

2

Desenvolvimento teórico

Sendo o interesse principal do trabalho estabilidade de escoamentos, neste capítulo apresentam-se as equações de movimento para fluidos incompressíveis baseadas nas leis de conservação. A análise de estabilidade clássica consiste em primeiramente encontrar a solução em regime permanente, chamada de escoamento base. O principal objetivo do estudo é determinar se o escoamento em regime permanente pode se tornar instável ao sofrer perturbações infinitesimais. Na prática, qualquer processo industrial está sujeito a vibrações. A estabilidade vai ser analisada resolvendo o sistema transiente para o comportamento a longo prazo da solução em regime permanente perturbada com uma dependência exponencial no tempo. Os campos são escritos como sendo o escoamento base mais uma perturbação, como veremos.

Como a análise de estabilidade será feita em escoamentos com fluidos newtonianos e viscoelásticos, além das equações de conservação de massa e quantidade de movimento linear, algumas equações constitutivas são apresentadas.

2.1

As equações de movimento

As equações, em sua forma dimensional, para propriedades constantes:

- Conservação de massa (Continuidade):

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0. \quad (2-1)$$

$\mathbf{u}$ é o campo de velocidade e $*$ significa uma grandeza dimensional.

- Conservação de quantidade de movimento linear:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \rho(\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + \nabla^* \cdot \mathbf{T}^*. \quad (2-2)$$

onde ρ é a massa específica do fluido, p pressão e $\mathbf{T}$ extra-tensão.

- Equação constitutiva - para um fluido newtoniano e incompressível, a extra-tensão é proporcional à taxa de deformação, onde o tensor taxa de deformação $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$:

$$\mathbf{T}^* = \mu [(\nabla^* \mathbf{u}^*) + (\nabla^* \mathbf{u}^*)^T]. \quad (2-3)$$

Para tornar mais simples a compreensão das equações, realiza-se uma análise com o objetivo de encontrar parâmetros adimensionais, para isso supõem-se escalas típicas de velocidade e distância, denotadas por U e L respectivamente. A partir dessas escalas define-se $\frac{L}{U}$ como escala para o tempo e $\frac{\mu U}{L}$ para a pressão e tensão.

Assim, tem-se:

$$\mathbf{x}^* = L \mathbf{x}, \quad \mathbf{u}^* = U \mathbf{u}, \quad t^* = \frac{L}{U} t, \quad p^* = \mu \frac{U}{L} p, \quad \mathbf{T}^* = \mu \frac{U}{L} \mathbf{T}, \quad (2-4)$$

note que nas novas variáveis $\nabla^* = L^{-1} \nabla$.

Substituindo as novas variáveis na equação (2-2):

$$\rho \frac{U}{U/L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \frac{U^2}{L} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\mu U}{L^2} \nabla p + \mu \frac{U}{L^2} \nabla \cdot \mathbf{T},$$

dividindo por $\rho \frac{U^2}{L}$ chega-se a:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\mu}{LU\rho} \nabla p + \frac{\mu}{LU\rho} \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

Lembrando que a viscosidade cinemática $\nu = \mu/\rho$ e que $Re = \frac{UL}{\nu}$ é o número de Reynolds, então as equações (2-1), (2-2) e (2-3) em sua forma adimensional são:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ Re \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}, \end{cases} \quad (2-5)$$

$$\left\{ \mathbf{T} = [(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T] \right\}. \quad (2-6)$$

Para fluido newtoniano, a relação entre a extra-tensão $\mathbf{T}$ e a taxa de deformação $\dot{\gamma} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ é uma relação algébrica. As equações de conservação podem ser escritas em função do campo de velocidade e pressão, onde a extra-tensão não aparece explicitamente.

Se o fluido é Newtoniano e incompressível, então o divergente do tensor das tensões viscosas pode ser escrito como o Laplaciano da velocidade:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= \nabla \cdot [(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T] = \\ &= \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})}_{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})} + \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T}_{\nabla^2 \mathbf{u}}. \end{aligned}$$

por incompressibilidade, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, então:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2-7)$$

Finalmente a equação:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ Re \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u}. \end{cases} \quad (2-8)$$

Algumas equações constitutivas

Um material viscoelástico, como o próprio nome sugere, apresenta simultaneamente propriedades viscosas e elásticas. A caracterização do comportamento do material como elástico ou viscoso depende da escala de tempo do experimento em relação ao tempo natural do material (tempo de relaxação).

Os líquidos viscoelásticos apresentam características diferentes das encontradas nos fluidos newtonianos. A principal característica de um líquido viscoelástico é que a tensão é função da história de deformação.

Muitos modelos constitutivos foram desenvolvidos com o objetivo de melhor descrever o comportamento do material viscoelástico. A complexidade dos modelos existentes varia de acordo com o comportamento mecânico que ele se propõe a descrever. As equações constitutivas para líquidos viscoelásticos podem ser classificadas com modelos diferenciais e integrais.

Uma das equações constitutivas diferenciais que descreve o comportamento de soluções poliméricas bastante utilizada é dada pelo modelo de Giesekus, 1982 [6], que é baseado nas idéias de Rouse, 1953 [2]. As moléculas do fluido são descritas como bolas ligadas por molas e Giesekus estendeu essa idéia levando em consideração arrasto e o movimento browniano das moléculas.

Neste modelo a extra-tensão ($\mathbf{T}$) é dividida em uma contribuição newtoniana do solvente ($\mathbf{T}_s$) e uma não newtoniana relacionada com a presença das moléculas do polímero em solução ($\mathbf{T}_p$).

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}_s^* + \mathbf{T}_p^* \quad (2-9)$$

novamente, $*$ representa grandeza dimensional.

Assim, a contribuição newtoniana é descrita pelo modelo constitutivo já apresentado em (2-3), lembrando que $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$:

$$\mathbf{T}_s^* = \mu_s \dot{\boldsymbol{\gamma}}^* \quad (2-10)$$

Enquanto que a contribuição elástica é descrita por uma equação de transporte:

$$\mathbf{T}_p^* + \theta \left[\frac{D\mathbf{T}_p^*}{Dt} - (\nabla^* \mathbf{u}^*) \mathbf{T}_p^* - \mathbf{T}_p^* (\nabla \mathbf{u}^*)^T \right] + \frac{\theta \alpha}{\mu_p} \{ \mathbf{T}_p^* \cdot \mathbf{T}_p^* \} = \mu_p \dot{\boldsymbol{\gamma}}^* \quad (2-11)$$

onde μ_s e μ_p são viscosidades relacionadas a contribuição newtoniana e elástica respectivamente (viscosidades em taxas de deformação nula), θ é o tempo de relaxação e α é o parâmetro de mobilidade (*“mobility factor”*). A origem do termo envolvendo α está associado ao movimento browniano anisotrópico e ao arrasto hidrodinâmico anisotrópico nas moléculas (ver Bird [10] pg. 353).

A derivada material é dada por: $\frac{D\mathbf{T}_p^*}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{T}_p^*}{\partial t} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{T}_p^*$, e o termo entre colchetes na equação (2-11) é conhecido como derivada convectada, representada por:

$$\mathbf{T}_{(1)}^* = \frac{D\mathbf{T}_p^*}{Dt} - (\nabla^* \mathbf{u}^*) \mathbf{T}_p^* - \mathbf{T}_p^* (\nabla \mathbf{u}^*)^T \quad (2-12)$$

Usando (2-10) e (2-9) e substituindo $\mathbf{T}_p^* = \mathbf{T}^* - \mu_s \dot{\boldsymbol{\gamma}}^*$ em (2-11)

pode-se reescrever o modelo constitutivo em apenas uma equação:

$$\mathbf{T}^* + \theta \mathbf{T}_{(1)}^* + \frac{a\theta}{\mu} \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T}^* + a\lambda^t (\dot{\gamma} \cdot \mathbf{T}^* + \mathbf{T}^* \cdot \dot{\gamma}^*) = \mu (\dot{\gamma}^* + \lambda^t \dot{\gamma}_{(1)}^*) - a \frac{\lambda^{t2}}{\theta} \dot{\gamma}^* \cdot \dot{\gamma}^* \quad (2-13)$$

onde $\mu = \mu_s + \mu_p$ é a viscosidade total, θ é o tempo de relaxação, $\lambda^t = \theta \frac{\mu_s}{\mu}$ o tempo de retardamento e $a = \frac{\alpha}{1-(\lambda^t/\theta)}$ fator de mobilidade modificado.

A partir desse modelo deriva-se outros dependendo da escolha dos parâmetros, por exemplo:

– Leonov, $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\lambda^t = 0 \Rightarrow a = \alpha = \frac{1}{2}$:

$$\mathbf{T}^* + \theta \mathbf{T}_{(1)}^* + \frac{\theta}{2\mu} \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T}^* = \mu (\dot{\gamma}^*)$$

– Oldroyd-B, $\alpha = 0$ e $\lambda^t > 0 \Rightarrow a = 0$:

$$\mathbf{T}^* + \theta \mathbf{T}_{(1)}^* = \mu (\dot{\gamma}^* + \lambda^t \dot{\gamma}_{(1)}^*)$$

– Maxwell, $\alpha = 0$ e $\lambda^t = 0 \Rightarrow \mu_s = 0$ e $a = 0$:

$$\mathbf{T}^* + \theta \mathbf{T}_{(1)}^* = \mu \dot{\gamma}^*$$

O modelo de Maxwell é usado em vários trabalhos devido a sua maior simplicidade.

Fazendo a análise adimensional definida em (2-4), o número adimensional conhecido como número de Weissenberg $We = \theta \frac{U}{L}$ aparece naturalmente e a equação de Maxwell pode ser escrita como:

$$\mathbf{T} + We \mathbf{T}_{(1)} = \dot{\gamma}$$

onde, $\mathbf{T}_{(1)} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} - (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{T} - \mathbf{T} (\nabla \mathbf{u})^T$ e $\dot{\gamma} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T$.

Resumindo, o sistema de equações que governam um escoamento de um líquido viscoelástico, modelado com a equação constitutiva de Maxwell, é dado por:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ Re \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}, \\ \mathbf{T} + We \left[\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} - (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{T} - \mathbf{T} (\nabla \mathbf{u})^T \right] = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T. \end{cases} \quad (2-14)$$

2.2

Perturbando o escoamento nos limites da estabilidade linear

Desde o primeiro contato com sistemas dinâmicos, aprende-se a observar que existem posições de equilíbrio que são mais prováveis de serem observadas que outras. Uma maneira de verificar a estabilidade de determinada posição, é perturbá-la e acompanhar se o sistema volta para posição inicial ou não. Um exemplo clássico é a comparação do comportamento de uma partícula num pico ou num vale. Ambos os casos representam posições de equilíbrio do sistema. No primeiro caso, figura 2.1(a), qualquer deslocamento na posição leva a partícula para longe do equilíbrio, logo é instável. No caso da partícula em um vale, figura 2.1(b), pequenas perturbações em sua posição desaparecem e o equilíbrio é estável.

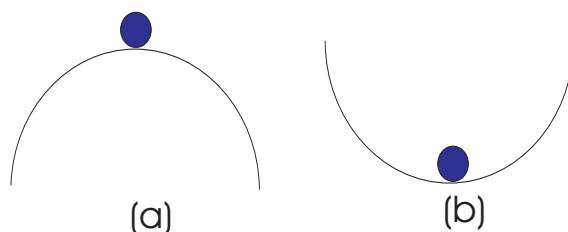


Figura 2.1: Estabilidade de uma partícula

Os métodos para analisar estabilidade de escoamentos foram formulados nos tempos de Reynolds. Alguns métodos para o estudo de oscilações e instabilidades de um sistema de partículas dinâmicas já era bastante desenvolvido. Uma solução conhecida das equações de Newton ou Lagrange de movimento para um sistema era perturbada e linearizada ignorando os termos de produto de perturbações. Supunha-se que as perturbações de cada quantidade poderia ser resolvida em componentes independentes ou modos variando com o tempo de forma exponencial $e^{\sigma t}$, onde σ é uma constante complexa. Os valores de σ para os modos eram calculados das equações linearizadas. Se parte real de σ fosse positiva, $\mathcal{R}(\sigma) > 0$, então a perturbação inicial cresceria - instável. $\mathcal{R}(\sigma) < 0$ - perturbação inicial decresceria - estável.

Stokes, Kelvin e Rayleigh adaptaram esse método para a dinâmica de fluidos. Uma diferença matemática essencial entre fluidos e partículas dinâmicas é que as equações de movimento deixam de ser EDO's (Equações Diferenciais Ordinárias) e passam a ser EDP's (Equações Diferenciais Parciais), o que adiciona dificuldades técnicas ao estudo da estabilidade hidrodinâmica.

Dado um escoamento conhecido, que será chamado de escoamento base e escolhido aqui como permanente, adiciona-se uma perturbação satisfazendo a hipótese linear¹:

$$\Upsilon(\mathbf{x}, t) = \Upsilon_0(\mathbf{x}) + \epsilon \hat{\Upsilon}(\mathbf{x}, t), \quad (2-15)$$

onde Υ representa o campo de interesse, podendo ser escalar, vetorial ou tensorial.

Ao substituir a equação (2-15) no sistema que descreve o escoamento e supondo desprezíveis os termos ϵ^2 (já que as perturbações são pequenas) tem-se um sistema linear onde as incógnitas são os campos perturbados. Observe que se o equilíbrio for instável para pequenas perturbações, então não se deve esperar encontrá-lo na natureza. E entretanto, estabilidade a pequenas perturbações não significa estabilidade global.

Observe que $\hat{\Upsilon}(\mathbf{x}, t)$ pode assumir alguma forma dependendo do escoamento. Por exemplo, dado que as equações são lineares, propõe-se que as perturbações possam ser decompostas em modos normais de número de onda variáveis. A perturbação em modos normais, para escoamentos paralelos (a ser comentado), é uma onda de amplitude dependente de y da seguinte forma:

$$\hat{\Upsilon}(\mathbf{x}, t) = \Upsilon'(y) e^{\sigma t + i(\alpha x + \beta z)} \quad (2-16)$$

onde, $\Upsilon'(y)$ é a amplitude complexa; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são os números de onda na direção x e z respectivamente. Neste caso, procura-se Υ' que depende somente de y já que sua dependência em x e z é postulada.

2.3

Resolvendo problemas de autovalor generalizado

As equações diferenciais que governam a análise de estabilidade ao serem discretizadas dão origem a um problema de autovalor generalizado $(-\sigma \mathbf{M} + \mathbf{J}) \mathbf{c} = \mathbf{0}$. O conjunto de matrizes da forma $(-\sigma \mathbf{M} + \mathbf{J})$ com $\sigma \in \mathbb{C}$ é chamada de feixe de matrizes (*pencil*). Seus autovalores vão ser as raízes do polinômio: $\det(-\sigma \mathbf{M} + \mathbf{J}) = 0$. Se $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ em $(-\sigma \mathbf{M} + \mathbf{J}) \mathbf{c} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{c}$ é o autovetor da matriz $(-\sigma \mathbf{M} + \mathbf{J})$.

¹ ϵ indica que o campo perturbado ($\epsilon \hat{\Upsilon}$) é muito menor que o base (Υ_0), o produto de campos perturbados, sendo da ordem $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, podem ser desprezados, tornando o problema linear.

Na verdade, o problema de autovalor generalizado vindo da análise de estabilidade ainda é mais especial. Uma das matrizes envolvidas, $\mathbf{M}$ é singular. O fato do posto da matriz $\mathbf{M}$ ser menor que o máximo indica que o conjunto de autovalores, $\lambda(\mathbf{J}, \mathbf{M})$, pode ser finito (com dimensão menor que a total) ou infinito; esses casos são ilustrados nos exemplos a seguir:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda(\mathbf{J}, \mathbf{M}) = \{1\}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda(\mathbf{J}, \mathbf{M}) = \mathbb{C}$$

O caso que acontece no primeiro exemplo, cujos autovalores finitos não somam a dimensão do espaço, indica que alguns autovalores se encontram no infinito. No exemplo, a matriz tem dimensão 2 e um dos autovalores é 1 e o outro é ∞ . A existência de autovalores no infinito representa dificuldades numéricas, isso porque uma classe bastante usada dos métodos para encontrar autovalores favorece os de maior módulo. Porém, com interesse nos autovalores finitos, os que estão no infinito são comumente mapeados em valores finitos de módulo pequeno. Ou, ainda que computados, não são levados em consideração.

Mesmo sabendo que calcular os autovalores é na verdade encontrar as raízes de um polinômio, numericamente isso não é viável. Duas classes de métodos se destacam na literatura para o cálculo numérico dos autovalores: os métodos iterativos, que calculam alguns autovalores; métodos diretos, que calculam a forma de Schur da matriz. Muitos deles podem ser encontrados nos livros [19] e [20].

Métodos iterativos

A dimensão das matrizes envolvidas na análise de estabilidade linear de um escoamento varia de acordo com a complexidade do escoamento e também com o tipo de líquido estudado. Veremos que as matrizes vindas dos elementos finitos para um escoamento unidimensional de um líquido newtoniano têm dimensão de 600×600 para um nível de discretização em que o espectro está convergido. Fazendo o mesmo problema em um escoamento bidimensional, ou ainda unidimensional mas com líquido de Maxwell, as dimensões das matrizes envolvidas crescem para além da ordem de $\mathcal{O}(10^4)$. Por isso, muitas vezes o cálculo de todos os autovalores e autovetores é impraticável. Assim, a utilização de métodos de projeção como

Arnoldi são extensamente encontrados. Vamos descrever brevemente aqui apenas os mais comuns, enquanto que alguns outros serão apenas citados e veremos ao longo da tese uma abordagem diferente.

Considere o problema de autovalor clássico $\mathbf{A}\mathbf{c}' = \mu\mathbf{c}'$ com $\mathbf{A}$ uma matriz complexa não-hermitiana de dimensão n . O método de Arnoldi, [19], tem como finalidade construir um conjunto de m vetores $\mathbf{x}_j$, $j = 1 \dots m$ com $m \leq n$ que formam uma base ortonormal de um subespaço de Krylov definido como $\mathcal{H}(\mathbf{A}, \mathbf{x}_1, m) = \text{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{A}\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{x}_1)$. O processo iterativo é iniciado a partir de $\mathbf{x}_1$, com norma euclidiana 1, e os outros vetores $(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m)$ são construídos a partir da seguinte relação recursiva:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \sum_{j=1}^k h_{j,k}\mathbf{x}_j, \\ h_{j,k} &= (\mathbf{x}_j, \mathbf{A}\mathbf{x}_k); \quad j \leq k, \\ &= (\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}); \quad j = k+1, \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1}/h_{k+1,k},\end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \dots, m-1$. Assim, os vetores $\mathbf{x}_j$, $j = 1 \dots m$, são ortogonais por construção e os coeficientes $h_{j,k}$ formam uma matriz de Hessenberg superior $\mathbf{H}$ de dimensão m onde seus autovalores aproximam os da matriz original $\mathbf{A}$ de dimensão n .

Pode-se mostrar que esse processo iterativo facilita a convergência de autovalores extremos da matriz original $\mathbf{A}$. E ainda, os autovetores $\mathbf{z}$ de $\mathbf{H}$ podem ser relacionados com os autovetores $\mathbf{c}'$ de $\mathbf{A}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{X}_m \mathbf{z}, \quad \mathbf{X}_m = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m).$$

O erro resultante da aproximação também pode ser estimado. A idéia é encontrar o menor espaço possível que ainda aproxime o auto-espaço de forma satisfatória, já que $m \leq n$.

Para que o método de Arnoldi seja usado em um problema de autovalor generalizado, $\sigma\mathbf{M}\mathbf{c} = \mathbf{J}\mathbf{c}$, primeiramente converte-se esse problema em um clássico $\mathbf{A}\mathbf{c}' = \mu\mathbf{c}'$. E ainda, como o método de Arnoldi facilita a convergência dos autovalores extremos, e no caso da análise de estabilidade quer-se evitar os autovalores em infinito, é muito comum encontrarmos na literatura transformações que não só tornem o problema de autovalor generalizado em um clássico como também mapeiem os autovalores que estão no infinito em um valor finito não extremo.

A transformação inversa com deslocamento (*shift-and-invert transformation*) é a mais encontrada e consiste em reescrever o problema da seguinte forma:

$$[(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{M}) - (\sigma - \lambda) \mathbf{M}] \mathbf{c}' = \mathbf{0}.$$

somamos e subtraímos o termo $\lambda \mathbf{M}$, onde λ é o parâmetro de deslocamento e desempenha um importante papel. Observe como fica o problema clássico:

$$\mathbf{A} \mathbf{c}' = \mu \mathbf{c}' \quad ; \quad \mathbf{A} \equiv (\mathbf{J} - \lambda \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M} \quad ; \quad \mu \equiv 1/(\sigma - \lambda). \quad (2-17)$$

Como desejado, o problema de autovalor generalizado é transformado em um problema de autovalor clássico. O autovalor σ do problema generalizado pode ser encontrado em termos do autovalor μ do problema clássico e do parâmetro de deslocamento λ . Os autovalores no infinito são mapeados em zero e o método numérico (Arnoldi) favorece autovalores μ de maior módulo, ou seja, corresponde aos autovalores do problema original σ mais próximos do parâmetro λ . Como exemplo, o método de Arnoldi com a transformação inversa com deslocamento foi usado em Sureshkumar & Beris, 1995 [15] analisando estabilidade de escoamentos viscoelásticos.

Outras transformações, com os mesmos objetivos: tornar o problema generalizado em um clássico; evitar os autovalores no infinito, também são encontradas na literatura. Christodoulou & Scriven, 1988 [11] e Ramanan & Homsy, 1994 [14] usaram transformações exponenciais para mapear os autovalores mais próximos do eixo imaginário nos de maior módulo. Os autores comentam o quão robusto é o método, porém descrevem um alto custo computacional. O método envolve em seus cálculos várias inversas da combinação das matrizes $\mathbf{M}$ e $\mathbf{J}$.

Sureshkumar & Arora, 2002 [28] apresentaram um método de condensação, escrevendo umas variáveis em função de outras, reduzindo a dimensão do vetor de incógnitas e conseqüentemente das matrizes. Porém as transformações utilizadas por eles reduzem a dimensão, mas não o suficiente para que a matriz $\mathbf{M}$ deixe de ser singular em um escoamento de Couette de um líquido de Maxwell. Com isso, essa formulação pode apenas estimar o espectro para o modelo de Maxwell via o modelo de Oldroyd-B, fazendo o tempo de retardamento tender a zero ($\lambda^t \rightarrow 0$), mas falha para o modelo de Maxwell ($\lambda^t = 0$).

Ainda Sureshkumar em [32] utiliza uma formulação em que o escoamento é compressível evitando assim singularidades em $\mathbf{M}$ e transformando o problema generalizado em um clássico, mas novamente existe uma pe-

nalidade envolvida, pois para modelar um escoamento incompressível o parâmetro de compressibilidade tende a zero.

Observe que ao transformarmos o problema generalizado em clássico, por qualquer dos procedimentos, ainda resta uma escolha, pois dependendo das dimensões das matrizes envolvidas e dos recursos disponíveis, os autovalores podem ser encontrados por métodos diretos, a serem comentados, ou por métodos iterativos, como o método de Arnoldi. Na análise de estabilidade hidrodinâmica nunca estamos interessados em todo o espectro, apenas parte dele. Nos métodos diretos todo o espaço está sendo analisado, enquanto que nos iterativos estuda-se apenas a região de interesse. Contudo, uma escolha ruim do espaço em que o método iterativo busca o espectro pode gerar enganos. Com o avanço tecnológico torna-se cada dia mais comum a substituição dos métodos iterativos pelos diretos.

Métodos diretos

O método direto QZ é bastante encontrado, principalmente nos trabalhos de escoamentos com fluidos newtonianos onde as dimensões envolvidas permitem o uso do método direto, como por exemplo em Dongarra, 1996 [17] e Bottaro 2003 [31]. Em se tratando de problema de autovalor generalizado qualquer, é o método mais popular principalmente quando as matrizes envolvidas são singulares, não-hermitianas. O método QZ lida bastante bem com os autovalores no infinito, como pode ser visto no trabalho de Watkins, 1999 [27] que explora justamente os motivos pelos quais o algoritmo tem uma boa atuação na presença de autovalores no infinito.

O método QZ é uma generalização do método QR para o problema clássico de autovalor, e é baseado na decomposição generalizada de Schur, (Golub [20], pag. 396), fornecendo então, não só os autovalores generalizados como também os autovetores.

Decomposição generalizada de Schur: Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, então $\exists \mathbf{Q}$ e $\mathbf{Z}$ matrizes unitárias tais que $\mathbf{Q}^H \mathbf{A} \mathbf{Z} = \mathbf{T}$ e $\mathbf{Q}^H \mathbf{B} \mathbf{Z} = \mathbf{S}$ triangulares superiores. Se para algum k , t_{kk} e s_{kk} forem zero, então $\lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbb{C}$ (o espectro de $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ é todo o espaço), caso contrário $\lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \{\frac{t_{ii}}{s_{ii}}; s_{ii} \neq 0\}$.

Lembrando que matriz unitária é aquela cuja transposta conjugada (Hermitiana) é sua inversa, ou seja, $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{I} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H$.

No caso de $t_{kk} = s_{kk} = 0$ para algum k o feixe de matrizes (*pencil*) é singular. Qualquer outro caso é regular e para cada par (t_{kk}, s_{kk}) existe um autovalor $\lambda = \frac{t_{kk}}{s_{kk}}$, com $s_{kk} \neq 0$. Se o feixe é regular e a matriz $\mathbf{B}$

é singular vai existir então, pelo menos um par (t_{kk}, s_{kk}) onde $s_{kk} = 0$ e $t_{kk} \neq 0$. São esses pares que geram os autovalores no infinito. Cada um desses pares corresponde a um autovalor infinito no feixe $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})$ e a um autovalor igual a zero no feixe recíproco $(\mu \mathbf{A} - \mathbf{B})$. Se considerarmos os autovalores no infinito, então cada feixe regular de dimensão n tem exatamente n autovalores, contando finitos e infinitos.

Desde que a decomposição generalizada de Schur diz tudo sobre os autovalores do feixe de matrizes, o objetivo do algoritmo é transformar o feixe na forma generalizada de Schur por uma sequência de transformações unitárias e equivalentes. Dois feixes $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}$ e $\tilde{\mathbf{A}} - \lambda \tilde{\mathbf{B}}$ são unitários equivalentes se existem duas matrizes unitárias $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ tais que $\tilde{\mathbf{A}} - \lambda \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{U}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})\mathbf{V}$. Nestas transformações os autovalores são preservados.

O passo principal é transformar o feixe numa matriz de Hessenberg. Mais precisamente, deseja-se encontrar um feixe unitário equivalente ao $\tilde{\mathbf{A}} - \lambda \tilde{\mathbf{B}}$, com $\tilde{\mathbf{A}}$ uma matriz de Hessenberg superior ($\tilde{a}_{ij} = 0$, se $i > j + 1$) e $\tilde{\mathbf{B}}$ uma matriz triangular superior.

Nesse trabalho alguns dos métodos acima foram testados. O método de Arnoldi e a transformação inversa com deslocamento podem ser implementados juntos, seguindo o algoritmo apresentado por Saad [19]. Ainda testamos as transformações inversas com deslocamento na matriz cheia sem a projeção de Arnoldi. De fato, para os exemplos testados, a maioria dos métodos foram equivalentes sendo o QZ um pouco mais preciso em algumas situações, e o fato deste último obter todo o espectro é bastante interessante. Como veremos, o trabalho se concentra principalmente nos casos com líquidos newtonianos e viscoelástico (Maxwell) em uma geometria unidimensional. As dimensões envolvidas permitem o uso do método direto e ainda vamos apresentar um novo método no qual através de transformações as dimensões das matrizes envolvidas são reduzidas. Uma aplicação da nova metodologia apresentada está sendo testada em um escoamento bidimensional. Se necessário o método de Arnoldi juntamente com a transformação inversa deslocada vão ser usados para o cálculo dos autovalores no caso de problemas onde a dimensão das matrizes envolvidas forem muito grande para o cálculo do espectro completo.