4
Método Vertical

Neste capítulo, apresentamos o método vertical para redução do tamanho de uma prova proposicional. Resumidamente, este método procura por similaridades na prova e as substitui por uma nova variável que não aparece na prova.

O que queremos dizer por similaridades e, como identificá-las, é assunto da primeira seção deste capítulo.

Na segunda seção, apresentamos o método. Na terceira seção apresentamos o resultado principal do capítulo.

Na quarta seção apresentamos uma alternativa para aplicar este método a provas combinatoriais.

4.1
Definições

Definição 4.1 (Fórmulas U-similares) *Dizemos que duas fórmulas proposicionais, H_1 e H_2 onde $V(H_1) \subseteq V(H_2)$, são* U-similares *se e somente se*

1. $|H_1| = 1$ *(ou* $|H_2| = 1$*). Neste caso, dizemos que o conjunto de* U-axiomas *de H_1 e H_2 é o conjunto unitário $\{H_1 \leftrightarrow H_2\}$, e*

2. $H_1 = h_1^1 \Box\ h_2^1$ *e* $H_2 = h_1^2 \diamond\ \ h_2^2$ *com* $\Box \equiv \diamond$*, h_1^1 é U-similar a h_1^2(ou h_2^1 é U-similar a h_2^2).Neste caso o conjunto de* U-axiomas *de H_1 e H_2 é o conjunto $U_1 \cup U_2$ onde U_1 é o conjunto de* U-axiomas *de h_1^1 e h_1^2 e U_2 é o conjunto de* U-axiomas *de h_2^1 e h_2^2.*

Observação 4.2

1. *Note que não consideramos o conectivo unário $\neg$ na definição acima. Este conectivo receberá uma atenção especial futuramente.*

2. *Se H_1 e H_2 são* U-similares*, então os primeiros k conectivos binários das duas fórmulas são iguais.*

3. *Não necessariamente $|H_1| = |H_2|$.*

4. *Sem perda de generalidade, consideraremos que o lado esquerdo de cada elemento do conjunto de U-axiomas é atômico.*

Definição 4.3 (Grau de U-axioma) *Seja* $U = \{h_1, \ldots, h_n\}$ *o conjunto de* U*-axiomas de* H_1 *e* H_2*. Definimos o grau de* U*, denotado por* $deg(U)$*, por*

$$deg(U) = |1 - min\{|h_1|; i \in 1 \ldots n\}|$$

Exemplo 4.4 *Considere as seguintes fórmulas proposicionais* H_1 *e* H_2*.*

$$H_1 = (p_{00} \wedge p_{10}) \vee (p_{00} \wedge p_{20}) \vee (p_{00} \wedge p_{30}) \vee (p_{01} \wedge p_{11}) \vee (p_{01} \wedge p_{21}) \vee (p_{01} \wedge p_{31}) \vee (p_{02} \wedge p_{12}) \vee (p_{02} \wedge p_{22}) \vee (p_{02} \wedge p_{32}) \vee (p_{10} \wedge p_{20}) \vee (p_{10} \wedge p_{30}) \vee (p_{11} \wedge p_{21}) \vee (p_{11} \wedge p_{31}) \vee (p_{12} \wedge p_{22}) \vee (p_{13} \wedge p_{32}) \vee (p_{20} \wedge p_{30}) \vee (p_{21} \wedge p_{31}) \vee (p_{22} \wedge p_{32})$$

$$\begin{aligned} H_2 = \{&[(p_{00} \vee (p_{02} \wedge p_{20})) \wedge (p_{10} \vee (p_{12} \wedge p_{20}))] \vee \\ &[(p_{00} \vee (p_{02} \wedge p_{20})) \wedge (p_{20} \vee (p_{22} \wedge p_{20}))] \vee \\ &[(p_{01} \vee (p_{02} \wedge p_{21})) \wedge (p_{11} \vee (p_{12} \wedge p_{21}))] \vee \\ &[(p_{00} \vee (p_{02} \wedge p_{20})) \wedge (p_{10} \vee (p_{12} \wedge p_{20}))] \vee \\ &[(p_{10} \vee (p_{12} \wedge p_{20})) \wedge (p_{20} \vee (p_{22} \wedge p_{20}))] \vee \\ &[(p_{11} \vee (p_{12} \wedge p_{21})) \wedge (p_{21} \vee (p_{22} \wedge p_{21}))]\} \end{aligned}$$

Temos que p_{00} *é* U*-similar a* $p_{00} \vee (p_{02} \wedge p_{20})$*,* p_{10} *é* U*-similar a* $p_{10} \vee (p_{12} \wedge p_{20})$ *e assim por diante. O conjunto de* U*-axiomas é:*

$$\begin{aligned} U = \{&p_{00} \leftrightarrow p_{00} \vee (p_{02} \wedge p_{20}), p_{10} \leftrightarrow p_{10} \vee (p_{12} \wedge p_{20}), \\ &p_{01} \leftrightarrow p_{01} \vee (p_{02} \wedge p_{21}), p_{11} \leftrightarrow p_{11} \vee (p_{12} \wedge p_{21}), \\ &p_{20} \leftrightarrow p_{20} \vee (p_{22} \wedge p_{20}), p_{21} \leftrightarrow p_{21} \vee (p_{22} \wedge p_{21})\} \end{aligned}$$

Neste exemplo $deg(U) = |1 - 4| = 3$

Segue a definição de provas U-similares.

Definição 4.5 (Prova U**-similar)** *Uma prova como a da figura 4.1 é dita* U-similar *se e somente se* H_1 *e* H_2 *forem fórmulas* U*-similares.*

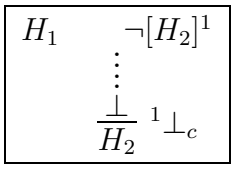

Figura 4.1: Prova U-similar

4.2 Método

Considere uma prova U-similar onde H_2 é a premissa da $\neg$-introdução e H_1 é a hipótese, como na figura 4.1.

Nosso método de compactação segue os quatro passos apresentados no algoritmo 2.

Algorithm 2 Método Vertical

1: *Encontre* o conjunto de U-axiomas, $U = \bigcup_{i=1}^{k} h_i^1 \leftrightarrow h_i^2$, de H_1 e H_2.
2: *Substitua* o lado esquerdo de cada elemento do conjunto de U-axiomas U por uma nova variável, digamos q_i, criando assim um novo conjunto $U' = \bigcup_{i=1}^{k} q_i \leftrightarrow h_i^2$.
3: *Substitua* cada ocorrência de h_1^2 em H_2 pelo q_i associado no passo anterior.
4: *Construa* uma nova prova similar à anterior apenas trocando o conjunto de hipóteses H_2 pelo novo conjunto $H_2' \cup U'$.

Lema 4.6 (Lema de Compactação) *Seja* Π *uma prova* U*-similar. Então podemos transformar* Π *em uma nova prova* Π' *tal que* $|\Pi| \geq |\Pi'| + n.(r-1)$*, onde* r *e* n *são o grau do* U*-axioma presente e a quantidade de* U*-axiomas presentes em* Π*, respectivamente.*

Prova. Seja H_1 e H_2 fórmulas em Π que são U-similares.

Aplicando o algoritmo em H_1 e H_2 obtemos no terceiro passo uma nova prova Π' onde n de fórmulas de tamanho menor que r são substituídas por uma nova variável.

Portanto, teremos que $|\Pi| - r.n \geq |\Pi'|$. Isto é, $|\Pi| \geq |\Pi'| + n(r-1)$, como desejávamos.

■

4.3 Resultado Principal

Definição 4.7 *Considere uma prova como na figura 4.2 tal que H_1 e H_2 formem um par U-similar que produza após aplicação do algoritmo 2 o conjunto de hipóteses $H'_2 \cup U'_1$ e que também H'_2 e H_3 formem um par U-similar com conjunto de hipóteses $H'_3 \cup U'_2$ produzido pelo algoritmo 2 e assim por diante, até que H_k e H_{k+1} formem um par U-similar com conjunto de hipóteses geradas pelo algoritmo 2 igual a $H'_k \cup U'_{k-1}$.*

Uma prova Π na qual é possível a aplicação de k U-similaridades encadeadas é denominada uma prova U-similar encadeada. *O valor de k é denominado a* profundidade *da prova U-similar encadeada e é denotada por $depth(\Pi)$. Cada conclusão de uma $\neg$-introdução é denominada o* nível *da prova U-similar encadeada. Os níveis da prova U-similar encadeada serão ordenados de cima para baixo e serão denotados por 1,2,...,k.*

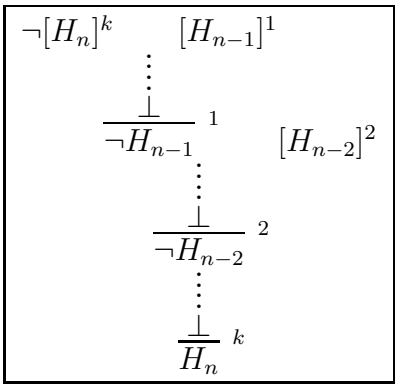

Figura 4.2: Esquema de uma prova encadeada

Teorema 4.8 (Método Vertical Geral) *Se Π é uma prova U-similar encadeada com profundidade k então existe uma prova Π' com a mesma conclusão de Π tal que $|\Pi| \geq |\Pi'| + n.k.r$ para algum $r \in \mathbb{N}$ e n a quantidade de ocorrências de U-axiomas em Π.*

Prova. Seja r_i dado por

$$r_i = min\{deg(U'_i)\}$$

Mostraremos por indução em k que $|\Pi| = |\Pi_k| + n \sum_{i=1}^{k} r_i$. Onde Π_k é a k-ésima modificação de Π após aplicação de k U-similaridades.

Base: Se $k = 1$, então estamos na condição do lema 4.6 e portanto $|\Pi| \geq |\Pi_1| + n.(r-1)$.

Passo indutivo: Se $depth(\Pi) = k$. Aplicando o lema 4.6 ao primeiro nível de Π produzimos um novo ramo com um conjunto de hipóteses $H'_2 \cup U'_1$ e com partes de algumas linhas sendo reduzidas a uma variável.

Estendendo as substituições de variáveis ao restante da prova obtemos uma nova prova Π_1 tal que $|\Pi_1| \geq |\Pi_1| + n_1.(r_1 - 1)$. Onde n_1 é a quantidade de ocorrências de U-axiomas no primeiro nível de Π e r_1 o grau do U-axioma no primeiro nível de Π.

Pela hipótese de indução aplicada a partir do segundo nível até o final da prova Π_1, obteremos uma nova prova, digamos Π_k tal que $|\Pi_1| \geq |\Pi_k| + n'.\sum_{i=1}^{k-1}(r_i - 1)$, onde n' é quantidade de ocorrências de U-axiomas em Π_1 e r_i o grau do U-axiomas nos níveis de 1 a $k-1$.

Portanto, $|\Pi| \geq |\Pi_k| + n' \sum_{i=2}^{k}(r_i - 1) + n_1.(r_1 - 1)$.

Para $r = 1 + min\{r_i, i = 1, \ldots, k\}$, temos que $|\Pi| \geq |\Pi_k| + n.k.r$, onde $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$

■

Observe que se $n_i = n_{i-1}.(r_i - 1)$, isto é, se as aplicações de U-axiomas em cada novo nível fossem realizadas em posições previamente modificadas por outro U-axioma, teríamos que a nova prova Π_k seria tal que:

$$|\Pi| \geq |\Pi_k| + \sum_{i=1}^{k}(r_i - 1)^i.n_{k-i+1}$$

Para $r = 1 + min\{r_i, i = 1, \ldots, k\}$, temos

$$|\Pi| \geq |\Pi_k| + \sum_{i=1}^{k} r^i.n_{k-i+1}$$

Exemplo 4.9 *Considere*

$$P_n = \bigvee_{0 \leq i < m \leq n} \bigvee_{j=0}^{n-1} (p_{i,j} \wedge p_{m,j})$$

$$P_{n-1} = \bigvee_{0 \leq i < m \leq n-1} \bigvee_{j=0}^{n-2} (((p_{i,j} \vee (p_{i,n-1} \wedge p_{n-1,j})) \wedge (p_{m,j} \vee (p_{m,n-1} \wedge p_{n-1,j}))))$$

$$P_{n-2} = \bigvee_{0 \leq i < m \leq n-2} \bigvee_{j=0}^{n-3}$$

$(((p_{i,j} \vee (p_{i,n-1} \wedge p_{n-1,j})) \vee ((p_{i,n-2} \vee (p_{i,n-1} \wedge p_{n-1,j}) \wedge (p_{n-2,j} \vee (p_{n-2,n-1} \wedge p_{n-1,j})))\wedge$

$(((p_{m,j} \vee (p_{m,n-1} \wedge p_{n-1,j})) \vee ((p_{m,n-2} \vee (p_{m,n-1} \wedge p_{n-1,j}) \wedge (p_{n-2,j} \vee (p_{n-2,n-1} \wedge p_{n-1,j})))$

No caso em que $n = 3$, teríamos:

$$\begin{aligned}P_3 =&(p_{00} \wedge p_{10}) \vee (p_{00} \wedge p_{20}) \vee (p_{00} \wedge p_{30}) \vee (p_{01} \wedge p_{11}) \vee (p_{01} \wedge p_{21}) \vee (p_{01} \wedge p_{31}) \vee \\ &(p_{02} \wedge p_{12}) \vee (p_{02} \wedge p_{22}) \vee (p_{02} \wedge p_{32}) \vee (p_{10} \wedge p_{20}) \vee (p_{10} \wedge p_{30}) \vee (p_{11} \wedge p_{21}) \vee \\ &(p_{11} \wedge p_{31}) \vee (p_{12} \wedge p_{22}) \vee (p_{13} \wedge p_{32}) \vee (p_{20} \wedge p_{30}) \vee (p_{21} \wedge p_{31}) \vee (p_{22} \wedge p_{32})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_2 =&[(p_{00} \vee (p_{02} \wedge p_{20})) \wedge (p_{01} \vee (p_{02} \wedge p_{21}))] \vee \\ &[(p_{00} \vee (p_{02} \wedge p_{20})) \wedge (p_{20} \vee (p_{22} \wedge p_{20}))] \vee \\ &[(p_{01} \vee (p_{02} \wedge p_{21})) \wedge (p_{11} \vee (p_{12} \wedge p_{21}))] \vee \\ &[(p_{00} \vee (p_{02} \wedge p_{20})) \wedge (p_{10} \vee (p_{12} \wedge p_{20}))] \vee \\ &[(p_{10} \vee (p_{12} \wedge p_{20})) \wedge (p_{20} \vee (p_{22} \wedge p_{20}))] \vee \\ &[(p_{11} \vee (p_{12} \wedge p_{21})) \wedge (p_{21} \vee (p_{22} \wedge p_{21}))]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_1 =&(p_{00} \vee (p_{02} \wedge p_{20})) \vee ((p_{01} \vee (p_{02} \wedge p_{20})) \wedge (p_{10} \vee (p_{12} \wedge p_{20}))) \wedge \\ &(p_{10} \vee (p_{12} \wedge p_{20})) \vee ((p_{11} \vee (p_{12} \wedge p_{21})) \wedge (p_{10} \vee (p_{12} \wedge p_{20})))\end{aligned}$$

Um trecho de prova com a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P_3 \quad [P_2]}{\vdots}}{\dfrac{\bot}{\neg P_2}} \qquad [P_1]}{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\dfrac{\bot}{\neg P_1}}}{\dfrac{\vdots}{P_3}}}$$

É reduzida a seguinte prova:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P_3 \quad [P_2']}{\vdots}}{\dfrac{\bot}{\neg P_2'}} \qquad [P_1'']}{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\dfrac{\bot}{\neg P_1''}}}{\dfrac{\vdots}{P_3}}}$$

onde
$P'_2 = (q^1_{00} \wedge q^1_{01}) \vee (q^1_{00} \wedge q^1_{20}) \vee (q^1_{01} \wedge q^1_{11}) \vee (q^1_{00} \wedge q^1_{10}) \vee (q^1_{10} \wedge q^1_{20}) \vee (q^1_{11} \wedge q^1_{21})$,
$P'_1 = (q^1_{00} \vee (q^1_{01} \wedge q^1_{10})) \wedge (q^1_{10} \vee (q^1_{11} \wedge q^1_{10}))$ *e*
$P''_1 = (q^2_{00} \wedge q^2_{10})$.

4.4 Conclusão do capítulo

O método apresentado neste capítulo pode ser implementado e esta característica atende um dos quesitos que propusemos na introdução da tese.

Infelizmente conseguimos uma redução satisfatória apenas para provas que possuam aplicações encadeadas do absurdo clássico, o que restringe muito a sua utilização em um provador automático de teoremas.

A aplicação do método ao princípio das casas de pombos se mostra eficiente. Contudo já se conhece um prova polinomial de tal princípio apresentada por Cook em (Coo76) a qual serviu de guia para a construção do nosso método.

Apresentaremos a seguir uma alternativa para produzir provas curtas de princípios combinatoriais. Nesta proposta o processo de construção da regra de extensão é feito por considerar combinações de elementos de uma matriz gerada a partir de informações da fórmula que se deseja provar.

Uma vez que as informações necessárias estão presentes na fórmula que se deseja provar, o processo de construção da regra de extensão pode ser automatizado.

4.4.1 Uma alternativa curta para provas combinatoriais

Considere uma fórmula combinatorial da forma

$$P_n \equiv \bigwedge_{i=0}^{n} \bigvee_{j=0}^{n-1} a_{i,j} \rightarrow \Phi \tag{4-1}$$

onde Φ é qualquer fórmula sobre os símbolos proposicionais a_{ij}

Uma forma de provar que P_n é verdadeira é supor $\neg P_n$ e concluir $\perp$, isto é, provar que $\neg P_n \rightarrow \perp$

Devido a quantidade de $\vee$ presentes em P_n, teríamos que fazer uso de muitas regras $\vee E$ o que tornaria a derivação de $\neg P_n \rightarrow \perp$ bastante grande.

Se nos inspirarmos no trabalho de Cook (Coo76). Uma alternativa para reduzir a quantidade $\vee E$ seria tentar reduzir a prova de P_n a uma prova de P_{n-1} usando axiomas auxiliares na forma de definições por extensão.

Apresentaremos a seguir um método para produzir provas curtas em Dedução Natural de princípios combinatoriais como o apresentado na fórmula 4-1.

Pretendemos reduzir P_n a P_{n-1} preservando a propriedade descrita por a_{ij}. Faremos isso eliminando da representação de P_n as fórmulas $a_{i,j}$ com $i = 1, \ldots, n$, j fixo e $a_{i,j}$ com $j = 1, \ldots, n-1$ e i fixo.

Se visualizarmos P_n como uma matriz $n \times n-1$, o que pretendemos é eliminar da matriz P_n uma linha e uma coluna. Na matriz abaixo optamos por eliminar a última linha e a última coluna.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-2} & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \hline a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{0,n-2} & a_{n,n-1} \end{array}\right)$$

Os valores de b_{ij} em P_{n-1} serão herdados dos valores de P_n da seguinte maneira:

$$b_{ij} = a_{ij} \vee \gamma$$

Onde $\neg\Phi \wedge b_{ij}$ deve deduzir $\perp$.

Vejamos como este procedimento se comporta na prova de PHP_n.

PHP_n com extensão

Lembrando que:

$$PHP_n \equiv \bigwedge_{i=0}^{n} \bigvee_{j=0}^{n-1} p_{i,j} \rightarrow \bigvee_{0 \leq i < m \leq n} \bigvee_{j=0}^{n} (p_{i,j} \wedge p_{m,j})$$

Queremos mostrar que:

$$\neg PHP_n \rightarrow \perp$$

E faremos isto aplicando reduções consecutivas, da seguinte forma,

$$\neg PHP_n \rightarrow \neg PHP_{n-1} \ldots \neg PHP_3 \rightarrow \neg PHP_2 \equiv \neg((q^1_{0,0} \wedge q^1_{1,0}) \rightarrow (q^1_{0,0} \wedge q^1_{1,0}))$$

obtidas através do uso da seguinte regra de extensão:

$$q^n_{i,j} \leftrightarrow p_{i,j}, \qquad q^k_{i,j} \leftrightarrow q^{k+1}_{i,j} \vee (q^{k+1}_{i,k} \wedge q^{k+1}_{k+1,j}) \tag{4-2}$$

Trabalhando com $\neg PHP_n$ da seguinte forma:

$$PHP_n \equiv (\bigwedge_{i=0}^{n} \bigvee_{j=0}^{n-1} p_{i,j}) \wedge \neg(\bigvee_{0 \leq i < m \leq n} \bigvee_{j=0}^{n} (p_{i,j} \wedge p_{m,j}))$$

Temos que:

$$\dfrac{\dfrac{\neg PHP_n}{\bigwedge_{i=0}^{n}\bigvee_{k=0}^{n-1} q^n_{ik}}\,\wedge E}{\bigvee_{k=0}^{n-1} q^n_{0k}}\,\wedge E \qquad \dfrac{\dfrac{\neg PHP_n}{\bigwedge_{i=0}^{n}\bigvee_{k=0}^{n-1} q^n_{ik}}\,\wedge E}{\bigvee_{k=0}^{n-1} q^n_{1k}}\,\wedge E \qquad \cdots \qquad \dfrac{\dfrac{\neg PHP_n}{\bigwedge_{i=0}^{n}\bigvee_{k=0}^{n-1} q^n_{ik}}\,\wedge E}{\bigvee_{k=0}^{n-1} q^n_{n-1,k}}\,\wedge E$$

Agora devemos aplicar as regras $\vee E$. Faremos a demonstração apenas para uma parte do primeiro ramo acima. A construção dos demais ramos segue de forma análoga.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[q^n_{00}]}{q^n_{00} \vee (q^n_{00} \wedge q^n_{00})}\,\vee I}{q^{n-1}_{00}}\,ext}{\bigvee_{k=0}^{n-2} q^{n-1}_{ik}}\,\vee I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[q^n_{01}]}{q^n_{01} \vee (q^n_{00} \wedge q^n_{01})}\,\vee I}{q^{n-1}_{01}}\,ext}{\bigvee_{k=0}^{n-2} q^{n-1}_{ik}}\,\vee I \qquad \cdots$$

Obtemos PHP_{n-1} a partir de PHP_n utilizando a regra de extensão 4-2, gerando:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg PHP_n}{\bigwedge_{i=0}^{n}\bigvee_{k=0}^{n-1} q^n_{ik}}\,\wedge E}{\bigvee_{k=0}^{n-1} q^n_{0k}}\,\wedge E \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[q^n_{00}]}{q^n_{00} \vee (q^n_{00} \wedge q^n_{00})}\,\vee I}{q^{n-1}_{00}}\,ext}{\bigvee_{k=0}^{n-2} q^{n-1}_{ik}}\,\vee I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[q^n_{01}]}{q^n_{01} \vee (q^n_{00} \wedge q^n_{01})}\,\vee I}{q^{n-1}_{01}}\,ext}{\bigvee_{k=0}^{n-2} q^{n-1}_{ik}}\,\vee I \qquad \cdots}{\bigwedge_{i=0}^{n-1}\bigvee_{k=0}^{n-2} q^{n-1}_{ik}}\,\vee E$$

Agora, o lado direito de PHP_n:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg PHP_n}{\neg \bigvee_{k=0}^{n-1} \bigvee_{0\leq i<j\leq n} (q^n_{ik} \wedge q^n_{jk})}\,\wedge E}{\bigwedge_{k=0}^{n-1} \bigwedge_{0<i<j<n} \neg(q^n_{ik} \wedge q^n_{jk})}}{\bigwedge_{0<i<j<n} \neg(q^n_{i0} \wedge q^n_{j0})}\,\wedge E}{\neg(q^n_{00} \wedge q^n_{10})}\,\wedge E}{(\neg q^n_{00} \vee \neg q^n_{10})} \atop {\vdots\ \vee E + ext \atop \neg(q^{n-1}_{00} \wedge q^{n-1}_{10})} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \wedge E \atop \bigwedge_{0<i<j<n} \neg(q^n_{i0} \wedge q^n_{j0})}{\neg(q^n_{00} \wedge q^n_{20})}\,\wedge E}{(\neg q^n_{00} \vee \neg q^n_{20})} \atop {\vdots\ \vee E + ext \atop \neg(q^{n-1}_{00} \wedge q^{n-1}_{20})} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \wedge E \atop \bigwedge_{0<i<j<n} \neg(q^n_{i0} \wedge q^n_{j0})}{\neg(q^n_{00} \wedge q^n_{30})}\,\wedge E}{(\neg q^n_{00} \vee \neg q^n_{30})} \atop {\vdots\ \vee E + ext \atop \neg(q^{n-1}_{00} \wedge q^{n-1}_{30})} \qquad \cdots}{\bigwedge_{0\leq i<j\leq n-1} \neg(q^{n-1}_{i0} \wedge q^{n-1}_{j0})}\,\wedge I$$

A construção da prova é feita de cima para baixo e sempre que possível devemos introduzir a regra de extensão. Isto é, a medida que algum dos elementos do lado direito de 4-2 aparecem na derivação, devemos utilizar o regra de $\vee I$ para gerar uma prova que permita o uso da regra de extensão.