobrejetiva, a imagem da placa ilimitada P_0 é a placa \tilde{P}_0 e que cada ponto de \tilde{P}_0 possui duas pré-imagens na placa P_0 . Mais ainda, de acordo com os Teoremas 3.2 e 3.3, sendo \tilde{P}_1 simplesmente conexo, F restrita a cada uma das placas P_i , $i = 1, \dots, 4$, é um difeomorfismo sobre \tilde{P}_1 . Logo, cada ponto em \tilde{P}_1 possui quatro pré-imagens, o que também pode ser deduzido utilizando o Teorema 3.6.

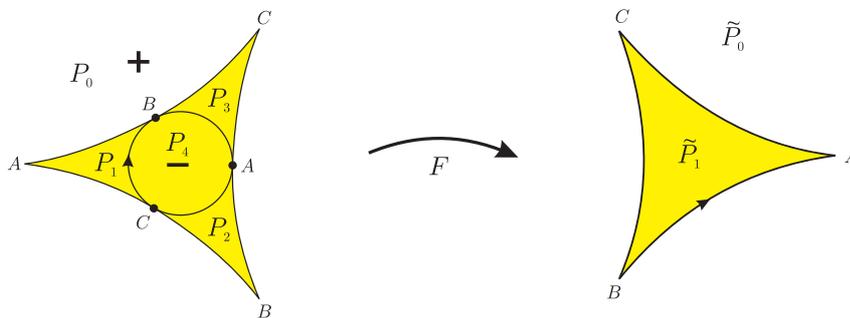


Figura 3.4: \mathcal{C} , $F(\mathcal{C})$ e \mathcal{F} para a função $\tilde{F}(z) = z^2 + \bar{z}$

3.4

Calculando as pré-imagens de um ponto de $\tilde{F}(z) = z^2 + \bar{z}$

Dada F cordata com conjuntos críticos \mathcal{C} e $F(\mathcal{C})$ conhecidos, como obter todas as pré-imagens de um ponto q dado? O processo de inversão que apresentaremos aqui é geral, ou seja, é o mesmo para a inversão de pontos para qualquer função cordata, e será detalhado no Capítulo 5. Para simplificar, aqui consideraremos a inversão de pontos pela função $\tilde{F}(z) = z^2 + \bar{z}$.

O primeiro passo para resolver o sistema $F(p) = q$ é obter todas as pré-imagens de algum ponto remoto q_0 , processo que passamos a descrever. Escolha um ponto p_0^0 suficientemente longe da origem, de forma que $F(p_0^0)$ esteja fora de um disco centrado na origem contendo $F(\mathcal{C})$: isso pode ser feito porque F é própria e, portanto, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |F(z)| = \infty$. Defina $q_0 = F(p_0^0)$: uma das pré-imagens de q_0 é obviamente p_0^0 .

Como o número de pré-imagens de um ponto pertencente à placa ilimitada de $F(\mathcal{C})$ é $\deg(F) = 2$, q_0 ainda possui uma outra pré-imagem e, para obtê-la, considere ω uma circunferência centrada na origem do contradomínio, percorrida de modo a começar e terminar em q_0 . Agora, por algum método de continuação, obtemos a imagem inversa de ω partindo de p_0^0 , que nos levará à outra pré-imagem p_0^1 de q_0 quando completarmos a inversão de ω .

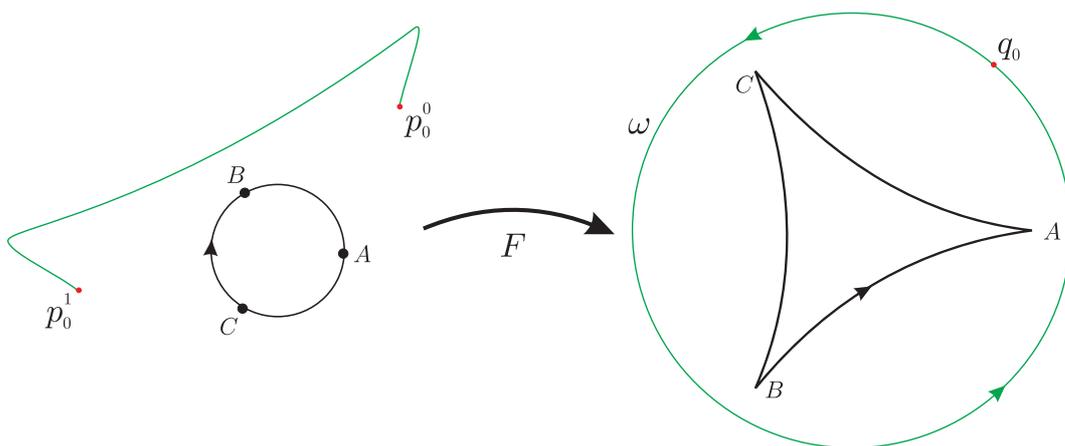


Figura 3.5: A outra pré-imagem de q_0

Qualquer outro ponto q_1 na placa ilimitada de $F(\mathcal{C})$ possui duas pré-imagens. Para resolver $F(p) = q_1$, basta traçar uma curva β ligando q_0 a q_1 sem interceptar $F(\mathcal{C})$ e invertê-la por continuação a partir das duas condições iniciais p_0^0 e p_1^0 , obtendo as pré-imagens p_1^0 e p_1^1 de q_1 .

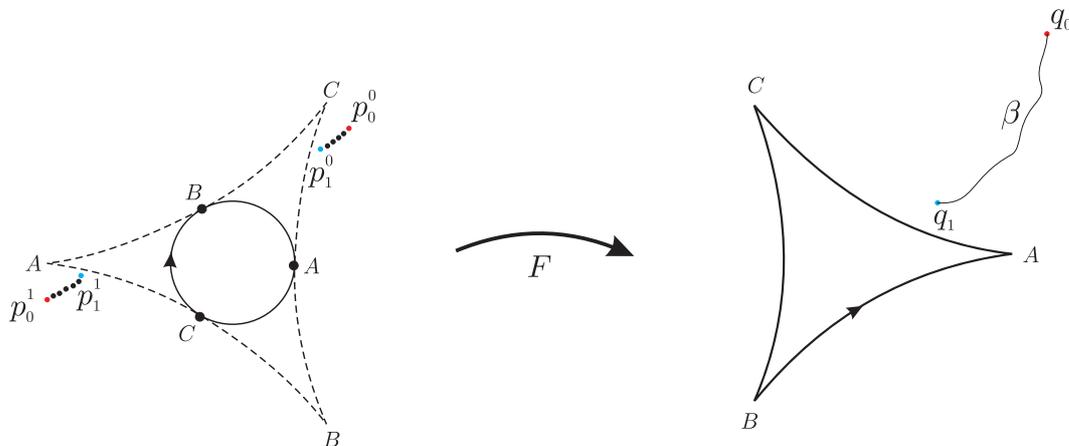


Figura 3.6: Inversão de um ponto pertencente à placa ilimitada

Finalmente, seja q_2 um ponto da placa limitada de $F(\mathcal{C})$ que, portanto, possui quatro pré-imagens. Para resolver $F(p) = q_2$, ligue q_0 a q_2 , preferencialmente por um caminho β que intercepte $F(\mathcal{C})$ em um ponto só, q_* , que seja a imagem de uma dobra.

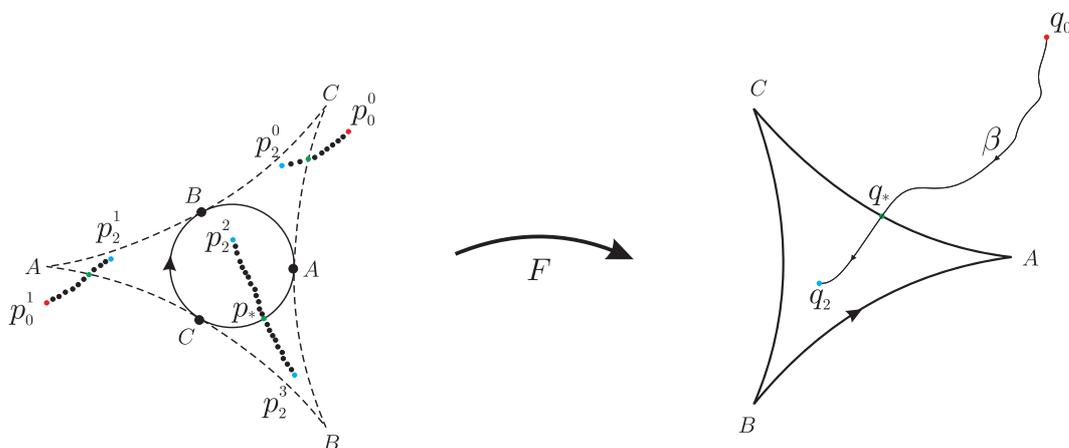


Figura 3.7: Inversão de um ponto pertencente à placa limitada

Iniciamos o processo de inversão por continuação ao longo de β a partir do ponto inicial q_0 . Fazemos isso para cada pré-imagem de q_0 (p_0^0 e p_1^0), obtendo duas pré-imagens de q_2 : p_2^0 e p_2^1 . Para obter as duas pré-imagens que faltam, calculamos o ponto p_* em \mathcal{C} tal que $F(p_*) = q_*$ — como veremos no Capítulo 5, isto se obtém a partir da lista dos pontos das curvas críticas, já calculadas pelo

programa. Para gerar as duas pré-imagens perto de p_* , calculamos o núcleo K da jacobiana no ponto p_* e escolhemos dois pontos s_1 e s_2 perto de p_* na reta $p_* + K$, um de cada lado da curva crítica. As imagens $d_1 = F(s_1)$ e $d_2 = F(s_2)$ provavelmente não pertencem ao nosso caminho de inversão β . Conectamos d_1 e d_2 a β por pequenos caminhos α_1 e α_2 , invertendo-os com condições iniciais s_1 e s_2 e, finalmente, continuamos a inversão ao longo do caminho de inversão original β , obtendo assim, as pré-imagens restantes p_2^2 e p_2^3 .

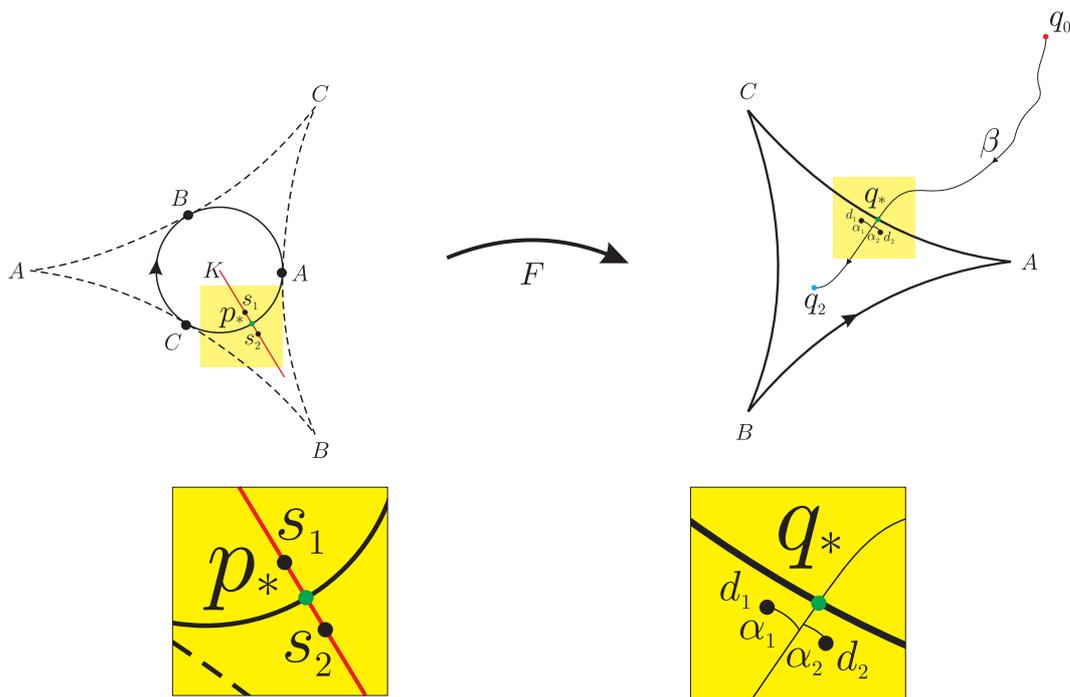


Figura 3.8: Inversão com condições iniciais próximas à \mathcal{C}