

4

SPH em Animação de Fluido

O comportamento de um fluido é governado por 3 leis físicas de conservação, são elas: conservação de massa, conservação de momento e conservação de energia. Para simular o comportamento de um fluido devemos resolver essas três equações. Porém, dificilmente essas equações apresentam soluções analíticas. Por isso, usam-se métodos numéricos para obter uma aproximação satisfatória. Neste capítulo, iremos mostrar, baseado nos trabalhos de Müller *et al.* [24, 26], como utilizar o método SPH para simular, através de partículas, o comportamento de fluidos incompressíveis e isotérmicos.

4.1.

Modelagem de Fluidos com Partículas

Para modelar o comportamento de um fluido incompressível e isotérmico, devemos resolver o problema de conservação de massa e de conservação de momento. Pelo fato do fluido ser isotérmico, a conservação de energia é garantida automaticamente e não precisa ser modelada.

A incompressibilidade do fluido garante que a massa específica do fluido não irá variar com o tempo (durante a simulação), já que a relação entre o volume ocupado pelo fluido e sua massa será constante. A conservação de massa de um fluido é dada pela chamada Equação da Continuidade (Equação 4.1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.1)$$

onde ρ e $\vec{v}$ são a massa específica e a velocidade do fluido, respectivamente. Como a massa específica não varia com o tempo, podemos reescrever a Equação 4.1 da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.2)$$

Pelo fato do fluido ser modelado por partículas, não é necessário resolver a Equação 4.2, já que a conservação de massa está automaticamente garantida. Isto

ocorre porque o número de partículas usadas para representar o fluido é constante e cada partícula possui massa também constante.

Por último a conservação de momento é dada pela Equação de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad (4.3)$$

A Equação 4.3 representa uma forma simplificada da Equação de Navier-Stokes para fluidos newtonianos e incompressíveis. Novamente o uso de partículas simplifica o problema. O lado esquerdo da Equação 4.3 pode ser substituído por $\frac{d\vec{v}}{dt}$ (derivada material), uma vez que as partículas movem-se junto com o fluido, não sendo necessário o termo convectivo $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$. Ou seja, a variação do campo de velocidade é simplesmente a taxa de variação da velocidade das partículas no tempo. Podemos reescrever a Equação 4.3 como sendo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} (-\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v}) \quad (4.4)$$

O lado direito da Equação 4.3 representa três campos de força, são eles: campo de pressão $(-\vec{\nabla} P)$, gravidade $(\rho \vec{g})$ e força de viscosidade $(\mu \vec{\nabla}^2 \vec{v})$, onde μ representa a viscosidade do fluido. A soma desses três campos de força determina a força resultante aplicada ao fluido. Esta força resultante determina a variação do momento do fluido. Com isso, a aceleração da i-ésima partícula que representa o fluido é dado por:

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\vec{f}_i}{\rho_i} \quad (4.5)$$

onde $\vec{a}_i$, $\frac{d\vec{v}_i}{dt}$, $\vec{f}_i$ e ρ_i são a aceleração da i-ésima partícula, a variação da velocidade em relação ao tempo da i-ésima partícula, a força resultante aplicada à i-ésima partícula e a massa específica da i-ésima partícula, respectivamente.

Nas seções seguintes será mostrado como as forças atuantes (lado direito da Equação 4.4) no fluido podem ser modeladas com o método SPH.

4.1.1. Cálculo da Massa específica

Para o uso do método SPH, é necessário o cálculo das massas específicas amostradas nas posições das partículas. Aplicando o método SPH para o cálculo da massa específica, obtemos o seguinte resultado:

$$\rho(\vec{x}_i) = \sum_j m_j \frac{\rho_j}{\rho_j} W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (4.6)$$

que corresponde a:

$$\rho(\vec{x}_i) = \sum_j m_j W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (4.7)$$

Ou seja, a massa específica de cada partícula i é dada pelo somatório das massas das partículas na vizinhança da partícula i , ponderadas pela função de suavização. A Equação 4.7 também é chamada de *summation density*.

4.1.2. Força de Pressão

O termo $(-\vec{\nabla}P)$ presente na Equação 4.3 representa a variação do campo de pressão de um fluido. Esta variação no campo de pressão gera um campo de força de pressão. Aplicando o método SPH (Equação 3.15) ao termo $(-\vec{\nabla}P)$ obtém-se:

$$\vec{f}_i^{pres} = -\vec{\nabla}P(\vec{x}_i) = -\sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j} \vec{\nabla}W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (4.8)$$

A força gerada pela Equação 4.8 não é simétrica. Se interagirmos somente duas partículas, i e j , a força de pressão atuante em i será determinada somente pela pressão amostrada na posição da partícula j e vice versa. Uma vez que a pressão dada nas posições das partículas i e j podem ser diferentes, teremos forças assimétricas:

$$\vec{f}_i^{pres} = -\frac{P_j}{\rho_j} \vec{\nabla}W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h)$$

$$\vec{f}_j^{pres} = -\frac{P_i}{\rho_i} \vec{\nabla}W(\vec{x}_j - \vec{x}_i, h)$$

A falta de simetria é um problema inerente ao método de SPH. Para contornar tal problema e tornar esta força simétrica (garantindo a conservação de momento e a 3ª lei de Newton de ação e reação), Müller *et al.* [24] propuseram a seguinte solução:

$$\vec{\mathbf{f}}_i^{pres} = -\vec{\nabla}P(\vec{x}_i) = -\sum_j m_j \frac{P_j + P_i}{2\rho_j} \vec{\nabla}W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (4.9)$$

A Equação 4.9 resolve o problema de simetria presente na Equação 4.8 uma vez que é usada a média aritmética das pressões das partículas interagindo.

O cálculo do valor da pressão de cada partícula é necessário para se determinar o gradiente de pressão e, conseqüentemente, o campo de força gerado por ele. Usamos a mesma proposta encontrada em Müller *et al.* [24]. A pressão das partículas do fluido pode ser determinada através da Equação de Estado dos gases:

$$P_i = k(\rho_i) \quad (4.10)$$

onde k representa a constante de gás dependente da temperatura do fluido. Müller *et al.* [24] utilizam uma versão modificada da Equação 4.10, proposta por Desbrun [5]:

$$P_i = k(\rho_i - \rho_0) \quad (4.11)$$

onde ρ_0 representa a massa específica de repouso (*rest density*) do fluido e é dado como parâmetro de simulação. Uma vez que a força de pressão depende do gradiente de pressão, a subtração do termo ρ_0 não afeta o campo de força de pressão, já que não afeta o gradiente do campo de pressão.

4.1.3. Força de Viscosidade

A força de viscosidade é dada pelo termo $(\mu \nabla^2 \vec{v})$ da Equação 4.3. Aplicando o método SPH ao termo $(\mu \nabla^2 \vec{v})$, obtém-se

$$\vec{\mathbf{f}}_i^{visc} = \mu \nabla^2 \vec{v}(\vec{x}_i) = \mu \sum_j m_j \frac{\vec{v}_j}{\rho_j} \nabla^2 W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (4.12)$$

Novamente é gerada uma força não simétrica, já que as velocidades de cada partícula são diferentes. Müller *et al.* [24] propuseram o uso da seguinte equação para resolver o problema de simetria.

$$\vec{f}_i^{visc} = \mu \nabla^2 \vec{v}(\vec{x}_i) = \mu \sum_j m_j \frac{\vec{v}_j - \vec{v}_i}{\rho_j} \nabla^2 W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (4.13)$$

O fato da Equação 4.13 depender somente da diferença das velocidades, e não do valor absoluto das velocidades, naturalmente garante a conservação do momento e o princípio de ação e reação.

4.1.4. Tensão Superficial

Apesar de não aparecer na equação de Navier–Stokes, Müller *et al.* [24] modelam as forças de tensão superficial atuantes sobre o fluido. A tensão superficial surge devido a um desbalanceamento de forças. As moléculas do fluido estão sujeitas a uma força de atração de suas moléculas vizinhas. Dentro do fluido essas forças intermoleculares são iguais em todas as direções, balanceando uma às outras. Porém, as forças atuando sobre as moléculas da superfície do fluido não são balanceadas. A força resultante gera o que chamamos de tensão superficial. Devido a tensão superficial, que é tangente à superfície do fluido, surge uma força que é proporcional a curvatura do fluido, atuando na direção inversa à normal à superfície, isto é, apontando para dentro do fluido.

Implementamos o modelo apresentado no trabalho de Müller *et al.* [24] que por sua vez foi baseado nas idéias de Morris [23]. Müller *et al.* [24] descrevem uma grandeza chamada de campo de cor. O campo de cor é um campo onde o valor amostrado em cada partícula vale 1 e em qualquer outro lugar do espaço vale 0. Aplicando o método SPH no campo de cor, obtemos o seguinte:

$$Cs(\vec{x}_i) = \sum_j m_j \frac{1}{\rho_j} W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (4.14)$$

A normal da superfície do fluido é dada pelo gradiente do campo de cor:

$$\vec{n} = \vec{\nabla} Cs(\vec{x}_i) = \sum_j m_j \frac{1}{\rho_j} \vec{\nabla} W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (4.15)$$

A direção da normal está orientada para dentro do fluido, onde a curvatura da superfície é dada pelo Laplaciano do campo de cor:

$$\kappa = -\frac{\nabla^2 C_s}{|\vec{n}|} \quad (4.16)$$

o sinal de menos é necessário para garantir curvatura positiva e superfícies convexas.

Müller *et al.*[24] definem então a força gerada pela tensão superficial atuante sobre a superfície do fluido como sendo:

$$\vec{f}^{surf} = \sigma \kappa \vec{n} = \sigma \nabla^2 C_s \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \quad (4.17)$$

onde σ é uma constante que controla o quanto de tensão superficial se deseja e é dado como parâmetro da simulação.

4.1.5. Forças Externas

Forças externas como gravidade, por exemplo, são aplicadas diretamente às partículas, sem a necessidade de usar o método SPH. O problema de colisão pode ser tratado como força externa, ou seja, a resposta à colisão é aplicada diretamente às partículas.

4.1.6. Interação entre Fluidos

Em [26] Müller *et al.* apresentam uma forma de estender a simulação de fluidos apresentado em [24] para lidar com diferentes fluidos. No trabalho de Müller *et al.* [26], os autores propõem um novo modelo de simulação capaz de simular mudanças de fase de um fluido, interação entre ar e água, interação entre dois fluidos e até mesmo a simulação de um “lava lamp”. Neste trabalho abordamos apenas os aspectos necessários para a interação entre dois fluidos (líquidos) seguindo as idéias apresentadas em [26].

Para a interação entre dois fluidos, os autores de [26] propõem a mudança de alguns atributos do fluido considerados “globais”, isto é, iguais para todas as partículas, para atributos que podem variar de partícula para partícula. A primeira

modificação sugerida em [26], é permitir que as partículas possam ter valores de coeficiente de viscosidade, constante de gás e massa específica de repouso diferentes uma das outras. A segunda modificação é a mudança do cálculo da força de viscosidade, para levar em conta os coeficientes de viscosidades por partículas. Müller *et al.* [26] propõem a seguinte equação para força de viscosidade:

$$\mu \nabla^2 \vec{v}(\vec{x}_i) = \sum_j \frac{\mu_i + \mu_j}{2} m_j \frac{\vec{v}_j - \vec{v}_i}{\rho_j} \nabla^2 W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \quad (4.18)$$

Usando a Equação 4.18 o cálculo da força de viscosidade passa a considerar a média dos coeficientes de viscosidade das partículas interagindo.

Com essas duas modificações, é possível simular o efeito de empuxo entre dois fluidos. O empuxo é simulado com o uso por partícula da massa específica de repouso. A massa específica de repouso (termo ρ_0 na Equação 4.11) é responsável por atrair ou repelir partículas a fim de chegar a um estado de equilíbrio. Quando dois fluidos com diferentes massas específicas são misturados, surge um gradiente de massa específica entre as partículas e conseqüentemente um gradiente de pressão na interface dos fluidos (Figura 3).

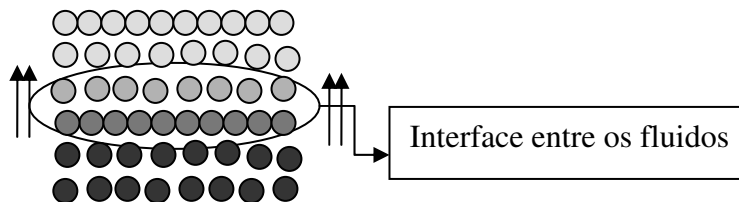


Figura 3 As partículas claras possuem massa específica de repouso X. As partículas escuras possuem massa específica de repouso 2X. As setas indicam o gradiente de massa específica e conseqüentemente o gradiente de pressão resultante na interface dos fluidos.

O gradiente de pressão na interface dos fluidos será responsável por fazer o fluido menos denso emergir sobre o fluido mais denso. Os autores de [26] propõem uma nova força chamada de força de empuxo artificial. Esta força é necessária para a correta simulação do empuxo. O método SPH, por sua natureza, somente obtém resultados satisfatórios se o domínio for bem amostrado. Quando

dois fluidos com massas específicas de repouso diferentes estão interagindo, é possível que somente algumas poucas partículas do fluido menos denso estejam dentro do outro fluido (mais denso). Ao se calcular a massa específica dessas partículas isoladas, o valor da massa específica será mais alto do que deveria ser, pois no cálculo da massa específica (Equação 4.7), a contribuição será muito maior das partículas do outro fluido. Conseqüentemente essas partículas isoladas ou emergirão de forma lenta ou nem mesmo conseguirão emergir do fluido mais denso. Para contornar este problema de amostragem, os autores propõem a força artificial de empuxo dada por:

$$f^{empuxo} = b(\rho - \rho_0)\vec{g} \quad (4.19)$$

onde b é uma constante de controle dada como parâmetro e $\vec{g}$ é a gravidade.

4.2. Funções de Suavização

Neste trabalho utilizamos as mesmas funções de suavização propostas por Müller *et al.* [24]. Todas as funções de suavização propostas por Müller *et al.* [24] obedecem às condições levantadas no Capítulo 3, Seção 3.3.

A primeira função de suavização proposta por Müller *et al.* [24] é:

$$W_{poly6}(\vec{x} - \vec{x}', h) = \frac{315}{64\pi h^9} \begin{cases} (h^2 - r^2)^3 & 0 \leq r \leq h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.20)$$

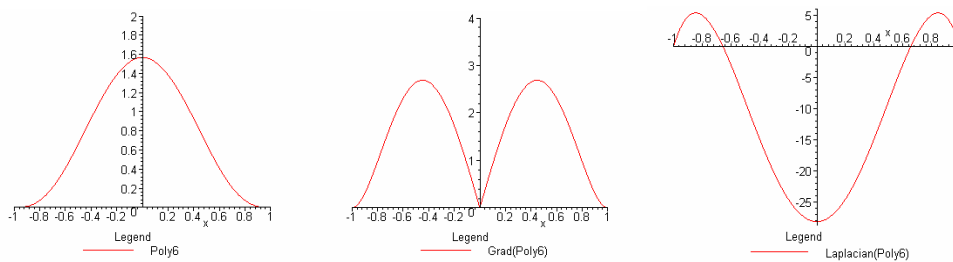


Figura 4 Gráfico da função de suavização W_{poly6} e suas derivadas usada por Müller *et al.* [24]. O eixo das ordenadas representa o valor da função de suavização e o eixo das abscissas representa a distância entre os pontos. O gráfico mais à esquerda representa a função de suavização. O gráfico do meio representa o gradiente de W_{poly6} e o mais à direita representa o Laplaciano de W_{poly6} .

A escolha de Müller *et al.* [24] por esta função de suavização se deve ao fato de somente r^2 (quadrado da distância) aparecer na equação, eliminando a necessidade do cálculo de raiz quadrada presente no cálculo da distância entre os pontos. Isto faz com que a função de suavização seja avaliada eficientemente. Müller *et al.*[24] utilizam a função de suavização W_{poly6} para o cálculo da massa específica das partículas e da tensão superficial.

Para o cálculo da força de pressão $(-\vec{\nabla}P)$, se fosse utilizada a função W_{poly6} , iria ocorrer o efeito de aglomeração das partículas do fluido, especialmente em situações de alta pressão. Esse efeito se daria pelo fato de que à medida que as partículas se aproximassem, o gradiente de W_{poly6} se aproximaria de zero (Figura 4) e, conseqüentemente, a força de repulsão também se aproximaria de zero. Müller *et al.*[24] propuseram uma segunda função de suavização, para contornar o problema de aglomeração das partículas. A segunda função de suavização proposta por Müller *et al.*[24] foi proposta originalmente por Desbrun [5] e é usada somente no cálculo da força de pressão.

$$W_{\text{spike}} = \frac{15}{\pi h^6} \begin{cases} (h-r)^3 & 0 \leq r \leq h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.21)$$

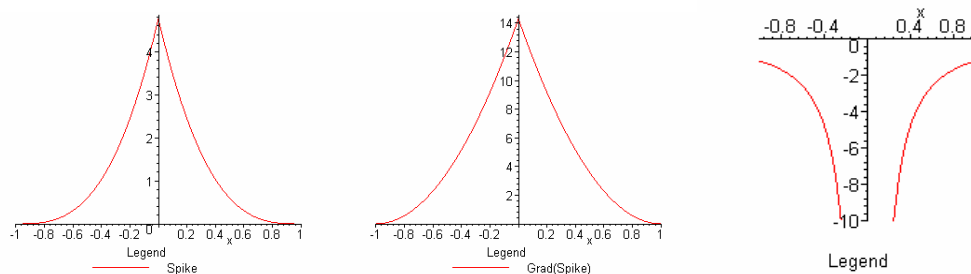


Figura 5 Gráfico da função de suavização W_{Spike} e suas derivadas usada por Müller *et al* [24]. O eixo das ordenadas representa o valor da função de suavização e o eixo das abscissas representa a distância entre os pontos. O gráfico mais à esquerda representa a função de suavização. O gráfico do meio representa o gradiente de W_{Spike} e o mais à direita representa o Laplaciano de W_{Spike} .

Ao se usar a Equação 4.21, a força de repulsão entre as partículas do fluido aumenta de acordo com o inverso da distância entre as partículas, não permitindo o efeito de aglomeração (Figura 5).

A força de viscosidade surge devido à fricção entre as moléculas do fluido causando a transformação de energia cinética do fluido em calor. Se a Equação

4.20 ou a Equação **4.21** fossem usadas no cálculo da força de viscosidade, em certos pontos, o Laplaciano das funções seria negativo (Figura 4 e Figura 5), fazendo com que a força de viscosidade acrescentasse energia ao fluido, ao invés de retirar a energia do fluido. Por causa disso, Müller *et al.*[24] propuseram uma terceira função de suavização, usada no cálculo da força de viscosidade do fluido.

$$W_{viscosity} = \frac{15}{2\pi h^3} \begin{cases} -\frac{r^3}{2h^3} + \frac{r^2}{h^2} + \frac{h}{2r} - 1 & 0 \leq r \leq h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.22)$$

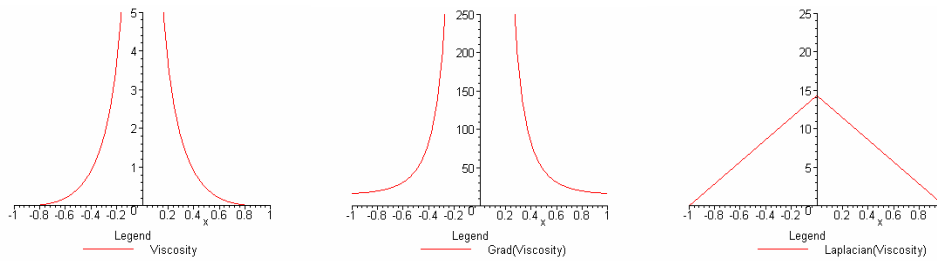


Figura 6 Gráfico da função de suavização $W_{Viscosity}$ e suas derivadas usada por Müller et al [24]. O eixo das ordenadas representa o valor da função de suavização e o eixo das abscissas representa a distância entre os pontos. O gráfico mais à esquerda representa a função de suavização. O gráfico do meio representa o gradiente de $W_{Viscosity}$ e o mais à direita representa o Laplaciano de $W_{Viscosity}$.

Esta função de suavização possui o Laplaciano positivo em todo o domínio (Figura 6), garantindo que a força de viscosidade gerada seja sempre dissipativa.