

5

Escoamento retilíneo de líquido Newtoniano: Formulação bidimensional

A formulação pelo método de elementos finitos foi desenvolvida com o objetivo de estender a análise para escoamentos complexos. Os primeiros passos nesta direção são apresentados neste capítulo. Duas importantes questões são analisadas e discutidas: 1) Qual é a relação do espectro da formulação 1D com o espectro da formulação 2D?; 2) O método de solução do problema de autovalor generalizado pode ser estendido para o problema bidimensional? Seguindo a formulação e discretização apresentadas no capítulo 3, chega-se ao problema de autovalor generalizado cujo espectro é o objeto de interesse. Na tentativa de validação da metodologia em escoamentos bidimensionais, o escoamento de Couette foi escolhido para que os resultados fossem comparados com a formulação unidimensional. O espectro obtido com uma formulação 1D foi amplamente discutido no capítulo anterior. Apesar do escoamento em regime permanente ter solução analítica, o escoamento base é obtido numericamente para diferentes condições de contorno nos planos de entrada e saída. Existem condições de contorno equivalentes, que juntamente com o sistema de equações têm a mesma solução para o regime permanente: perfil de velocidade linear. Apesar da solução em regime permanente ser insensível às condições de contorno, o espectro varia, como conclui Renardy, 2002 [29]. Como na formulação 2D com as condições de contorno adotadas, o nível de pressão deve ser artificialmente definido, acrescentando uma condição de contorno de Dirichlet, nesse caso, o algoritmo do método de solução do problema de autovalor teria que ser alterado para levar em conta este fato. Como o objetivo era testar a aplicação do método em um escoamento bidimensional, resolveu-se fazer o teste em um problema semelhante, porém onde o nível de pressão é definido por uma condição de contorno natural. O problema teste escolhido para esta análise foi o escoamento pistonado (*plug flow*).

Deve-se ressaltar que o assunto tratado neste capítulo representa um primeiro passo na generalização da análise para um escoamento complexo e

por isso várias questões são levantadas e não respondidas no contexto desse trabalho. Elas ficam como sugestões para trabalhos futuros.

5.1 Couette bidimensional

A solução em regime permanente é encontrada com a discretização de elementos finitos/Galerkin das equações governantes (2-8), repetidas aqui:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ Re \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u}. \end{cases}$$

As funções base para encontrar a solução em regime permanente são as mesmas usadas na análise de estabilidade. Para expandir as velocidades polinômios lagrangianos biquadráticos ϕ_k e para a pressão polinômios lineares descontínuos χ_k . Conseqüentemente as funções peso das equações de quantidade de movimento e continuidade vão ser as mesmas funções base para velocidade e pressão, respectivamente.

Cada elemento possui 9 nós, como mostrado na figura 5.1.

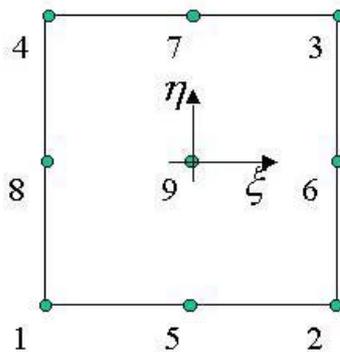


Figura 5.1: Elemento biquadrático de 9 nós.

Em termos das coordenadas locais, as funções base para a velocidade são:

$$\phi_1(\xi, \eta) = \frac{\xi(\xi - 1)\eta(\eta - 1)}{4}$$

$$\phi_2(\xi, \eta) = \frac{\xi(\xi + 1)\eta(\eta - 1)}{4}$$

$$\phi_3(\xi, \eta) = \frac{\xi(\xi + 1)\eta(\eta + 1)}{4}$$

$$\phi_4(\xi, \eta) = \frac{\xi(\xi - 1)\eta(\eta + 1)}{4}$$

$$\phi_5(\xi, \eta) = \frac{(1 - \xi^2)\eta(\eta - 1)}{2}$$

$$\phi_6(\xi, \eta) = \frac{\xi(\xi + 1)(1 - \eta^2)}{2}$$

$$\phi_7(\xi, \eta) = \frac{(1 - \xi^2)\eta(\eta + 1)}{2}$$

$$\phi_8(\xi, \eta) = \frac{\xi(\xi - 1)(1 - \eta^2)}{2}$$

$$\phi_9(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

A figura 5.2 ilustra a forma destas funções base.

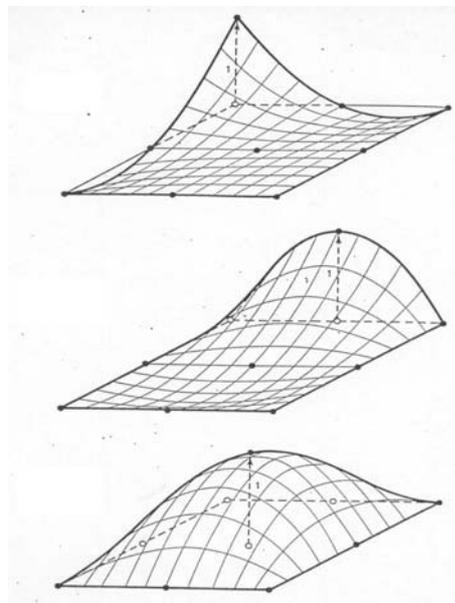


Figura 5.2: Funções base biquadráticas.

A variação da pressão em cada elemento vai escrita como:
 $p = P_1 + P_2 \eta + P_3 \xi$, conseqüentemente, as função base χ_k são:

$$\chi_1(\xi, \eta) = 1$$

$$\chi_2(\xi, \eta) = \eta$$

$$\chi_3(\xi, \eta) = \xi$$

Observe que: $p(\xi = 0, \eta = 0) = P_1$; $\frac{dp}{d\eta} = P_2$ e $\frac{dp}{d\xi} = P_3$.

Com o objetivo de comparar a solução e o espectro do escoamento de Couette bidimensional com o unidimensional vamos impor condições de contorno periódicas. Então, a parede de cima tem velocidade na direção x , $U = 1$ e em y , $V = 0$, a de baixo está parada, $U = 0$ e $V = 0$, essa é a metade superior da geometria usada anteriormente. Na entrada e saída do escoamento impõe-se periodicidade. A figura 5.3 mostra a numeração dos nós para dois elementos na direção x e dois elementos na direção y . Os nós da entrada são os mesmos da saída, para garantir a periodicidade.

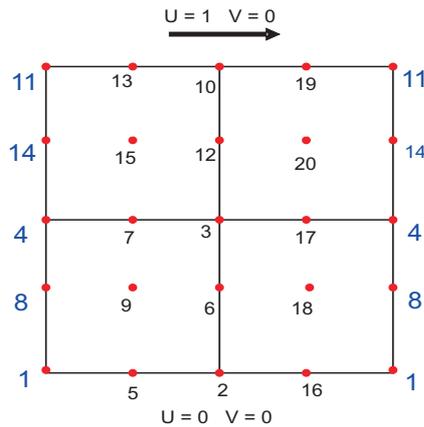


Figura 5.3: Escoamento de Couette bidimensional.

Vamos identificar as possíveis ondas formadas pelos campos perturbados para possibilitar a comparação com o problema unidimensional. Como no caso 1D, as perturbações variam de forma conhecida na direção x , precisamos relacioná-las às ondas que podem ser descritas pela malha utilizada na geometria 2D. Escolhemos usar dois elementos em x e vários em y , já que no caso unidimensional discretizava-se apenas y . Considerando os $2 * NEX + 1 = 5$ nós distribuídos em x , as possíveis ondas partindo de zero têm comprimento $\lambda = 0.5$, $\lambda = 1$ e $\lambda = \infty$, sendo NEX o número de

elementos em x . Logo, números de onda $\alpha = 1/\lambda$; $\alpha = 2$, $\alpha = 1$ e $\alpha = 0$, como mostra a figura 5.4

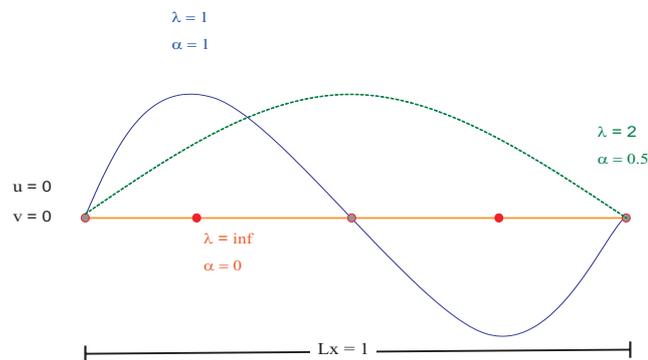


Figura 5.4: As possíveis ondas para dois elementos em x .

Mais uma condição de contorno de Dirichlet é necessária para impor o nível de pressão, impõe-se $P = 0$ no primeiro elemento. Essa condição invalida a divisão das matrizes na última etapa das transformações que eliminam os autovalores infinitos.

Na análise apresentada em 3.3.1, considera-se o número de condições de contorno par, já que as condições são impostas na velocidade $\mathbf{u} = (u, v)$. Como as linhas e colunas referentes às condições de contorno essenciais são retiradas das matrizes, um número ímpar delas impossibilita que a divisão proposta (4.8) seja feita. Mais de uma solução pode ser tentada nesse caso, mas como qualquer mudança na discretização ou nas condições de contorno alteram o espectro, primeiramente vamos analisá-lo sem eliminar os infinitos.

Sendo um sistema não linear, o método de Newton é usado para calcular o escoamento permanente. As condições de contorno são as mostradas na figura 5.3 em um canal quadrado 1×1 com 2 elementos na direção x e 120 na y e $Re = 500$.

A solução em regime permanente foi exatamente a esperada; a velocidade u_0 linear como mostra a figura 5.5; a velocidade v_0 está na ordem de $O(10^{-13})$ e o gradiente de pressão também zero, na ordem de $O(10^{-12})$.

O vetor solução do regime permanente é substituído nas equações para que seja feita análise de estabilidade. Chega-se ao problema de autovalor com a estrutura das matrizes mostradas em (3-9). O problema de autovalor generalizado é calculado novamente com o método QZ.

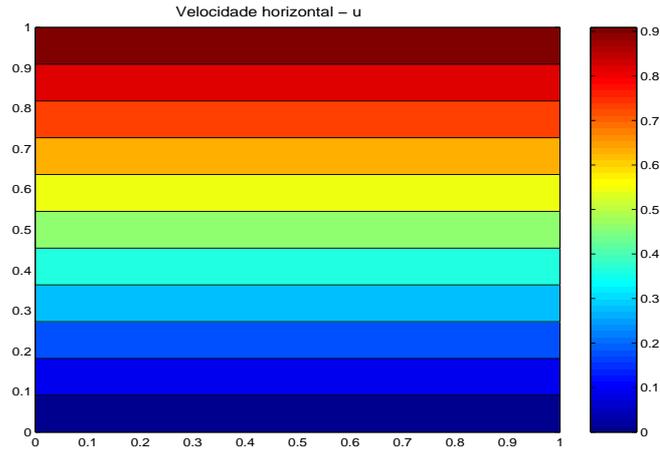


Figura 5.5: Velocidade u_0 .

O espectro converge com a malha, como pode ser visto na figura 5.6, de 80 para 120 elementos a concordância do autovalor mais próximo do eixo imaginário σ_{\max} é menor que 10^{-17} . Apenas mais afastado da região de perigo é que os dois espectros diferem entre si, exatamente como no caso 1D.

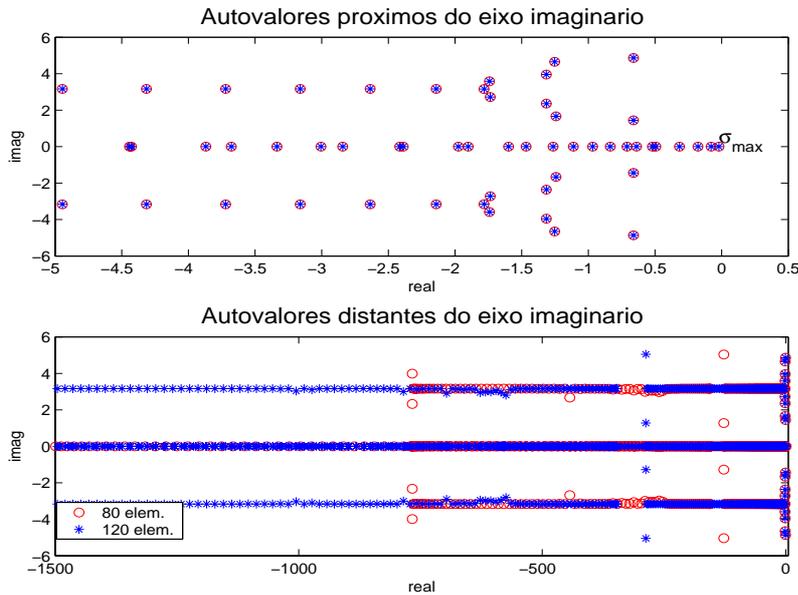


Figura 5.6: Espectro da formulação 2D com número fixo de elementos em x , $NEX = 2$ e variando o número de elementos em y , $NEY = 80$ e $NEY = 120$ elementos.

A princípio não é clara a relação com o espectro unidimensional. Porém, é importante considerar que estamos trabalhando na metade da geometria em que o espectro 1D foi encontrado. Esperávamos que o espectro unidimensional com a união dos três diferentes α s, $\alpha = 0$, $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 1$

fosse recuperado pelo problema bidimensional. O autovalor que mais se aproxima do eixo imaginário deveria ser quando $\alpha = 0$, ou seja, puramente real. Observando o espectro obtido pelo problema bidimensional, percebe-se que alguns dos autovalores do problema 1D com $\alpha = 0$ são recuperados, como pode ser visto na figura 5.7. Inclusive o mais próximo no espectro 2D é o segundo mais próximo do espectro analítico.

E ainda, autovalores semelhantes aos do espectro 1D aparecem duas vezes no espectro 2D, uns com a parte imaginária transladada de 3.16 e outros de -3.16. Usando as curvas críticas de Morawetz, 1952 [1], os autovalores do problema 1D com $\alpha = 3.3$ se encontram na mesma vizinhança do espectro calculado pela geometria bidimensional se deslocado 3.16 no eixo imaginário, conforme mostra a figura 5.7. Talvez o fato de aparecerem 2 espectros no escoamento 2D pode estar relacionado com geometria usada, já que é a metade superior da geometria 1D.

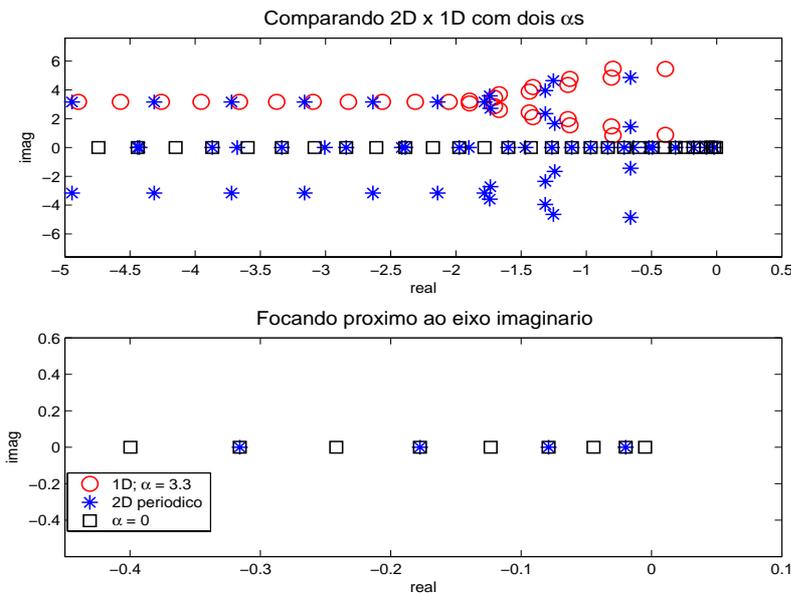
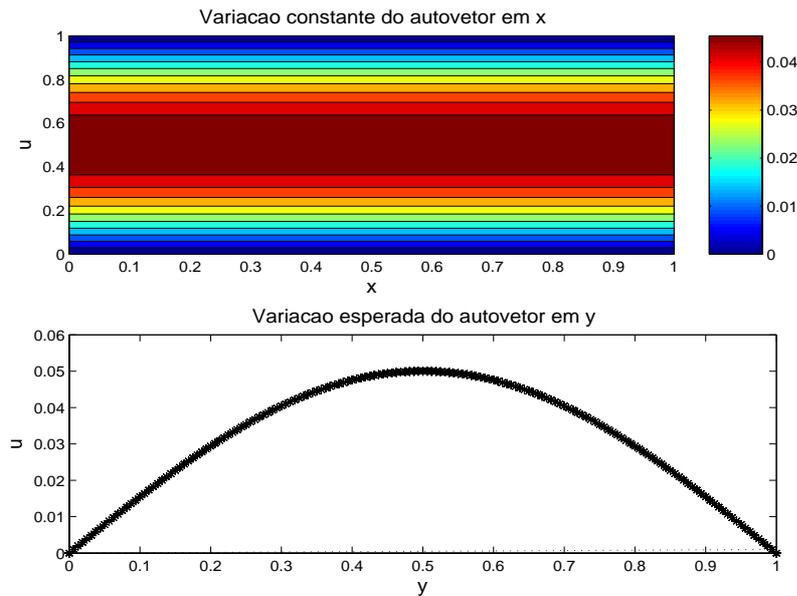


Figura 5.7: Espectro da formulação 2D com 80 e 100 elementos.

A concordância do autovalor $\sigma_{\max} = -0.01973920886646$ calculado no problema 2D, com o segundo autovalor, $\alpha = -0.01973920880218$, do caso analítico no limite $\alpha \rightarrow 0$ é da ordem $\mathcal{O}(10^{-10})$. O autovetor também concorda, observe que a parte do autovetor que se refere a u' tem uma variação constante na direção x e uma variação senoidal em y . Lembrando que α é o número de onda na direção x , esses resultados acompanham a solução analítica do problema limite quando $\alpha \rightarrow 0$ na análise 1D e podem ser vistos na figura 5.8.


 Figura 5.8: Autovetor relativo ao autovalor σ_{\max}

Esses são os primeiros resultados na geometria bidimensional. Muitas perguntas surgiram. Veremos que qualquer alteração na modelagem, ainda que não mude o escoamento base, influencia os autovalores. Por isso, um primeiro passo futuro é fazer y exatamente como no caso unidimensional, indo de -1 a 1 , estamos com y de 0 a 1 . Outra observação é que não foi imposta nenhuma velocidade na entrada das perturbações, apenas periodicidade, por isso, não se sabe quais números de onda estão sendo recuperados pelo espectro bidimensional. Dada a alta sensibilidade do espectro às condições de contorno, somente um estudo mais cuidadoso vai responder para quais condições o espectro encontrado no caso 2D pode ser comparado ao 1D.

As transformações precisam ser adaptadas para comportar um número ímpar de condições de contorno essenciais. Isso não foi feito ainda, porém, um outro escoamento vai ser analisado cujas transformações possam ser usadas.

5.2

Solução do problema de autovalor em um escoamento bidimensional

Com o objetivo de testar o método proposto para solução do problema de autovalor em um escoamento bidimensional, a análise de estabilidade é feita no escoamento pistonado (*plug flow*) descrito na figura 5.9. Observe que o nível de pressão do escoamento é definido através da condição de contorno

da fronteira superior. Desta forma, o nível de pressão não precisa ser fixado artificialmente através da substituição de um dos resíduos da equação de continuidade. Assim, as transformações desenvolvidas na seção 3.3.1 podem ser aplicadas diretamente, sem nenhuma adaptação.

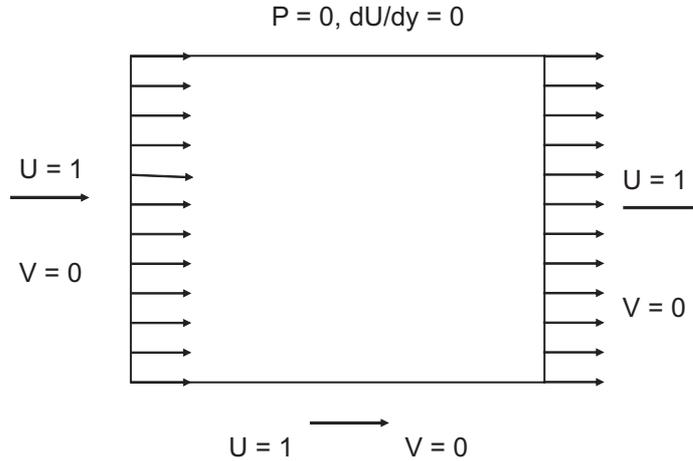


Figura 5.9: Escoamento pistonado.

Os autovalores do problema original e do transformado, para $Re = 100$ em uma cavidade 1×1 com um número de elementos em x , $NEX = 2$ e em y , $NEY = 80$ são apresentados na figura 5.10. O par conjugado mais próximo do eixo imaginário no problema original concorda na ordem de $O(10^{-6})$ com o do problema transformado. E ainda, para esse número de elementos, a dimensão do problema original é 2090 enquanto a do transformado é 480, quatro vezes menor.

Aumentando o número de elementos em aproximadamente 20%, de 80 pra 100, na direção y , o par de autovalores mais próximo do eixo imaginário apresenta um erro relativo de 10^{-5} . Apenas os autovalores mais afastados são sensíveis ao nível de discretização, como mostrado na figura 5.10.

Porém, ao aumentar o número de elementos na direção x , o espectro do problema transformado perde precisão, se afastando do espectro do problema original. Calculando o espectro para um número fixo de elementos em y , $NEY = 2$ e aumentando o número de elementos em x , nota-se que a partir de $NEX = 7$ os autovalores calculados depois das transformações começam a diferir dos calculados no problema original. Os espectros A e B da figura 5.11 foram calculados com $NEX = 6$ e $NEX = 9$. Observe que em A os autovalores coincidem com o espectro do problema original, porém

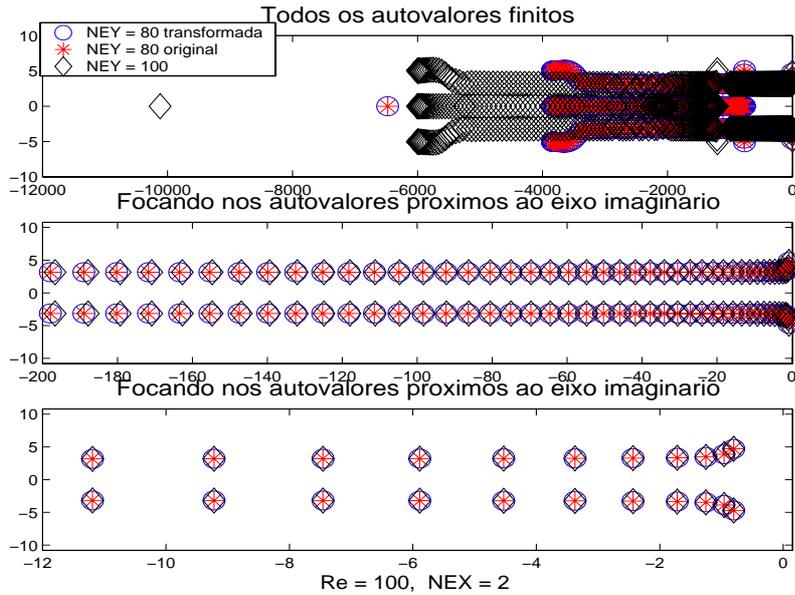


Figura 5.10: Espectro do escoamento pistonado numa cavidade 1×1 e $Re = 100$. Comparando os autovalores calculados antes e depois das transformações para 2×80 elementos e ainda refinando na direção y , 2×100 elementos.

aumentando NEX , como em B, o espectro calculado após as transformações torna-se completamente diferente, inclusive aparecendo autovalores cuja parte real é positiva. Os motivos desse comportamento ainda estão sendo avaliados e parecem ter relação com imprecisões no cálculo da inversa da submatriz que aparece na definição de \mathbf{T}_ℓ . Ainda na figura 5.11, C e D são os autovalores calculados com $NEX = 9$ e $NEX = 11$ apenas no problema original. Repare que mesmo para esses poucos elementos, os autovalores mais próximos do eixo imaginário diferem de 10^{-2} , e esse erro diminui com o aumento do número de elementos.

5.3 A influência das condições de contorno

De acordo com Renardy, 2002 [29] o efeito das condições de contorno na estabilidade é crucial. Por isso, voltando ao escoamento de Couette bidimensional, vamos observar a influência de algumas condições de contorno no espectro.

O mesmo domínio da figura 5.3, porém com outras condições de contorno vai servir para ilustrar essa influência. Primeiramente a condição de periodicidade vai ser substituída por um perfil linear de velocidade imposto na entrada da cavidade e escoamento desenvolvido na saída, figura

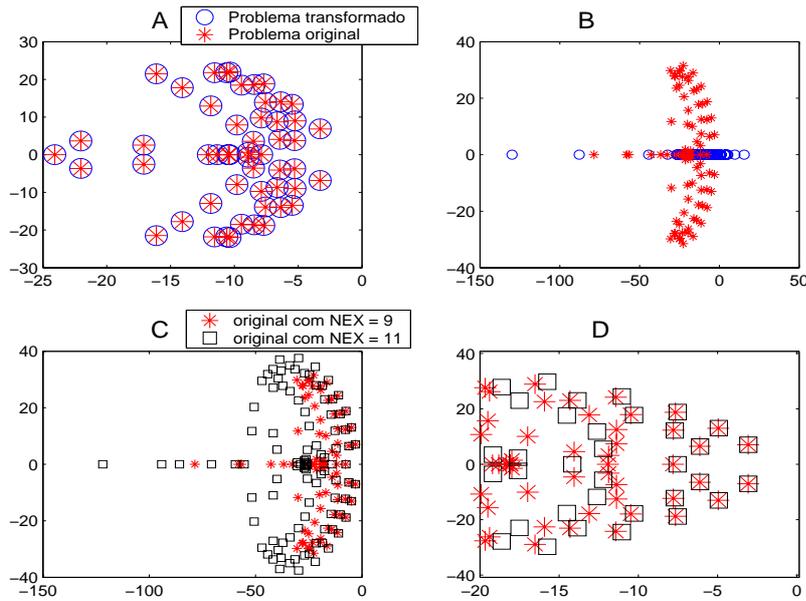


Figura 5.11: Espectro do escoamento pistonado num domínio de dimensão 1×1 e $Re = 100$. Comparando os autovalores calculados antes e depois das transformações para 2 elementos fixos em y , $NEY = 2$, e variando os elementos em x ; $NEX = 6$ em A, $NEX = 9$ em B. Em C os espectros calculados com 9×2 e 11×2 elementos são comparados. Observe que os autovalores mais próximos do eixo imaginário, como mostra D, começam a convergir mesmo com poucos elementos.

5.12 (A). Depois, vamos supor que o escoamento chega e sai da cavidade desenvolvido, figura 5.12 (B). Em ambos, o escoamento permanente tem exatamente a mesma solução encontrada no caso periódico; a velocidade u_0 mostrada na figura 5.5 e os campos da velocidade v_0 e da pressão p_0 nulos.

Mesmo o escoamento permanente sendo igual ao do caso onde a condição de contorno é periódica, o espectro é diferente. Os dois escoamentos são estáveis para os números de Reynolds testados; contudo, os autovalores mais próximos do eixo imaginário em um dos casos é puramente real e no outro é um par complexo conjugado, como mostram os gráficos 5.13 e 5.14.

Como já foi comentado, o autovalor mais próximo do eixo imaginário no caso unidimensional, para um Re fixo, acontece quando fazemos o número de onda tender a zero, $\alpha \rightarrow 0$. Mesmo não sendo o mesmo autovalor do problema unidimensional, o autovalor mais próximo do eixo imaginário, no caso (B) é puramente real e tem autovetor relativo à velocidade u' constante em x e com uma variação senoidal em y , assim como o caso analítico. Ainda que sem conseguir relacionar bem os resultados preliminares aqui obtidos com outros da literatura, o surgimento de semelhanças estimula a continuidade do estudo.

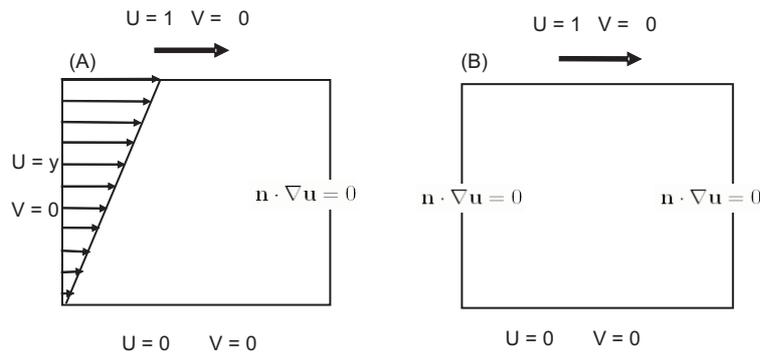


Figura 5.12: Condições de contorno.

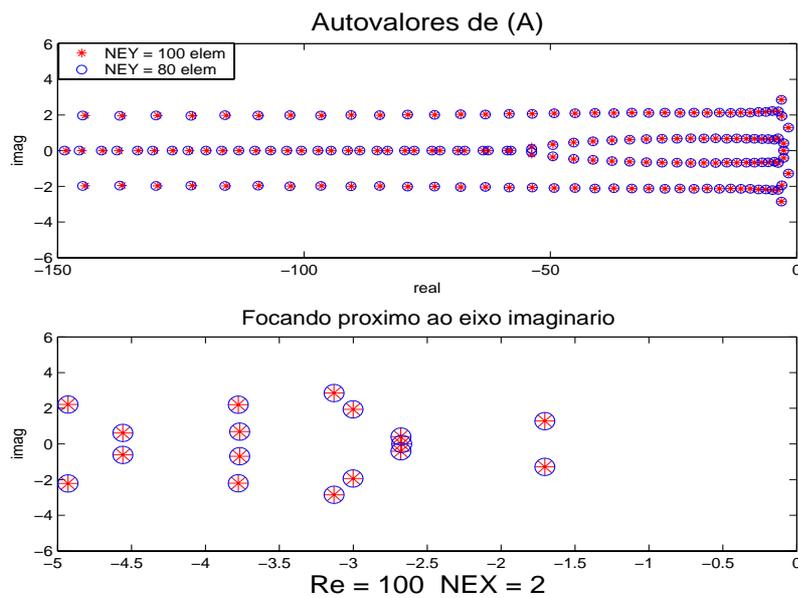


Figura 5.13: Espectro para as condições de contorno: perfil de velocidade imposto na entrada e escoamento desenvolvido na saída, (A). Repare que os autovalores mais próximos do eixo imaginário são um par conjugado.

Uma grande dificuldade na validação da análise de estabilidade em escoamentos complexos consiste na escassez de resultados confiáveis disponíveis.

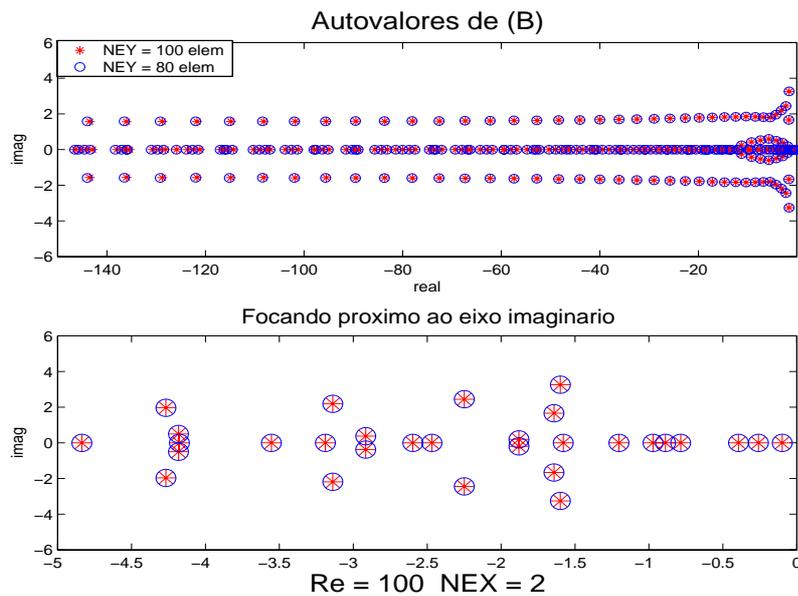


Figura 5.14: Espectro para as condições de contorno: escoamento desenvolvido na entrada e na saída, (B). Repare que o autovalor mais próximo do eixo imaginário é puramente real.

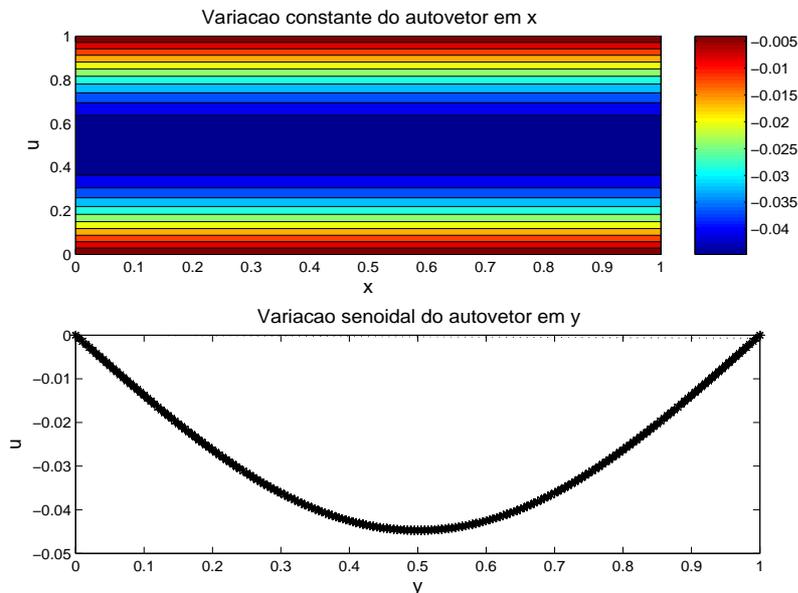


Figura 5.15: Autovetor relativo ao autovalor mais próximo do eixo imaginário em 5.14 que é puramente real.

