2
Cópulas e Interdependência

Neste capítulo serão expostas as definições de interesse e os principais resultados a respeito da teoria de cópulas, interdependência e contágio. Mais a frente, o conceito de cópulas será usado para modelar estruturas de dependência de dados multivariados. A dependência nos extremos será analisada e, a partir daí, saberemos como ela revela o comprometimento da diversificação de um investimento em um período de crise. Desenvolvimentos semelhantes podem ser vistos em [14], artigo que serviu de inspiração para esta dissertação.

2.1
Teoria Básica de Cópulas

A função de distribuição conjunta $H(x_1, \ldots, x_n)$ descreve completamente a dependência entre as variáveis aleatórias de valores reais$X_1, \ldots, X_n$

$$H(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n). \qquad (2\text{-}1)$$

Supondo que $X_1, \ldots, X_n$ têm distribuições marginais contínuas $F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_1}(x_1)$ podemos, através da transformada integral de probabilidade, transformar o vetor aleatório $(X_1, \ldots, X_n)$, componente a componente, de modo que ele passe a ter distribuições marginais$U(0, 1)$.

$$T_n : \Re^n \longmapsto \Re^n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)). \qquad (2\text{-}2)$$

A função distribuição conjunta $C(.)$ destas novas marginais uniformes $F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)$ é chamada cópula do vetor aleatório $(X_1, \ldots, X_n)$. De forma equivalente, $C(.)$ também pode ser vista como a cópula associada com a distribuição conjunta $H(.)$. Segue que

$$\begin{aligned} H(x_1,\ldots,x_n) &= P(F_{X_1}(X_1) \le F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_n}(X_n) \le F_{X_n}(x_n)) \\ &= C(F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_n}(x_n)). \end{aligned}$$

Observação 2.1.1. É possível transformar qualquer variável aleatória contínua em uma outra variável aleatória que também tenha distribuição contínua (não necessariamente $U(0,1)$). A transformação $T_n : (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto (F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_n}(x_n))$ mostrada na equação (2-2) é uma ferramenta padrão na metodologia de simulação e largamente utilizada porque a distribuição $U(0,1)$ é a mais simples possível (livre de parâmetros).

Definição 2.1.1. Uma cópula é definida como uma função de distribuição conjunta

$$C(u_1,\ldots,u_n) = P(U_1 \le u_1,\ldots,U_n \le u_n), \quad 0 \le u_i \le 1$$

sendo $U_i \sim U(0,1), \quad i = 1,\ldots,n$.

Uma definição alternativa é:

Definição 2.1.2. Uma cópula é qualquer função $C : [0,1]^n \longmapsto [0,1]$ que tem as seguintes propriedades:

(i) $C(x_1,\ldots,x_n)$ é crescente em cada componente x_i;

(ii) $C(1,\ldots,1,x_i,1,\ldots,1) = x_i \in [0,1]$ para todo $i = 1,\ldots,n$;

(iii) Para todos $(a_1,\ldots,a_n)$, $(b_1,\ldots,b_n) \in [0,1]^n$ com $a_i \le b_i$ tem-se que

$$\sum_{i_1=1}^{2}\cdots\sum_{i_n=1}^{2}(-1)^{i_1+\ldots+i_n}C(x_{1i_1},\ldots,x_{ni_n}) \ge 0,$$

com $x_{j1} = a_j$ e $x_{j2} = b_j, \quad j = 1,\ldots,n$.

Pode-se mostrar que essas duas definições de cópulas são equivalentes, e.g. Embrechts et *al.* [11].

O resultado mais importante na teoria de cópulas, que mostra a existência e unicidade da função $C(.)$ é o teorema de Sklar [1].

Teorema de Sklar. *Seja $H(.)$ uma função de distribuição conjunta com marginais $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$. Então existe uma cópula n-dimensional $C(.)$ tal que*

$$H(x_1, \ldots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)). \qquad (2\text{-}3)$$

Se as margens $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ são todas contínuas, então $C(.)$ é única. Em caso contrário, $C(.)$ é unicamente determinada no conjunto $Im(F_{X_1}) \times \ldots \times Im(F_{X_n})$, onde $Im(.)$ representa a imagem de $(.)$.

Reciprocamente, dado que $C(.)$ é uma cópula n-dimensional e $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ são funções de distribuição, então a função $H(.)$, definida na equação (2-3), é uma função de distribuição conjunta n-dimensional.

Através da equação (2-3) podemos concluir que a cópula $C(.)$ é uma função que relaciona a função distribuição conjunta e sua marginais.

O corolário a seguir mostra que podemos extrair, desde que a inversa exista, uma cópula de qualquer distribuição multivariada e usá-la independentemente das distribuições marginais originais.

Corolário 2.1.1. *Sejam $H(.)$, $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ como no Teorema de Sklar e sejam $F_{X_1}^{-1}, \ldots, F_{X_n}^{-1}$ inversas de $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ respectivamente. Então para qualquer $u_i \in [0, 1]$ existe uma cópula n-dimensional $C(.)$ tal que*

$$C(u_1, \ldots, u_n) = H(F_{X_1}^{-1}(u_1), \ldots, F_{X_n}^{-1}(u_n)). \qquad (2\text{-}4)$$

Em palavras, o corolário acima afirma ser possível estudar a dependência entre variáveis sem fixar suas distribuições marginais.

Teorema 2.1.1. *Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ um vetor de variáveis aleatórias contínuas com cópula $C(.)$. Se $\alpha_1(.), \ldots, \alpha_n(.)$ são funções estritamente crescentes em $Im(X_1), \ldots, Im(X_n)$, respectivamente, então $(\alpha_1(X_1), \ldots, \alpha_n(X_n))$ também têm cópula $C(.)$.*

Prova. Sejam $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ funções distribuição de $X_1, \ldots, X_n$ e sejam $G_1, \ldots, G_n$ as funções distribuição de $\alpha_1(X_1), \ldots, \alpha_n(X_n)$ respectivamente. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ um vetor aleatório com cópula $C(.)$ e seja $C_\alpha(.)$ a cópula de $(\alpha_1(X_1), \ldots, \alpha_n(X_n))$. Uma vez que $\alpha_k(.)$ é estritamente crescente para cada $k = 1, \ldots, n$,

$$G_k(x) = P(\alpha_k(X_k) \leq x) = P(X_k \leq \alpha_k^{-1}(x)) = F_k(\alpha_k^{-1}(x)),$$

para todo x em $\overline{\Re}$, portanto

$$\begin{aligned} C_\alpha(G_1(x_1), \ldots, G_n(x_n)) &= P(\alpha_1(X_1) \leq x_1, \ldots, \alpha_n(X_n) \leq x_n) \\ &= P(X_1 \leq \alpha_1^{-1}(x_1), \ldots, X_n \leq \alpha_n^{-1}(x_n)) \\ &= C(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), \ldots, F_n(\alpha_n^{-1}(x_n))) \\ &= C(G_1(x_1), \ldots, G_n(x_n)). \end{aligned}$$

Como $X_1, \ldots, X_n$ são contínuas, $Im(G_1) = \ldots = Im(G_n) = [0,1]$, i.e., $C_\alpha(.) = C(.)$ em $[0,1]^n$.

Sendo assim, as transformações não lineares estritamente crescentes alteram a distribuição conjunta $H(.)$ e suas marginais, mas a forma analítica da cópula $C(.)$ permanece a mesma. Esta é uma característica importante e desejável.

O teorema a seguir declara a existência de uma função $\hat{C}(.)$ que separa uma função de sobrevivência n-dimensional a partir de suas funções de sobrevivência marginais univariadas. Pode-se mostrar também que essa função é uma cópula, e essa cópula de sobrevivência pode ser expressa em termos de $C(.)$ e de suas marginais k-dimensionais.

Teorema 2.1.2. *Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ um vetor de variáveis aleatórias contínuas com cópula $C(.)$. Se $\alpha_1(.), \ldots, \alpha_n(.)$ são estritamente monótonas em $Im(X_1), \ldots, Im(X_n)$, respectivamente, e seja $(\alpha_1(X_1), \ldots, \alpha_n(X_n))$ um vetor de variáveis aleatórias transformadas em cópula $C_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)}(.)$.*

Além disso seja $\alpha_k(.)$ estritamente decrescente para algum k. Sem perda de generalidade, seja k=1. Então

$$\begin{gathered} C_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)}(u_1, \ldots, u_n) = \\ = C_{\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(u_2, \ldots, u_n) - C_{X_1,\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(1-u_1, u_2, \ldots, u_n). \end{gathered}$$

Prova. Sejam $\alpha_1(X_1), \ldots, \alpha_n(X_n)$ variáveis aleatórias com funções distribuição $G_1, \ldots, G_n$ respectivamente. Então,

$$
\begin{aligned}
&C_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)}(G_1(x_1), \ldots, G_n(x_n)) = \\
&\qquad = P(\alpha_1(X_1) \le x_1, \ldots, \alpha_n(X_n) \le x_n) \\
&\qquad = P(X_1 > \alpha_1^{-1}(x_1), \ldots, X_n \le \alpha_n^{-1}(x_n)) \\
&\qquad = C_{\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n)) \\
&\qquad\quad - C_{X_1,\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n)) \\
&\qquad = C_{\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n)) \\
&\qquad\quad - C_{X_1,\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(1 - G_1(x_1), G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n)).
\end{aligned}
$$

De onde a conclusão segue diretamente.

Teorema 2.1.3. *Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ um vetor de variáveis aleatórias contínuas com cópula $C(.)$, então $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se e somente se*

$$C(\mathbf{u}) = C(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{i=1}^{n} u_i = \Pi^n(\mathbf{u}).$$

2.2 Cópulas Associadas a Valores Extremos

São inúmeras as situações em finança, engenharia, questões ambientais, re-seguros e outras áreas onde é necessário se caracterizar a estrutura de dependência existente nos quantis extremos de uma distribuição bivariada. Para se medir a dependência assintótica pode-se fazer uso da modelagem paramétrica dos máximos em cada componente da distribuição bivariada ou, alternativamente, podem ser utilizadas as cópulas pertencentes a essas distribuições. Em casos onde, ao invés de máximos em cada componente, prefere-se trabalhar com excessos além de limiares altos [1], pode-se utilizar uma grande variedade de cópulas, com propriedades de assimetria e capazes de capturar vários tipos de dependência, inclusive dependência de cauda.

Alguns dos resultados clássicos da teoria de valores extremos bivariada serão traduzidos para a linguagem de cópulas. Em seguida veremos algumas propriedades e medidas de interesse. Para isto, seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ um vetor aleatório em $\Re^2$ com função distribuição conjunta $H(.,.)$, e tal que

[1] Chamamos de limiar alto um valor do suporte de X perto de x_{F_X}.

$H(.,.) \in MDA(W)$ [2], onde $W(.,.)$ é uma BEV [3]. Sejam $F_i(.)$ as marginais de $H(.,.)$, com $F_i \in MDA(H_i)$, onde $H_i(.)$ são as distribuições GEV, $i = 1, 2$. Seja $C(.)$ a cópula pertencente a $H(.,.)$;

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \tag{2-5}$$

Pelas considerações já feitas podemos dizer que existe uma cópula $C_*(.)$, única, tal que

$$W(x_1, x_2) = C_*(H_1(x_1), H_2(x_2)). \tag{2-6}$$

Deheuvels [3] mostra que

$$C_*(u_1, u_2) = \lim_{n\to\infty} C^n(u_1^{\frac{1}{n}}, u_2^{\frac{1}{n}}). \tag{2-7}$$

Então $C_*(.)$ satisfaz

$$C_*(u_1^t, u_2^t) = C_*^t(u_1, u_2), \tag{2-8}$$

para todo $t > 0$. A equação (2-8) é a definição de uma cópula de valores extremos.

---

[2] As distribuições H de valores extremos são obtidas como distribuições limite ($n \to \infty$) do máximo de um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, e são unicamente determinadas a menos de transformações afins. O teorema de Fisher-Tippett implica que se $F_X^n(c_n x + d_n)$ é não degenerada quando $n \to \infty$, para certas constantes $c_n > 0$, $d_n \in \Re$, então

$$|F_X^n(x) - H(\frac{x - d_n}{c_n})| \to 0,\ n \to \infty$$

para alguma H. Se a equação acima se verifica, dizemos que F_X pertence ao domínio de atração do máximo da distribuição de valores extremos H. Notação: $F_X \in MDA(H)$.

[3] Distribuição de valores extremos bivariados (*Bivariate Extreme Value*).

Supondo que $C(.)$ seja a cópula BB4 (notação de Joe [5]):

$$C_{\theta,\delta}(u_1, u_2) = \left\{ u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 - \left[(u_1^{-\theta} - 1)^{-\delta} + (u_2^{-\theta} - 1)^{-\delta} \right]^{-\frac{1}{\delta}} \right\}^{-\frac{1}{\theta}},$$

onde $\theta > 0$ e $\delta > 0$. Usando a equação (2-7) obtemos a cópula limite

$$C_*(u_1, u_2) = u_1 u_2 \exp \left\{ \left[(-\ln u_1)^{-\delta} + (-\ln u_2)^{-\delta} \right]^{-\frac{1}{\delta}} \right\},$$

que é a cópula Galambos, mostrada mais a frente na equação (2-14). Assim, dizemos que a cópula BB4 pertence ao domínio de atração da cópula Galambos.

Apresentamos agora uma versão bivariada do teorema de Fisher-Tippett.

Teorema 2.2.1.(Fisher-Tippett para cópulas). *Suponha que* $H(.,.) \in MDA(W)$ *e que* $W(x_1, x_2) = C_*(H_1(x_1), H_2(x_2))$. *Então*

(i) As marginais H_i são GEV e $F_i \in MDA(H_i)$, $i = 1, 2$.

(ii) $C_*(u_1^t, u_2^t) = C_*^t(u_1, u_2)$ para todo $t > 0$.

O teorema diz que se existir uma distribuição limite não degenerada para os máximos bivariados, então as suas marginais devem ser do tipo de uma distribuição de valores extremos, e que a cópula pertencente à distribuição limite deve ser max-estável. [4]

Sabe-se que a cópula $C(.)$ de $H(.,.)$ é invariante sob transformações estritamente crescentes de (X_1, X_2). Isto é, seja $Y_1 = T_1(X_1)$ e $Y_2 = T_2(X_2)$, onde T_1, T_2 são funções estritamente crescentes de $\Re \longmapsto \Re$. Então (Y_1, Y_2) tem também cópula $C(.)$, como mostrado no Teorema 2.1.1.

Por outro lado, se $C_*(.)$ é a cópula limite de (M_1, M_2), ou seja, $C_*(.)$ é a cópula pertencente a $W(.)$, pode-se mostrar que a cópula limite de (M_1', M_2') é também $C_*(.)$, onde (M_1', M_2') são os máximos associados às seqüências das variáveis aleatórias (Y_1, Y_2). Para a prova deste resultado consulte Joe [5]. De fato, a cópula limite C_* é independente da escolha das marginais de $H(.,.)$. Ela é determinada apenas pela cópula $C(.)$ de $H(.,.)$.

[4]Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função distribuição F, e sejam $d_n \in \Re$ e $c_n > 0$ constantes apropriadas. Dizemos que F é max-estável se satisfaz a igualdade em distribuição

$$max(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} c_n X + d_n.$$

A definição mostra que toda distribuição max-estável é distribuição limite para o máximo de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Este é um resultado de interessantes implicações. A interdependência entre quantis extremos de variáveis depende somente da cópula que as conecta, não importando em nada a forma de suas distribuições marginais.

Assim, dizer que $H(.,.) \in MDA(W)$ é equivalente a dizer que $(C, F_1, F_2) \in MDA(C_*, H_1, H_2)$. Resultando em:

Teorema 2.2.2. $(C, F_1, F_2) \in MDA(C_*, H_1, H_2)$ *se e somente se*

(i) $F_i \in MDA(H_i), i = 1, 2$.

(ii) $C \in MDA(C_*)$.

Não é fácil a caracterização dos domínios de atração bivariados. Através das cópulas, no entanto, este exercício se torna bastante interessante. Uma distribuição normal bivariada com coeficiente de correlação < 1, por exemplo, apresenta margens pertencentes ao MDA da Gumbel, H_0, e o limite de sua cópula (cópula Gaussiana) é a cópula produto, $\Pi(.)$. Temos então:

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) &= \Pi(H_0(x_1), H_0(x_2)) \\ &= \exp(-e^{-x_1}) \exp(-e^{-x_2}) \\ &= \exp(-e^{x_1} - e^{x_2}). \end{aligned}$$

Podemos agora estabelecer o conceito de domínio de atração para cópulas.

Definição 2.2.1. Seja $C_*(.)$ uma cópula de valores extremos. Dizemos que a cópula $C(.)$ pertence ao domínio de atração de $C_*(.)$, e escrevemos, $C \in CDA(C_*)$, se e somente se $C(F_1, F_2) \in MDA(C_*(H_1, H_2))$, sempre que F_i contínua, $F_i \in MDA(H_i), i = 1, 2$.

Assim, max-estabilidade não só garante que $W \in MDA(W)$ como também garante que $C_* \in CDA(C_*)$, para toda cópula de valores extremos C_*.

Analogamente ao estudo dos diferentes domínios de atração, também precisamos de teoremas e condições que permitam caracterizar se uma determinada cópula está, ou não, no domínio de atração de uma outra cópula. O teorema a seguir é uma ferramenta que pode ser utilizada nesse sentido.

Teorema 2.2.3. *Seja $C(.)$ uma cópula e $C_*(.)$ uma cópula de valores extremos. Então, $C \in CDA(C_*)$ se e somente se*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - C(1 - tu_1, 1 - tu_2)}{t} = -\ln C_*(e^{-u_1}, e^{-u_2}). \tag{2-9}$$

Uma outra propriedade interessante é sobre o resultado de uma combinação convexa de cópulas de valores extremos. Sejam $C_i(.),\ i = 1, 2$, cópulas. Seja $\alpha \in (0, 1)$, e suponha que $C_i \in CDA(C_{*,i}),\ i = 1, 2$. Defina

$$C_3(u_1, u_2) = \alpha C_1(u_1, u_2) + (1 - \alpha) C_2(u_1, u_2).$$

Pode-se mostrar, usando a equação (2-9), que a cópula limite de $C_3(.)$, denotada por $C_{*,3}(.)$ é dada por

$$C_{*,3}(u_1, u_2) = (C_{*,1}(u_1, u_2))^{\alpha} (C_{*,2}(u_1, u_2))^{1-\alpha}. \tag{2-10}$$

Aplicando a equação (2-10) às cópulas de valores extremos: as cópulas produto $\Pi(.)$, e a da dependência positiva perfeita $M(.)$, obtem-se

$$C_{*,3}(u_1, u_2) = (u_1 u_2)^{\alpha} \min(u_1^{1-\alpha}, u_2^{1-\alpha}),$$

que é a cópula de valor extremo de Marshall-Olkin.

Uma cópula $C(.)$ é simétrica se satisfaz

$$C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1), \quad \text{para todo } (u_1, u_2) \in [0, 1]^2,$$

e as variáveis envolvidas são permutáveis. Isto significa que as linhas de quantil de $C(.)$ são simétricas em relação à diagonal principal de $[0, 1]^2$. Em uma cópula permutável, a seção vertical de sua densidade ao longo da diagonal secundária, $c(u, 1 - u)$, é simétrica.

Cópulas permitem o uso de vários conceitos de dependência e de concordância, veja Joe [5] e Nelsen [15]. Aqui, tratando de extremos, o conceito mais importante será o de dependência de cauda. O coeficiente de dependência de cauda mede a dependência assintótica existente no quadrante superior direito, ou no quadrante inferior esquerdo, de uma distribuição bivariada.

O coeficiente de dependência de cauda superior, λ_U, entre X_1 e X_2, é definido como

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \lambda_U(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0^+} P\{X_1 > F_1^{-1}(1-\alpha) \mid X_2 > F_2^{-1}(1-\alpha)\}, \tag{2-11}$$

se este limite existe. Dizemos que duas variáveis, X_1 e X_2, são assintoticamente dependentes na cauda superior se $\lambda_U \in (0,1]$, e assintoticamente independentes se $\lambda_U = 0$. O mesmo conceito é aplicado para se definir o coeficiente de dependência de cauda inferior, λ_L.

Ambos os coeficientes, λ_U e λ_L, podem ser expressos através da cópula $C(.)$ pertencente a (X_1, X_2):

$$\lambda_U = \lim_{u \uparrow 1} \frac{\bar{C}(u,u)}{1-u}, \tag{2-12}$$

onde $\bar{C}(u,v) = Pr\{U > u, V > v\}$, e

$$\lambda_L = \lim_{u \downarrow 0} \frac{C(u,u)}{u}, \tag{2-13}$$

se esses limites existem.

Podemos classificar as cópulas em três tipos, de acordo com a forma da seção vertical $c(u,u)$ de sua densidade ao longo da diagonal principal. A cópula tipo “J” possui somente $\lambda_U > 0$. A cópula do tipo “L” possui somente $\lambda_L > 0$, e a cópula tipo “U” possui ambos $\lambda_L > 0$ e $\lambda_U > 0$.

As cópulas tipo “J” apresentam um tipo de assimetria de particular interesse quando se estuda valores extremos. A maioria das cópulas de valores extremos são do tipo “J”.

Cópulas que têm $\lambda_U > 0$ podem ser construídas aplicando-se o conceito de cópulas associadas. Para qualquer cópula n-dimensional, existem $2^n - 1$

cópulas associadas. Quando $n = 2$ e (U, V) possui cópula $C(.)$, as cópulas associadas são:

1. A cópula pertencente à distribuição de $(1 - U, 1 - V)$ e dada por $C'(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$.
2. A cópula pertencente à distribuição de $(U, 1 - V)$ e dada por $C''(u, v) = u - C(u, 1 - v)$.
3. A cópula pertencente à distribuição de $(1 - U, V)$ e dada por $C'''(u, v) = v - C(1 - u, v)$.

Se a cópula $C(.)$ é do tipo "L", então $C'(.)$ é do tipo "J" (Joe [5]). Aplicaremos esta construção à cópula de Kimeldorf e Sampson, para obtermos uma cópula de valores extremos com $\lambda_U > 0$ (veja a cópula C^{δ}_{AKS}).

Na prática, o problema da identificação da cópula mais adequada para um conjunto de dados é complexo. No caso da modelagem de eventos extremos, podemos superar esta dificuldade restringindo nossa atenção às cópulas de valores extremos. Serão mostradas a seguir as cinco famílias paramétricas de cópulas de valores extremos que serão usadas, nesta dissertação, na modelagem dos dados. Nas expressões abaixo usar-se-á a seguinte notação: $\tilde{u} = -\ln u$, e $\tilde{v} = -\ln v$.

(i) *Cópula Galambos:* C^{δ}_{Gal}

$$C_{Gal}(u, v, \delta) = u_1 u_2 \exp\left\{ (\tilde{u}^{-\delta} + \tilde{v}^{-\delta})^{-\frac{1}{\delta}} \right\}, \qquad (2\text{-}14)$$

onde $0 \leq \delta < \infty$. Esta é uma cópula permutável tipo "J", com coeficiente de dependência de cauda superior igual a $2 - 2^{\frac{1}{\delta}}$, para $\delta > 1$. Quando $\delta \to 0$, C^{δ}_{Gal} se aproxima da cópula produto.

(ii) *Cópula associada a cópula de Kimeldorf e Sampson:* C^{δ}_{AKS}

$$C_{AKS}(u, v, \delta) = u + v - 1 + \left[(1 - u)^{-\frac{1}{\delta}} + (1 - v)^{-\frac{1}{\delta}} - 1 \right]^{-\delta}, \qquad (2\text{-}15)$$

onde $\delta \geq 0$. Esta é uma cópula tipo "J" permutável, obtida como a cópula C' associada à cópula de Kimeldorf e Sampson (ou Pareto), dada por $C(u,v) = (u^{-\delta} + v^{-\delta} - 1)^{-\frac{1}{\delta}}$. Ela possui $\lambda_U = 2^{-\frac{1}{\delta}}$, que vai para zero quando $\delta \to 0$. Pode-se mostrar (Frees e Valdez [7]) que a $C_{AKS}(u,v,\delta)$ é a cópula pertencente à distribuição de Pareto bivariada, isto é, à distribuição formada por marginais Pareto procedentes de uma mesma classe indexada por um parâmetro que induz independência.

(iii) *Cópula do modelo logístico assimétrico:* C_{ALM}^{δ,p_1,p_2}

$$C_{ALM}(u,v,\delta,p_1,p_2) = \exp\left[-\left(p_1^\delta \tilde{u}^\delta + p_2^\delta \tilde{v}^\delta\right)^{\frac{1}{\delta}} - (1-p_1)\tilde{u} - (1-p_2)\tilde{v}\right], \tag{2-16}$$

para $(p_1,p_2) \in [0,1]^2$ e $\delta \leq 1$. Esta cópula é uma mistura das cópulas produto e Gumbel, e pode ser obtida usando a técnica de assimetrização. É uma cópula não permutável. Contudo, não possui um único parâmetro associado com a não-permutabilidade, e problemas de identificabilidade de modelo podem ocorrer.

Utilizando-se a técnica de assimetrização é possível obter-se a mesma expressão para a função de dependência $A(.)$ do modelo logístico assimétrico dada por

$$A_4(v) = \left[\theta^\delta(1-v)^\delta + \phi^\delta v^\delta\right]^{\frac{1}{\delta}} + (\theta-\phi)v + 1 - \theta, \quad 0 \leq \theta,\phi \leq 1, \quad \delta \geq 1.$$

No caso da cópula da cópula C_{ALM}^{δ,p_1,p_2}, os parâmetros (p_1,p_2) estão restritos ao $[0,1]^2$. A partir da expressão obtida para $A(.)$ e de $\lambda = 2[1 - A(1/2)]$ obtemos a expressão para o coeficiente de dependência de cauda superior da cópula C_{ALM}^{δ,p_1,p_2}. É dado por:

$$\lambda_U = p_1 + p_2 - (p_1^\delta + p_2^\delta)^{\frac{1}{\delta}}, \tag{2-17}$$

para $(p_1, p_2) \in [0,1]^2$ e $\delta \geq 1$. Se p_1 ou p_2 for igual a zero , então $\lambda_U = 0$, e temos independência. Quando $p_1 = p_2 = 1$, fazendo $\delta \to \infty$, λ_U se aproxima de 1, o caso da dependência perfeita.

(iv) *Cópula Joe-Clayton:* $C_{JC}^{\delta,\theta}$

$$C(u,v,\delta,\theta) = 1 - \left[1 - \left([1-(1-u)^{\theta}]^{-\delta} + [1-(1-v)^{\theta}]^{-\delta} - 1\right)^{-\frac{1}{\delta}}\right]^{\frac{1}{\theta}}, \tag{2-18}$$

onde $\theta \geq 1$, $\delta \geq 0$. Esta é uma cópula tipo "U", permutável, que possui ambos os coeficientes de dependência de cauda (não necessariamente iguais), sendo $\lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$ independente de δ, e $\lambda_L = 2^{-\frac{1}{\delta}}$, independente de θ. Quando $\lambda_U = 0$ $(\theta = 1)$ ela reduz à cópula Clayton. Quando $\delta \leq 1$, a concordância aumenta com θ. Quando $\theta \to \infty$ ou $\delta \to \infty$, a $C_{JC}^{\delta,\theta}$ se aproxima da dependência perfeita positiva dada pela cópula M, e $\lambda_U \to 1$.

(v) *Cópula Joe:* C_J^{δ}

$$C(u,v,\delta) = 1 - \left[(1-u)^{\delta} + (1-v)^{\delta} - (1-u)^{\delta}(1-v)^{\delta}\right]^{\frac{1}{\delta}}, \tag{2-19}$$

onde $\delta \geq 1$.

Maiores definições e explicações a respeito das cópulas, como modelar dependências com elas e seus principais processos de estimação podem ser encontrados em Mendes [12] e Anjos, Ferreira, Kolev e Mendes [13].