



Vaston Gonçalves da Costa

Compactação de Provas Lógicas

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Informática do Departamento de Informática da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Informática.

Orientador: Prof. Edward Hermann Haeusler

Rio de Janeiro
Abril de 2007



Vaston Gonçalves da Costa

Compactação de Provas Lógicas

Tese apresentada ao Programa de Informática do Departamento de Informática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Informática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Edward Hermann Haeusler

Orientador

Departamento de Informática — PUC–Rio

Prof. Luis Carlos Pinheiro Dias Pereira

PUC-Rio

Prof. Maurício Ayala Rincon

Unb

Prof. Marcelo da Silva Corrêa

UFF

Prof. Geiza Maria Hamazaki da Silva

PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico —
PUC–Rio

Rio de Janeiro, 09 de Abril de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Vaston Gonçalves da Costa

Graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia - UFU. Obteve título de Mestre em Matemática Aplicada, com ênfase em Teoria da Computação, pela Universidade de Brasília - UnB.

Ficha Catalográfica

Costa, Vaston Gonçalves da

Compactação de Provas Lógicas / Vaston Gonçalves da Costa; orientador: Edward Hermann Haeusler. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Informática, 2007.

66 f. ; 30 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Informática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Informática – Tese. 2. Teoria da prova. 3. Complexidade de Provas. 4. Lógica Proposicional. 5. Cálculo de Seqüentes. 6. Dedução Natural. I. Hermann, Edward. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Informática. III. Título.

Esta tese é dedicada

à minha esposa Angela, meu porto seguro, e ao meu filho Vinícius, minha motivação, pela compreensão e apoio nos muitos momentos que tive que privá-los da minha companhia e atenção.

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Edward Hermann Haeusler pelo apoio e incentivo fundamentais para a realização deste trabalho. Hermann... boas ondas!

À minha mãe, Dona Olinda, que me incentivou e me apoiou para o meu ingresso à vida acadêmica. Espero ter correspondido às suas expectativas.

Às minhas irmãs, Virgínia e Valéria, pelas palavras de apoio.

Aos meus colegas da PUC-Rio, em particular aos que integram ou integraram a equipe do TecMF, pelos longos anos de convívio em um ambiente tão agradável.

Ao professor Lev Gordeev pela ajuda e contribuição.

Aos professores da banca avaliadora pelas sugestões apresentadas para a melhoria do trabalho final e por apontarem direções de trabalhos futuros.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos.

Resumo

Costa, Vaston Gonçalves da; Hermann, Edward. **Compactação de Provas Lógicas**. Rio de Janeiro, 2007. 66p. Tese de Doutorado — Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

É um fato conhecido que provas clássicas podem ser demasiadamente grandes. Estudos em teoria da prova descobriram diferenças exponenciais entre provas normais (ou provas livres do corte) e suas respectivas provas não normais. Por outro lado, provadores automáticos de teorema usualmente se baseiam na construção de provas normais, livres de corte ou provas de corte atômico, pois tais procedimento envolvem menos escolhas. Provas de algumas tautologias são conhecidamente grandes quanto realizadas sem a regra do corte e curtas quando a utilizam. Queremos com este trabalho apresentar procedimentos para reduzir o tamanho de provas proposicionais. Neste sentido, apresentamos dois métodos. O primeiro, denominado método vertical, faz uso de axiomas de extensão e alguns casos é possível uma redução considerável no tamanho da prova. Apresentamos um procedimento que gera tais axiomas de extensão. O segundo, denominado método horizontal, adiciona fórmulas máximas por meio de unificação via substituição de variáveis proposicionais. Também apresentamos um método que gera tal unificação durante o processo de construção da prova. O primeiro método é aplicado a dedução natural enquanto o segundo à Dedução Natural e Cálculo de Seqüentes. As provas produzidas correspondem de certo modo a provas não normais (com a regra do corte).

Palavras-chave

Teoria da prova. Complexidade de Provas. Lógica Proposicional. Cálculo de Seqüentes. Dedução Natural.

Abstract

Costa, Vaston Gonçalves da; Hermann, Edward. **Logic Proofs Compactation**. Rio de Janeiro, 2007. 66p. PhD Thesis — Department of Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

It is well-known that the size of propositional classical proofs can be huge. Proof theoretical studies discovered exponential gaps between normal or cut-free proofs and their respective non-normal proofs. The task of automatic theorem proving is, on the other hand, usually based on the construction of normal, cut-free or only-atomic-cuts proofs, since this procedure produces less alternative choices. There are familiar tautologies such that the cut-free proof is huge while the non-cut-free is small. The aim of this work is to reduce the weight of propositional deductions. In this sense we present two methods. The first, namely vertical method, uses the extension axioms. We present a method that generates a such extension axiom. The second, namely horizontal method, adds suitable (propositional) unifications modulo variable substitutions. We also present a method that generates a such unification during the proving process. The proofs produced correspond in a certain way to non normal proofs (non cut-free proofs).

Keywords

Proof Theory. Proof Complexity. Propositional Logic. Sequent Calculus. Natural Deduction.

Sumário

1	Introdução	10
2	Preliminares	13
2.1	Sistema de Dedução Natural	14
2.2	Classes hierárquicas e problemas lógicos	17
2.3	Sistemas de Frege	20
2.4	Resolução	21
2.5	Princípio das Casas dos Pombos-PHP	21
2.6	PHP em Resolução	23
3	Método Horizontal	24
3.1	Definições	24
3.2	O Método	26
3.3	Formalização do método	29
3.4	Conclusão do método	39
4	Método Vertical	40
4.1	Definições	40
4.2	Método	42
4.3	Resultado Principal	43
4.4	Conclusão do capítulo	46
5	Conclusão	49
A	Sistemas de Frege	53
A.1	Sistemas de provas proposicionais	53
A.2	Sistemas de Frege	54
A.3	Dedução Natural	55
A.4	Frege estendido	57
B	Esquema da prova de PHP_2	58
C	Numeral de Church	60
D	Clássica para Intuicionista	62

Lista de figuras

3.1	Representação gráfica do método	27
3.2	Aplicação do método vertical	27
3.3	Representação Gráfica do Método Horizontal	35
3.4	Modus Ponens	36
3.5	Esboço da redução da transitividade para $(a_1 \rightarrow a_4) \rightarrow (a_4 \rightarrow a_8) \rightarrow (a_1 \rightarrow a_8)$	38
4.1	Prova U -similar	42
4.2	Esquema de uma prova encadeada	43
C.1	I_0^3	60
C.2	Numeral I_0^4 modificado.	61