



**Eduardo Teles da Silva**

**wx2x2 - um software para sistemas não lineares**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador : Prof. Carlos Tomei  
Co-Orientador: Prof. Humberto J. Bortolossi

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2007



**Eduardo Teles da Silva**

## **wx2x2 - um software para sistemas não lineares**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Carlos Tomei**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Humberto J. Bortolossi**

Co-Orientador

Departamento de Matemática — UFF

**Prof. Nicolau C. Saldanha**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Marcelo Gattass**

Departamento de Informática — PUC-Rio

**Prof. Dan Marchesin**

IMPA

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 28 de Fevereiro de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Eduardo Teles da Silva**

Mestrado: Matemática Aplicada — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC–Rio (2005–2007).

Graduação: Licenciatura em Matemática — Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC (2001–2004).

#### Ficha Catalográfica

Teles, Eduardo

wx2x2 - um software para sistemas não lineares / Eduardo Teles da Silva; orientador: Carlos Tomei; co-orientador: Humberto J. Bortolossi. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 54 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Sistemas não lineares. 3. Singularidade. 4. Dobra. 5. Cúspide. 6. Análise Numérica. I. Tomei, Carlos. II. Bortolossi, Humberto J.. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Aos meus pais, irmãos e amigos.

## Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me concedido saúde e ânimo nesses dois últimos anos.

Aos meus pais e irmãos pelo amor e esperança em mim depositados.

Ao meu orientador, Carlos Tomei, pela paciência, empenho, esclarecimentos e alegria demonstrados em todos os momentos durante a realização deste trabalho.

Ao meu co-orientador e amigo, Humberto J. Bortolossi, pelos conselhos e ampla dedicação demonstrada (mesmo durante vários fins de semana).

Aos grandes e velhos amigos que nunca me abandonaram apesar de estarem tão distantes.

A todos os funcionários e professores do Departamento de Matemática pela ajuda prestada. Em especial, a Creuza que sempre manteve a burocracia imperceptível.

À Capes e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos.

## Resumo

Teles, Eduardo; Tomei, Carlos; Bortolossi, Humberto J.. **wx2x2 - um software para sistemas não lineares**. Rio de Janeiro, 2007. 54p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Apresentamos um software para inverter funções suaves genéricas do plano no plano,  $F(x) = b$ , bem como a teoria utilizada para implementá-lo. Em princípio, o programa calcula todas as pré-imagens de um ponto. A inversão numérica baseia-se na caracterização do conjunto crítico  $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \det DF(x) = 0\}$  e sua imagem, e em técnicas de continuação numérica ajustadas para interação controlada com  $\mathcal{C}$ . A interface gráfica permite o estudo de propriedades geométricas e analíticas, tanto locais quanto globais.

## Palavras-chave

Sistemas não lineares. Singularidade. Dobra. Cúspide. Análise Numérica.

## Abstract

Teles, Eduardo; Tomei, Carlos; Bortolossi, Humberto J.. **wx2x2 - a software for nonlinear systems**. Rio de Janeiro, 2007. 54p. MsC Thesis — Department of Mathematics, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

We present a software to invert functions from the plane to the plane  $F(x) = b$ , for a generic smooth function  $F$ , as well as the theory to implement it. In principle, all points in the preimage of  $b$  are computed. The numerical inversion is based on the characterization of the critical set  $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \det DF(x) = 0\}$  and its image, and in appropriate techniques of numerical continuation in situations of controlled interaction with  $\mathcal{C}$ . A graphical user interface allows for the study of local and global properties of the function, both of geometric and analytic nature.

## Keywords

Nonlinear Systems. Singularity. Fold. Cusp. Numerical Analysis.

# Sumário

Lista de figuras	9
1 Introdução	10
2 Um primeiro exemplo	12
3 Preliminares teóricas: funções do plano no plano	17
3.1 Primeiras definições	17
3.2 Um pouco da teoria geral	20
3.3 Um exemplo explícito: $\tilde{F}(z) = z^2 + \bar{z}$	23
3.4 Calculando as pré-imagens de um ponto de $\tilde{F}(z) = z^2 + \bar{z}$	25
4 Usando o wx2x2	28
4.1 A área de trabalho do wx2x2	28
4.2 Modos de Análise: funções próprias e domínios limitados	29
4.3 Barras de ferramenta nas janelas de domínio e contradomínio	32
4.4 Parâmetros Globais	33
5 Procedimentos Computacionais	36
5.1 Calculando o grau	37
5.2 Detectando e construindo curvas críticas	37
5.3 Detectando as primeiras curvas críticas	38
5.3.1 Calculando alguns atributos de CriticalCurve	41
5.3.2 Girações e rotações	43
5.3.3 $\mathcal{C}_\bullet = \mathcal{C}$ ?	44
5.3.4 Procurando outras curvas críticas	45
5.4 Invertendo um ponto	46
5.4.1 Calculando todas as pré-imagens de alguns pontos	47
5.4.2 Escolhendo caminhos e invertendo	48
5.4.3 Calculando a flor	51
A Árvore de chamada de rotinas	52
Referências Bibliográficas	53

## Lista de figuras

2.1	A flor de $F$ e sua imagem	13
2.2	Invertendo curvas	14
2.3	A área de log	15
2.4	Informações sobre a inversão de um ponto	16
3.1	Sentido de dobra	19
3.2	Diagrama de mudança de pré-imagens	21
3.3	Faltam curvas críticas no anel entre $\Gamma_0$ e $\Gamma_1$	22
3.4	$\mathcal{C}$ , $F(\mathcal{C})$ e $\mathcal{F}$ para a função $\tilde{F}(z) = z^2 + \bar{z}$	24
3.5	A outra pré-imagem de $q_0$	25
3.6	Inversão de um ponto pertencente à placa ilimitada	26
3.7	Inversão de um ponto pertencente à placa limitada	26
3.8	Inversão com condições iniciais próximas à $\mathcal{C}$	27
4.1	Área de trabalho do wx2x2	29
4.2	Janelas do Domínio e do Contradomínio	29
4.3	Modo Bump	30
4.4	Gráfico de uma bump	31
4.5	Traço no plano $x = 0$	31
4.6	Modo mask	31
4.7	Barras de Ferramentas	32
4.8	A ferramenta Axes/Grid e seus comportamentos	33
4.9	Exemplos de configurações do parâmetro <i>Curve Sharpness</i>	35
5.1	Aqui é necessário reduzir <i>step</i>	40
5.2	Curva dividida em arcos bimonotônicos	42
5.3	Localizando cúspides	42
5.4	Intersecções entre arcos bimonotônicos	43
5.5	Uma volta em torno à origem	44
5.6	Encontrando uma curva crítica nova	45
5.8	Obtendo todas as pré-imagens de pontos remotos	48
5.9	Nascem duas pré-imagens	49
5.10	Invertendo um arco maximal	51