

### 3

## Estacionariedade e Identificação via Simulações Monte Carlo

Neste capítulo iremos realizar estudos de simulação Monte Carlo dos modelos GARMA para séries de contagem, com o objetivo de investigar duas importantes propriedades destes modelos: a região de estacionariedade e a adequação de critérios de informação na identificação da ordem correta do modelo. Para tal foram simuladas diversas séries com diferentes estruturas (GARMA (1,0), GARMA(2,2) etc) a fim de se obter uma base para análise. Foram geradas e estimadas séries de tamanhos variados pelos dois modelos.

### 3.1

#### Estacionariedade

Ao fazer qualquer tipo de inferência sobre parâmetros que definem um modelo estatístico para séries de tempo, é importante investigar a condição de estacionariedade do processo.

Uma série temporal é considerada estacionária se a distribuição de probabilidade da variável aleatória  $X_1, X_2, \dots, X_t$  é a mesma de uma outra variável aleatória (da mesma série mas agora deslocada no tempo  $k$  instantes)  $X_{1+k}, X_{2+k}, \dots, X_{t+k}$ . Sendo assim a distribuição de probabilidade não poderá depender do instante de observação.

A fim de se investigar a região de estacionariedade dos processos GARMA iremos adotar o procedimento empírico utilizado por Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003) [1]. Tal procedimento baseia-se na comparação, para diversos período de tempo, da distribuição incondicional implicada pelo processo GARMA, a partir da obtenção de séries simuladas por Monte Carlo. Mais especificamente, foram levantadas as distribuições incondicionais a partir de 1000 realizações para treze instantes de tempo, a saber,  $t = 1, 25, 50, 75, 100, 125, 150$ ,

175, 200, 225, 250, 275 e 300, utilizando especificações paramétricas particulares, isto é, combinações de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , para o processo GARMA-Poisson, e de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $k$  para o processo GARMA-Binomial Negativa. Os valores dos hiperparâmetros utilizados na geração das séries foram:

$$\phi_1 = (0.2, 0.4, 0.6);$$

$$\phi_2 = (0.2, 0.4, 0.6);$$

$$\theta_1 = (0.2, 0.4, 0.6);$$

$$\theta_2 = (0.2, 0.4, 0.6);$$

$$k = (3, 8, 20);$$

Esquemáticamente:

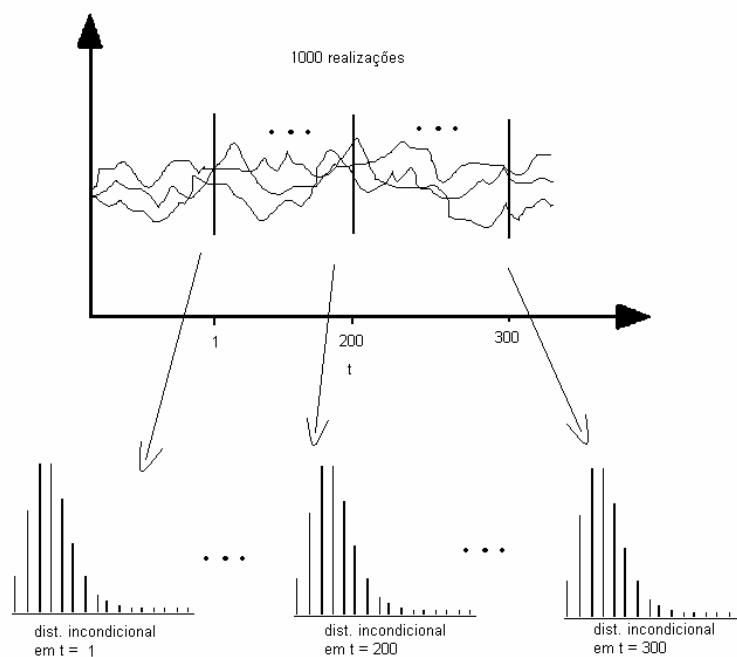


Figura 2: Esquema de simulações para investigação da região de estacionariedade dos processos GARMA para dados de contagem.

Se para uma dada combinação dos parâmetros o processo for estacionário estrito, então espera-se que, a menos de flutuações estatísticas, não haja diferenças entre as distribuições incondicionais empíricas levantadas em instantes de tempos

arbitrários. Foi utilizado o teste chi-quadrado para  $k$  amostras independentes o qual é uma extensão direta do teste chi-quadrado para duas amostras. A hipótese nula é de que as  $k$  amostras de frequências são oriundas da mesma população ou de populações idênticas. Maiores detalhes deste teste podem ser vistos no apêndice ? em Siegel and Castellan (1988) [18]

A título de ilustração apresentamos abaixo as distribuições empíricas nos tempos  $t=100$ ,  $t=150$  e  $t=300$  para o caso GARMA-Poisson com  $\phi_1=0.2$ ,  $\phi_2=0.2$ ,  $\theta_1=0$  e  $\theta_2=0$ .

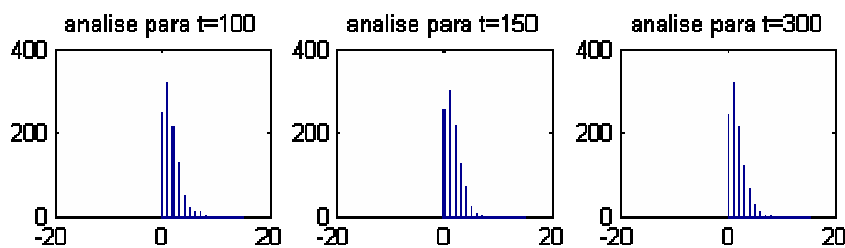


Figura 3: Exemplo de distribuições empíricas incondicionais nos tempos  $t=100$ ,  $t=150$  e  $t=300$  para o modelo GARMA-Poisson com apenas termos autoregressivos.

Os resultados encontram-se especificados para cada estrutura GARMA-Poisson. Em cada gráfico estão representados os valores empíricos do teste de homogeneidade (barras verticais), bem como o valor crítico da distribuição do teste de homogeneidade ao nível de 5% (distribuição  $\chi_{35}^2$ ) representado como uma linha densa na horizontal.

Abaixo está ilustrada a organização utilizada para apresentar os resultados encontrados pela análise de estacionariedade para o caso GARMA(1,0)-NB. A apresentação dos resultados para o caso GARMA-Poisson é a mesma, diferindo apenas pela ausência do hiperparâmetro  $k$ .

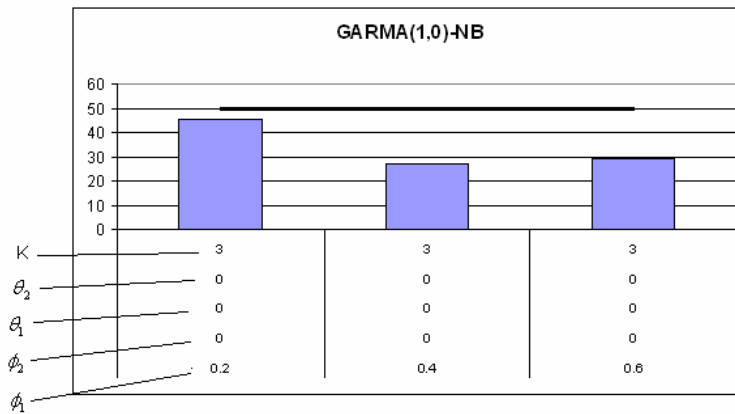


Figura 4: Exemplo ilustrativo do esquema utilizado para apresentação dos resultados da análise de estacionariedade. Os hiperparâmetros utilizados  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $k$  estão apontados ao lado da figura (de baixo para cima).

Neste exemplo estão representados os resultados referentes a 3 estruturas GARMA-NB:

- Modelo GARMA-(1,0)-NB com  $\phi_1=0,2$ ,  $\phi_2=0$ ,  $\theta_1=0$ ,  $\theta_2=0$  e  $k=3$ .
- Modelo GARMA-(1,0)-NB com  $\phi_1=0,4$ ,  $\phi_2=0$ ,  $\theta_1=0$ ,  $\theta_2=0$  e  $k=3$ .
- Modelo GARMA-(1,0)-NB com  $\phi_1=0,6$ ,  $\phi_2=0$ ,  $\theta_1=0$ ,  $\theta_2=0$  e  $k=3$ .

➤ Análise para séries geradas pelo modelo GARMA-Poisson:

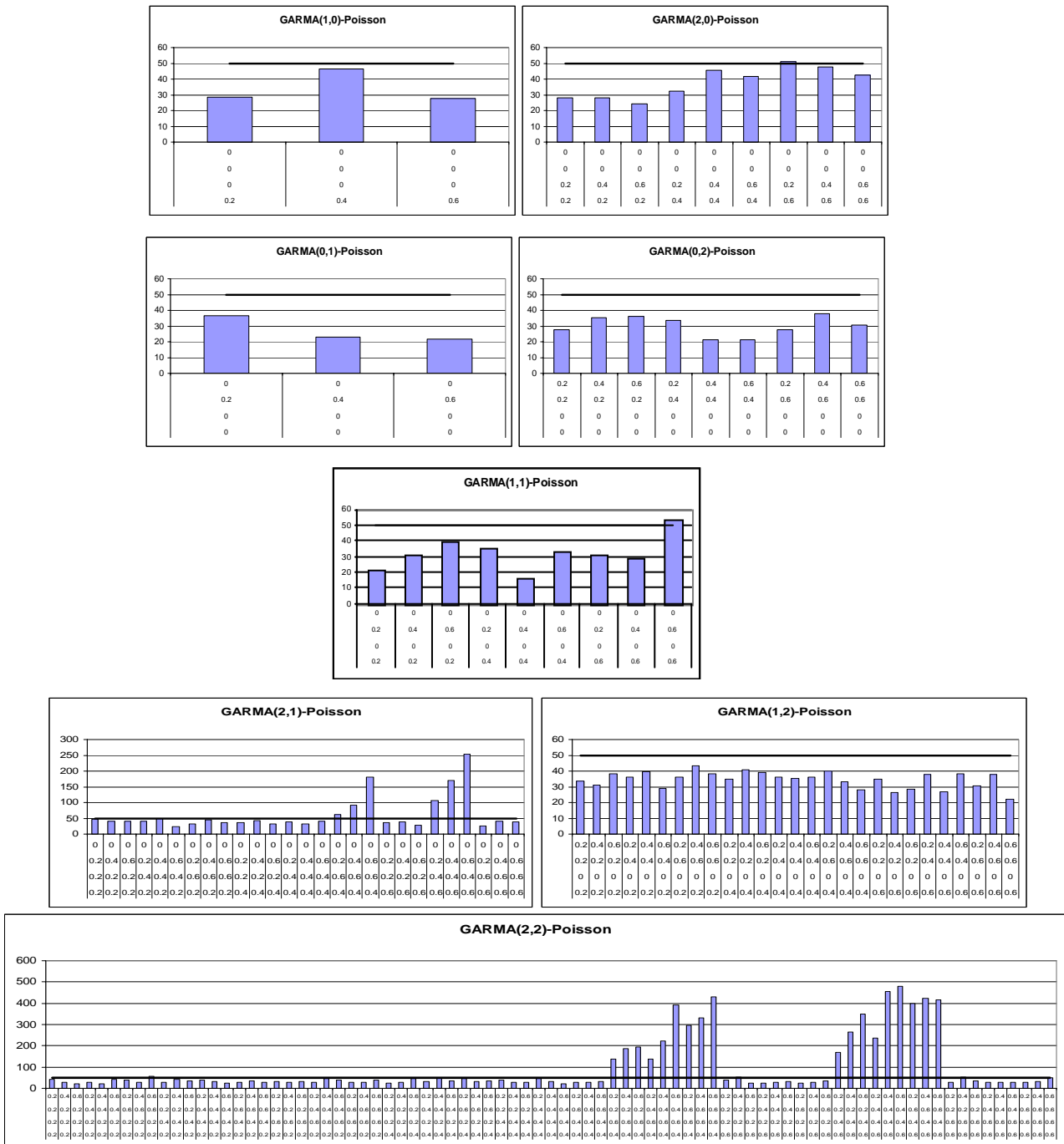


Figura 5: Análise de estacionariedade para séries geradas pelo modelo GARMA-Poisson.

Foram procurados padrões que pudessem explicar o comportamento encontrado. A característica mais interessante encontrada foi a de que a não estacionariedade está presente quase sempre nas estruturas onde os valores dos hiperparâmetros referentes à parte autoregressiva, ou seja  $\phi_1$  e  $\phi_2$  somam 1 (um). Este fato fica evidente ao se observar à análise das estruturas GARMA(2,1) e GARMA(2,2). Não foi encontrada uma explicação para tal fenômeno mas foi possível comprovar que os modelos GARMA utilizados não possuem as mesmas condições de estacionariedade dos modelos ARMA tradicionais visto que nestes o subespaço paramétrico para o qual são geradas séries estacionárias é bem definido.

Outras características, algumas esperadas e outras não, também foram observadas: a não evidência de não estacionariedade para estruturas puramente médias móveis e a presença de evidência de não estacionariedade em algumas outras estruturas como a puramente autoregressiva (com  $\phi_1=0.6$  e  $\phi_2=0.2$ ) ilustram respectivamente este fato e a dificuldade de se encontrar padrões bem definidos.

Vale observar que os resultados aqui encontrados estão de acordo com os encontrados por Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003) [1] no estudo do caso GARMA(1,1)-Poisson mas nota-se no entanto evidência de não estacionariedade identificada para a estrutura GARMA(1,1) com  $\phi_1 = \theta_1 = 0.6$ . Esses valores de  $\phi_1$  e  $\theta_1$  no entanto não foram utilizados no estudo de Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003) [1] o que deixa a questão em aberto visto que o comportamento do modelo é um tanto não convencional.

➤ Análise para séries geradas pelo modelo GARMA-NB com  $k=3$ :

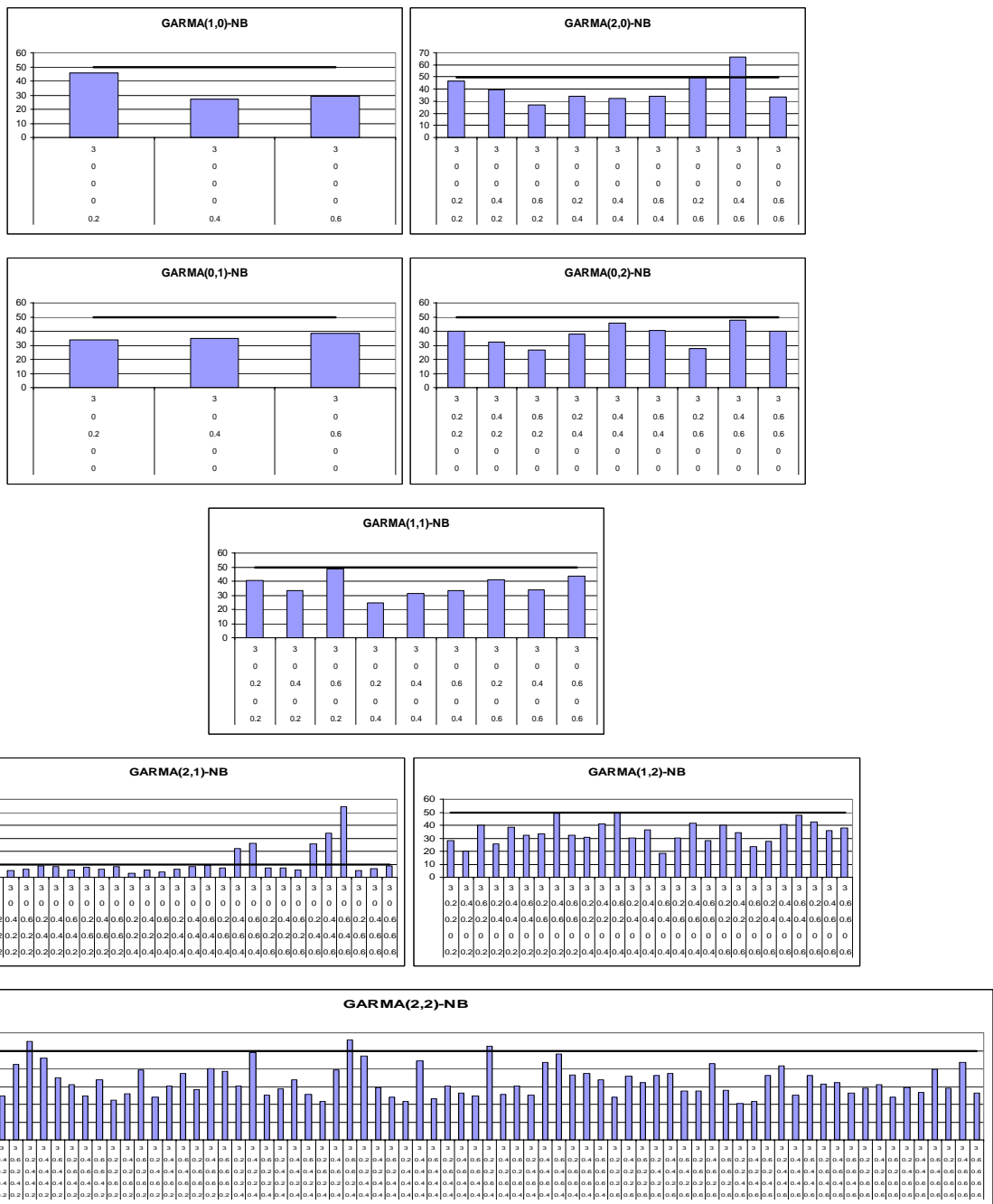


Figura 6: Análise de estacionariedade para séries geradas pelo modelo GARMA-NB.

Para o caso das séries geradas pelo modelo GARMA-NB a análise foi ainda mais difícil e menos padrões foram encontrados. Algumas características são semelhantes às do caso GARMA-Poisson como a evidência de não estacionariedade para diversas estruturas onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  somam 1 (um).

A mesma análise foi feita para o caso com GARMA-NB com  $k=8$  obtendo-se resultados muito semelhantes aos encontrados em  $k=3$ . Já para as séries geradas pelo modelo GARMA-NB com  $k=20$  os resultados encontrados foram praticamente os mesmos do caso GARMA-Poisson, o que era de se esperar já que a distribuição Binomial Negativa aproxima-se da distribuição Poisson para valores grandes de  $k$ .

A presença do hiperparâmetro  $k$ , especialmente quando de pequeno módulo parece tornar as séries “mais estacionárias”. Isso provavelmente deve-se ao fato de que o hiperparâmetro  $k$  (parâmetro de dispersão) aumenta a variância presente nas séries aumentando com isso a probabilidade de séries ligeiramente diferentes serem identificadas como tendo a mesma estrutura geradora ou seja possuírem a mesma distribuição condicional.

A partir destas análises pôde-se ter uma idéia do espaço paramétrico para os quais são geradas séries estacionárias nas análises de identificação seguintes.

### 3.2

#### Identificação pela inspeção visual da função de autocorrelação e da função de autocorrelação parcial

Foram observadas as funções de autocorrelação (FAC) e as funções de autocorrelação parcial (FACP) de uma mostra das séries geradas. A identificação de alguns padrões (similares aos encontrados nos modelos lineares ARMA) motivou a investigação do comportamento médio das FAC's e FACP's para um grande número de séries. Abaixo temos exemplos dos padrões reconhecidos em três das séries geradas.



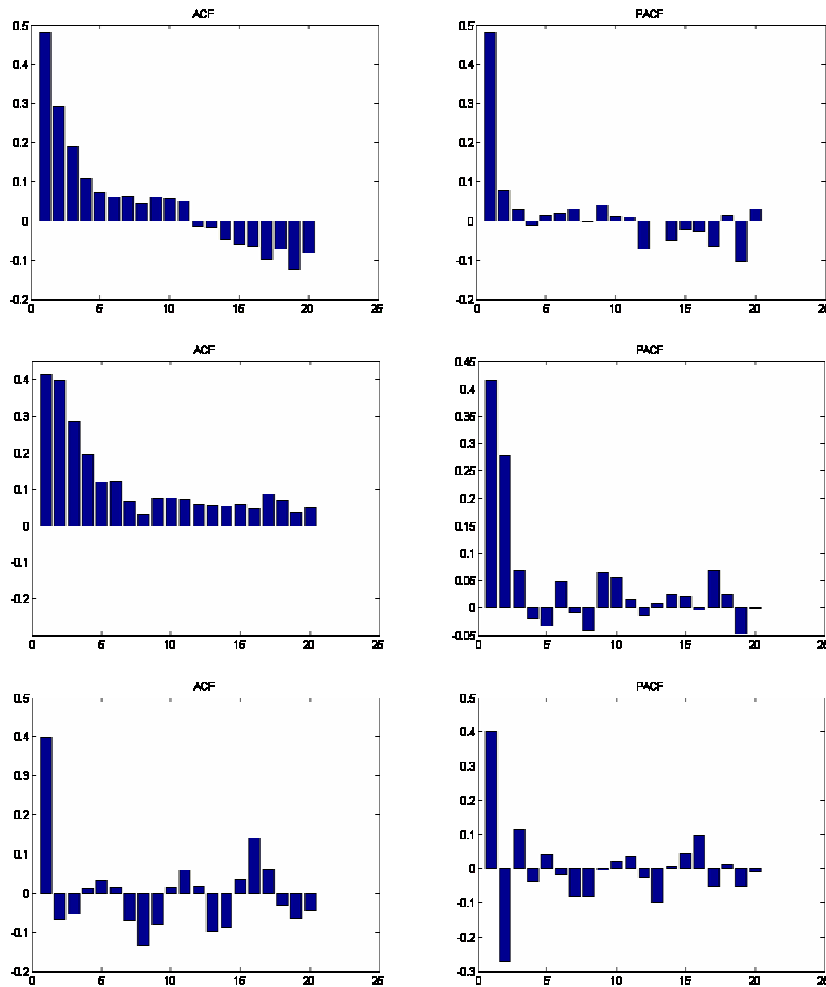


Figura 7: FAC e FACP para algumas séries geradas. De cima para baixo: GARMA(1,0)-Poisson, GARMA(2,0)-NB, e GARMA(0,1)-Poisson.

Pode-se notar, nos exemplos acima, padrões parecidos com os existentes nos tradicionais modelos ARMA. A presença de um possível decaimento exponencial na FAC e um corte brusco no primeiro lag da FACP de uma série nos indicam provavelmente que temos em mãos uma série de estrutura AR(1). Já um corte brusco no primeiro lag da FACP de uma série somado a uma FAC com decaimento exponencial podem indicar tratar-se de uma série de estrutura MA(1).

A fim de estudar melhor esses padrões, para cada conjunto de 100 séries geradas foram obtidas a função de autocorrelação média e da função de autocorrelação parcial média. Análise visual da FAC média e da FACP média indicou que os padrões encontrados nas séries geradas pelos modelos ARMA

estão presentes também nas séries geradas pelos modelos GARMA-Poisson e GARMA-NB.

Como seria inviável a inclusão, neste trabalho, de todos os gráficos desta análise, alguns destes foram selecionados para ilustrar os padrões encontrados. Abaixo encontram-se alguns dos gráficos selecionados e breves comentários.

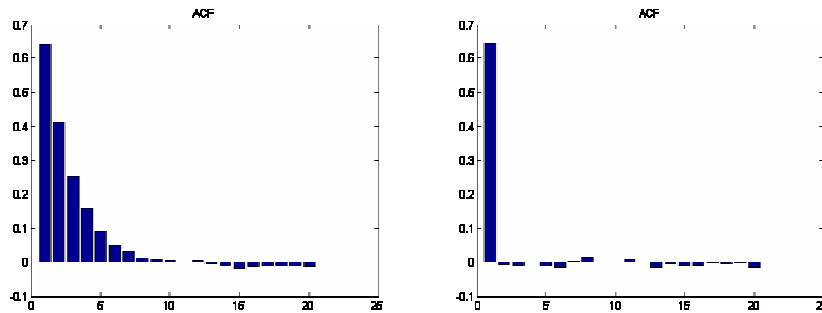


Figura 8: FAC e FACP médias para séries geradas pelos modelos GARMA(1,0) -NB com parâmetros:  $\phi_1=0.6$  e  $k=3$ .

Vê-se claramente que um decaimento exponencial na FAC média e um corte brusco no primeiro lag da FACP média indicando uma estrutura AR(1).

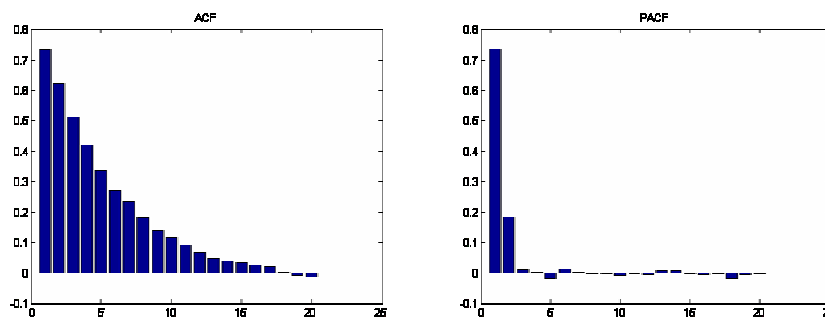


Figura 9: FAC e FACP médias para séries geradas pelos modelos GARMA(2,0) -Poisson com parâmetros:  $\phi_1=0.6$  e  $\phi_2=0.2$ .

Na Figura 9 temos um comportamento típico de séries geradas por uma estrutura AR(2), um decaimento exponencial na FAC e um corte brusco no segundo lag da FACP.

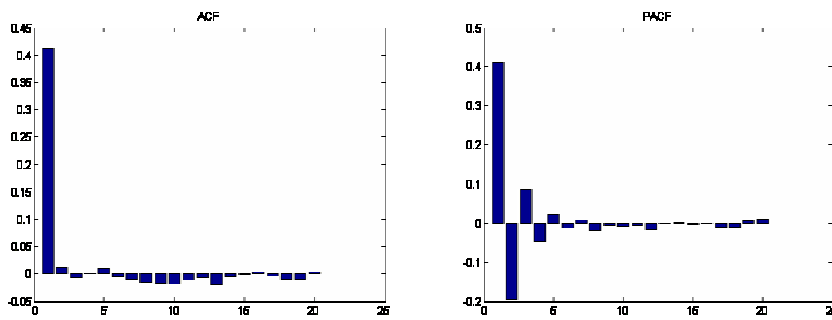


Figura 10: FAC e FACP médias para séries geradas pelo modelo GARMA(0,1) -NB com parâmetros:  $\theta_1=0.6$  e  $k=3$ .

Na Figura 10, um corte brusco na FAC média no primeiro lag e um decaimento exponencial (no caso com raízes complexas) na FACP média nos indicam tratar-se de séries geradas possivelmente por um modelo de estrutura MA(1).

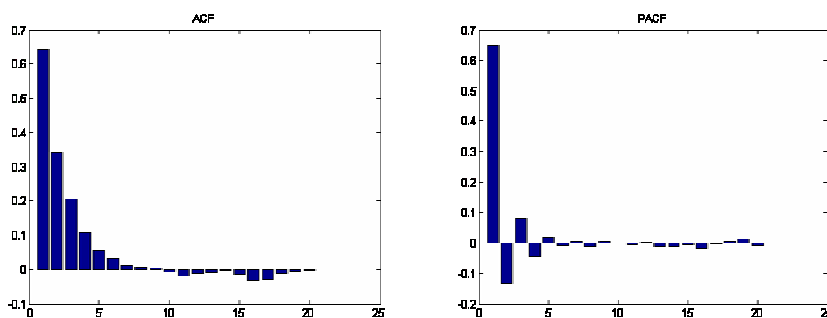


Figura 11: FAC e FACP médias para séries geradas pelos modelos GARMA(2,1) -NB com parâmetros  $\phi_1=0.2$ ,  $\phi_2=0.2$ ,  $\theta_1=0.6$  e  $k=3$ .

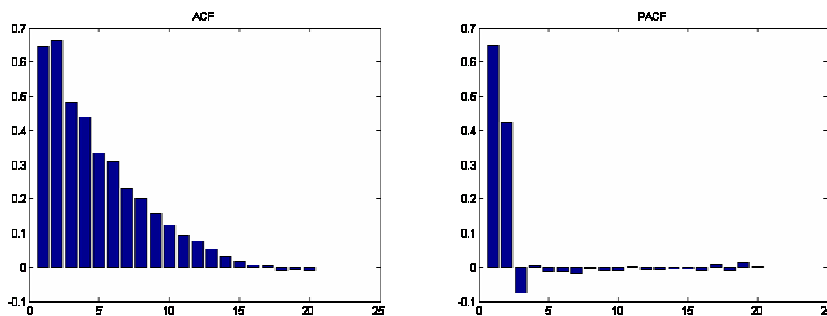


Figura 12: FAC e FACP médias para séries geradas pelos modelos GARMA(2,1) -NB com parâmetros  $\phi_1=0.2$ ,  $\phi_2=0.6$ ,  $\theta_1=0.2$  e  $k=3$ .

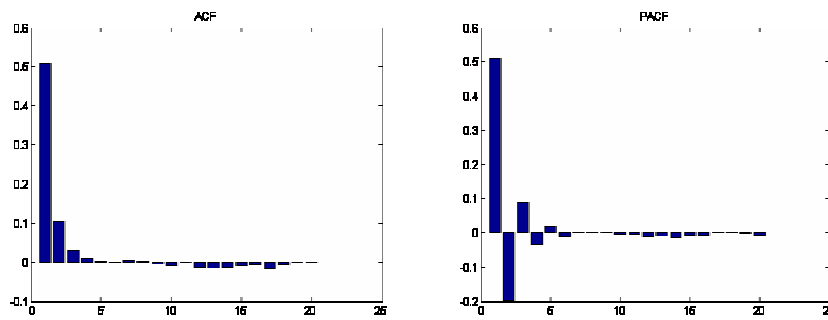


Figura 13: FAC e FACP médias para séries geradas pelos modelos GARMA(1,1) - Poisson com parâmetros:  $\phi_1=0.2$  e  $\theta_1=0.6$ .

Para os casos acima, GARMA(2,1) e GARMA(1,1) a análise visual da FAC e da FACP para a identificação da estrutura geradora das séries fica dificultada senão inviável pela sobreposição dos padrões oriundos das partes autoregressivas e médias móveis. Essa mesma dificuldade é enfrentada ao tentarmos analisar visualmente a FAC e a FACP para os modelos ARMA mais complexos tornando esse tipo de identificação pouco confiável para as estruturas mistas

Devido à complexidade dos padrões presentes na ACF e na PACF geradas pelos modelos mistos limitaremos a exposição dos resultados das análises feitas aos gráficos já apresentados. Mesmo com o diminuto material exposto há forte evidência de que a metodologia de inspeção da FAC e da FACP, aplicada na identificação dos modelos ARMA, podem ser aplicadas também aos modelos GARMA.

### 3.3

#### Identificação utilizando critérios de informação

O objetivo desta secção é investigar se os critérios usuais de identificação, os critérios de informação, AIC (*Akaike information criterion*), BIC (*Bayesian information criterion*) e Hanna-Quinn, são adequados na identificação dos modelos GARMA-Poisson e GARMA-NB. Os critérios de informação são definidos como a seguir:

$$AIC = n^{-1} \left[ -2 \log(L(\hat{\gamma})) + 2p \right] \quad (56)$$

$$BIC = n^{-1} \left[ -2 \log(L(\hat{\gamma})) + p \log(n) \right] \quad (57)$$

$$Hanna\_Quinn = -2 \left( \frac{L(\hat{\gamma})}{n} \right) + \frac{2k \log(\log n)}{n} \quad (58)$$

onde  $p$  é o número de parâmetros estimados e  $n$  é o tamanho da série efetivamente utilizada para a estimação da verossimilhança.

Para gerar as séries GARMA estacionárias para este estudo utilizamos as indicações das especificações GARMA que resultaram em séries estacionárias, segundo o estudo anterior. Estes valores foram escolhidos de forma muito conservadora a fim de minimizar a possibilidade de geração de séries não estacionárias geradas por possíveis valores de parâmetros localizados em regiões de fronteira entre os sub-espacos paramétricos geradores de séries estacionárias e não estacionárias. Abaixo encontram-se os valores dos hiperparâmetros utilizados para a geração de séries pelo modelo GARMA-Poisson. Para o caso GARMA-NB foram utilizados os mesmo valores de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  em combinação com os seguintes valores de  $k$ ,  $k=3$ ,  $k=8$ .

Tabela 2: Valores dos hiperparâmetros multiplicadores dos termos auto-regressivos ( $\phi_1$  e  $\phi_2$ ) e médias móveis ( $\theta_1$  e  $\theta_2$ ).

<b>Estrutura</b>	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$
<b>GARMA(1,0)</b>	0.2	0	0	0
	0.4	0	0	0
	0.6	0	0	0
<b>GARMA(2,0)</b>	0.2	0.2	0	0
	0.2	0.6	0	0
	0.6	0.2	0	0
<b>GARMA(1,1)</b>	0.6	0.6	0	0
	0.2	0	0.2	0
	0.2	0	0.6	0
<b>GARMA(0,1)</b>	0.6	0	0.2	0
	0	0	0.6	0
	0	0	0.2	0.2
<b>GARMA(0,2)</b>	0	0	0.2	0.6
	0	0	0.6	0.2
	0	0	0.6	0.6
<b>GARMA(2,1)</b>	0.2	0.2	0.2	0
	0.2	0.2	0.6	0
	0.2	0.6	0.2	0
<b>GARMA(1,2)</b>	0.6	0.2	0.2	0
	0.2	0	0.2	0.2
	0.2	0	0.2	0.6
<b>GARMA(2,2)</b>	0.6	0	0.6	0.2
	0.2	0	0.2	0.2
	0.2	0.2	0.2	0.2
<b>GARMA(2,2)</b>	0.2	0.2	0.2	0.6
	0.2	0.2	0.6	0.2
	0.2	0.2	0.6	0.2
	0.2	0.6	0.2	0.2
	0.6	0.2	0.2	0.2
	0.2	0.2	0.6	0.6
	0.2	0.6	0.2	0.6
0.2	0.6	0.6	0.2	
	0.2	0.6	0.6	0.6

Em cada caso, uma vez definidos os parâmetros foram geradas 100 séries de tamanho 300 para avaliação. A avaliação se deu pela comparação dos já citados critérios de identificação obtidos pelo ajuste de diversos modelos GARMA-Poisson e GARMA-NB para cada uma das séries geradas.

Para cada conjunto de séries foram estimados os seguintes modelos abaixo enumerados:

- Modelo GARMA(1,0)-Poisson;
- Modelo GARMA(2,0)-Poisson;
- Modelo GARMA(3,0)-Poisson;
- Modelo GARMA(0,1)-Poisson;
- Modelo GARMA(0,2)-Poisson;
- Modelo GARMA(1,1)-Poisson;
- Modelo GARMA(1,2)-Poisson;
- Modelo GARMA(2,1)-Poisson;
- Modelo GARMA(2,2)-Poisson;
- Modelo GARMA(1,0)-Binomial Negativa;
- Modelo GARMA(2,0)-Binomial Negativa;
- Modelo GARMA(3,0)-Binomial Negativa;
- Modelo GARMA(0,1)-Binomial Negativa;
- Modelo GARMA(0,2)-Binomial Negativa;
- Modelo GARMA(1,1)-Binomial Negativa;
- Modelo GARMA(1,2)-Binomial Negativa;
- Modelo GARMA(2,1)-Binomial Negativa;
- Modelo GARMA(2,2)-Binomial Negativa.

Depois de estimados os modelos, identificou-se os dois melhores desempenhos baseando-se nos critérios BIC, AIC e Hanna-Quinn. Os resultados encontrados estão organizados nas tabelas 3, 4 e 5. Na tabela 3 estão os resultados referentes às séries geradas pelos modelos GARMA-Poisson e nas tabelas 4 e 5 estão os referentes às séries geradas pelos modelos GARMA-Binomial Negativa.

Estas tabelas encontram-se organizadas da seguinte forma: a primeira coluna indica o modelo utilizado para gerar as séries e as quatro próximas colunas possuem os hiperparâmetros utilizados em cada modelo. Nas colunas seguintes estão os dois melhores modelos de acordo com cada critério precedidos pelas suas respectivas porcentagens de êxito.

Para exemplificar o uso das tabelas, abaixo estão descritas as informações contidas na primeira linha da tabela 3.

GARMA-Poisson	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	%	Modelos GARMA escolhido pelo critério BIC	%	Modelos GARMA escolhido pelo critério AIC	%	Modelos GARMA escolhido pelo critério Hanna
GARMA(1,0)	0.2	0	0	0	41	(1,2)	41	(1,2)	42	(1,2)
					27	(1,0)	21	(2,2)	19	(1,0)
	0.4	0	0	0	65	(1,0)	37	(1,0)	47	(1,0)
				11	(2,2)	16	(2,1)	15	(2,1)	
	0.6	0	0	0	75	(1,0)	32	(1,0)	53	(1,0)
				8	(2,1)	25	(2,1)	15	(2,1)	
	0.2	0.2	0	0	69	(2,0)	38	(2,0)	57	(2,0)
				15	(0,2)	18	(1,2)	14	(0,2)	
				89	(2,0)	63	(2,0)	82	(2,0)	
						22	(3,0)	13	(3,0)	

Figura 14: Ilustração do uso da tabela 3.

- As séries em análise foram geradas pelo modelo GARMA(1,0) – Poisson com os parâmetros  $\phi_1=0.2$ ,  $\phi_2=0$ ,  $\theta_1=0$  e  $\theta_2=0$ ;
- Os dois melhores modelos identificados pelos critérios BIC:
  - 1<sup>o</sup> - GARMA (1,2)-Poisson (identificado em 41% das séries);
  - 2<sup>o</sup> - GARMA (1,0)- Poisson (identificado em 27% das séries);
- Os dois melhores modelos identificados pelos critérios AIC:
  - 1<sup>o</sup> - GARMA (1,2)-Poisson (identificado em 41% das séries);
  - 2<sup>o</sup> - GARMA (2,2)-Poisson (identificado em 21% das séries);
- Os dois melhores modelos identificados pelos critérios Hanna-Quinn:
  - 1<sup>o</sup> - GARMA (1,2)-Poisson (identificado em 42% das séries);
  - 2<sup>o</sup> - GARMA (1,0)-Poisson (identificado em 19% das séries).

Nos casos onde houve empate, ou seja, duas estruturas foram identificadas o mesmo número de vezes, ambas encontram-se apresentadas lado a lado conforme aqui exemplificado: (1,2)/(1,0).



Tabela 3: Identificação dos dois melhores modelos para séries geradas por GARMA-Poisson.

GARMA-Poisson	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	%	Estrutura escolhida pelo critério		Estrutura escolhida pelo critério		Estrutura escolhida pelo critério	
						BIC	%	AIC	%	Hanna	%
GARMA(1,0)	0.2	0	0	0	41	(1,2)	41	(1,2)	42	(1,2)	
					27	(1,0)	21	(2,2)	19	(1,0)	
	0.4	0	0	0	65	(1,0)	37	(1,0)	47	(1,0)	
GARMA(2,0)	0.4	0	0	0	11	(2,2)	16	(2,1)	15	(2,1)	
	0.6	0	0	0	75	(1,0)	32	(1,0)	53	(1,0)	
					8	(2,1)	25	(2,1)	15	(2,1)	
GARMA(1,1)	0.2	0.2	0	0	69	(2,0)	38	(2,0)	57	(2,0)	
					15	(0,2)	18	(1,2)	14	(0,2)	
	0.2	0.6	0	0	89	(2,0)	63	(2,0)	82	(2,0)	
					6	(3,0)	22	(3,0)	13	(3,0)	
	0.6	0.2	0	0	56	(2,0)	53	(2,0)	60	(2,0)	
GARMA(0,1)	0.6	0.2	0	0	29	(1,0)	9	(1,1)/(1,2)	14	(1,0)	
					65	(2,0)	52	(2,0)	62	(2,0)	
	0.6	0.6	0	0	34	(1,1)	30	(1,1)	32	(1,1)	
	0.2	0	0.2	0	36	(1,0)	23	(1,1)	20	(1,1)	
					17	(1,1)	17	(2,1)	19	(1,0)	
GARMA(0,2)	0.2	0	0.6	0	84	(1,1)	65	(1,1)	79	(1,1)	
					6	(2,2)	13	(2,2)	9	(2,2)	
	0.6	0	0.2	0	41	(1,1)	31	(1,1)	38	(1,1)	
					39	(2,0)	26	(2,0)	37	(2,0)	
	0.6	0	0.6	0	91	(1,1)	53	(1,1)	74	(1,1)	
GARMA(1,2)	0.6	0	0.6	0	5	(2,2)	26	(2,2)	14	(2,2)	
	0	0	0.2	0	53	(1,2)	53	(1,2)	52	(1,2)	
					16	(2,2)	22	(2,2)	19	(2,2)	
	0	0	0.6	0	51	(1,1)	36	(1,1)	44	(1,1)	
					15	(1,2)	23	(2,2)	19	(1,2)	
GARMA(2,1)	0	0	0.2	0.2	38	(0,2)	27	(1,2)	27	(0,2)	
					29	(2,0)	20	(0,2)	23	(1,2)	
	0	0	0.2	0.6	51	(2,2)	81	(2,2)	63	(2,2)	
					40	(0,2)	11	(1,2)	24	(0,2)	
	0	0	0.6	0.2	53	(2,0)	34	(2,0)	46	(2,0)	
GARMA(2,2)	0	0	0.6	0.2	19	(0,2)	15	(0,2)	18	(0,2)	
					28	(2,2)	66	(2,2)	45	(2,2)	
	0	0	0.6	0.6	25	(0,2)	28	(0,2)	41	(1,2)	
	0.2	0.2	0.2	0	47	(1,0)	25	(2,0)	31	(2,0)	
					29	(2,0)	19	(1,2)	23	(1,0)	
GARMA(1,0)	0.2	0.2	0.6	0	67	(1,1)	36	(1,1)	47	(1,1)	
					17	(2,1)	33	(2,1)	27	(2,1)	
	0.2	0.6	0.2	0	65	(2,0)	32	(3,0)	43	(2,0)	
					18	(2,1)	31	(2,1)	28	(3,0)	
	0.6	0.2	0.2	0	95	(1,0)	59	(1,0)	81	(1,0)	
GARMA(1,2)	0.6	0.2	0.2	0	2	(1,1)	11	(3,0)/(2,2)	5	(2,0)	
	0.2	0	0.2	0.2	28	(3,0)	36	(1,2)	35	(3,0)	
					26	(1,0)	35	(3,0)	27	(1,2)	
	0.2	0	0.2	0.6	71	(1,2)	72	(2,2)	55	(2,2)	
					28	(2,2)	27	(1,2)	44	(1,2)	
GARMA(2,2)	0.2	0	0.6	0.2	68	(2,0)	31	(2,0)	54	(2,0)	
					14	(1,1)	29	(1,2)	23	(1,2)	
	0.6	0	0.2	0.2	42	(1,2)	48	(1,2)	53	(1,2)	
					22	(1,0)	28	(3,0)	25	(3,0)	
	0.2	0.2	0.2	0.2	60	(3,0)	58	(3,0)	59	(3,0)	
GARMA(2,1)	0.2	0.2	0.2	0.6	26	(1,2)	23	(1,2)	26	(1,2)	
					94	(2,2)	98	(2,2)	98	(2,2)	
	0.2	0.2	0.2	0.6	6	(1,2)	2	(1,2)	2	(1,2)	
					47	(2,0)	33	(1,2)	33	(2,0)	
	0.2	0.2	0.6	0.2	24	(1,2)	22	(2,0)	30	(1,2)	
GARMA(2,0)	0.2	0.6	0.2	0.2	69	(3,0)	55	(2,2)	56	(3,0)	
					14	(2,2)/(2,0)	39	(3,0)	35	(2,2)	
	0.6	0.2	0.2	0.2	40	(1,0)	44	(3,0)	43	(3,0)	
					32	(3,0)	38	(1,2)	37	(1,2)	
	0.2	0.2	0.6	0.6	86	(2,2)	93	(2,2)	91	(2,2)	
GARMA(0,2)	0.2	0.6	0.2	0.6	14	(1,2)	7	(1,2)	9	(1,2)	
					100	(2,2)	100	(2,2)	100	(2,2)	
	0.2	0.6	0.2	0.6	0	-	0	-	0	-	
					54	(3,0)	56	(2,2)	41	(2,2)	
	0.2	0.6	0.6	0.2	20	(2,2)	33	(3,0)	40	(3,0)	
GARMA(2,2)	0.2	0.6	0.6	0.6	94	(2,2)	94	(2,2)	94	(2,2)	
					6	(3,0)	6	(3,0)	6	(3,0)	

Tabela 4: Identificação dos dois melhores modelos para séries geradas por GARMA-NB com k=3.

GARMA-NB	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	K	%	Estrutura escolhida pelo critério BIC	%	Estrutura escolhida pelo critério AIC	%	Estrutura escolhida pelo critério Hanna
GARMA(1,0)	0.2	0	0	0	3	56	(1,0)	36	(1,0)	52	(1,0)
						41	(0,1)	30	(0,1)	38	(0,1)
	0.4	0	0	0	3	81	(1,0)	57	(1,0)	75	(1,0)
GARMA(2,0)						12	(0,1)	9	(2,0) / (0,2)	11	(0,1)
						95	(1,0)	55	(1,0)	76	(1,0)
	0.6	0	0	0	3	2	(0,2) / (2,1)	12	(2,1)	6	(0,2)
GARMA(2,0)						55	(2,0)	45	(2,0)	57	(2,0)
						25	(0,2)	21	(0,2)	24	(0,2)
	0.2	0.6	0	0	3	96	(2,0)	67	(2,0)	87	(2,0)
						3	(3,0)	15	(3,0)	7	(3,0)
	0.6	0.2	0	0	3	57	(1,0)	33	(2,0)	34	(2,0)
						25	(2,0)	24	(1,1)	30	(1,0)
GARMA(1,1)						63	(2,0)	55	(2,0)	63	(2,0)
						31	(1,1)	27	(1,1)	29	(1,1)
	0.2	0	0.2	0	3	67	(0,1)	40	(0,1)	61	(0,1)
GARMA(0,1)						26	(1,0)	17	(1,0)	23	(1,0)
	0.2	0	0.6	0	3	79	(0,1)	45	(0,1)	62	(0,1)
						9	(0,2)	13	(0,2)	12	(1,1)
	0.6	0	0.2	0	3	44	(1,0)	26	(2,1)	32	(1,0)
						24	(2,0)	24	(2,0)	21	(2,0)
GARMA(0,2)						89	(1,1)	50	(1,1)	65	(1,1)
						9	(2,0)	32	(2,2)	17	(2,2)
	0	0	0.2	0	3	71	(0,1)	42	(0,1)	58	(0,1)
GARMA(0,2)						25	(1,0)	14	(1,0)	22	(1,0)
						85	(0,1)	44	(0,1)	67	(0,1)
	0	0	0.6	0	3	7	(0,2)	16	(1,2)	12	(1,2)
						57	(0,2)	47	(0,2)	59	(0,2)
						26	(1,0)	12	(3,0) / (2,2)	11	(2,0)
GARMA(2,1)						95	(0,2)	69	(0,2)	84	(0,2)
						4	(1,2)	15	(1,2) / (2,2)	10	(1,2)
	0	0	0.6	0.2	3	34	(2,0)	37	(2,0)	45	(2,0)
						31	(0,1)	15	(1,2)	18	(0,2)
	0	0	0.6	0.6	3	93	(0,2)	63	(0,2)	79	(0,2)
GARMA(2,1)						4	(1,2)	21	(1,2)	15	(1,2)
	0.2	0.2	0.2	0	3	74	(1,0)	36	(1,0)	55	(1,0)
						10	(0,2)	18	(2,0)	14	(2,0)
	0.2	0.2	0.6	0	3	49	(1,1)	39	(1,1)	53	(1,1)
						22	(0,1)	18	(2,1)	10	(2,0)
	0.2	0.6	0.2	0	3	85	(2,0)	47	(2,0)	75	(2,0)
GARMA(1,2)						7	(3,0)	24	(3,0)	11	(3,0)
	0.6	0.2	0.2	0	3	98	(1,0)	49	(1,0)	84	(1,0)
						1	(2,0) / (1,1)	11	(3,0) / (2,1)	5	(2,0)
						55	(1,0)	43	(0,2)	45	(0,2)
						37	(0,2)	16	(3,0)	35	(1,0)
GARMA(2,2)						88	(0,2)	51	(0,2)	71	(0,2)
						8	(1,2)	27	(1,2)	20	(1,2)
	0.2	0	0.2	0.6	3	54	(2,0)	36	(2,0)	50	(2,0)
						37	(0,2)	30	(0,2)	35	(0,2)
	0.2	0	0.6	0.2	3	51	(0,1)	31	(3,0)	29	(3,0)
						18	(3,0)	20	(2,1)	22	(1,0)
GARMA(2,2)						64	(0,2)	29	(1,2)	48	(0,2)
						15	(2,0)	28	(3,0)	19	(3,0)
	0.2	0.2	0.2	0.6	3	57	(0,2)	41	(1,2)	46	(0,2)
						35	(1,2)	35	(2,2)	39	(1,2)
	0.2	0.2	0.6	0.2	3	37	(1,0)	21	(2,0)	28	(2,0)
						30	(2,0)	20	(3,0)	20	(0,2)
	0.2	0.6	0.2	0.2	3	40	(3,0)	44	(3,0)	48	(3,0)
						34	(2,0)	36	(2,2)	20	(2,0)
	0.6	0.2	0.2	0.2	3	48	(1,0)	34	(3,0)	31	(3,0)
						24	(3,0)	32	(1,2)	30	(1,2)
	0.2	0.2	0.6	0.6	3	52	(0,2)	40	(1,2)	43	(1,2)
						39	(1,2)	33	(2,2)	40	(0,2)
GARMA(2,2)						96	(2,2)	100	(2,2)	10	(2,2)
	0.2	0.6	0.2	0.6	3	2	(1,2) / (0,2)	-	-	0	(2,2)
						55	(3,0)	50	(3,0)	57	(3,0)
	0.2	0.6	0.6	0.2	3	21	(1,0)	32	(2,2)	14	(2,2) / (2,1)
GARMA(2,2)						82	(2,2)	90	(2,2)	88	(2,2)
	0.2	0.6	0.6	0.6	3	14	(3,0)	8	(3,0)	10	(3,0)

Tabela 5: Identificação dos dois melhores modelos para séries geradas por GARMA-NB com k=8.

GARMA-NB	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	K	%	Estrutura escolhida pelo critério BIC	%	Estrutura escolhida pelo critério AIC	%	Estrutura escolhida pelo critério Hanna
GARMA(1,0)	0.2	0	0	0	8	54	(1,0)	42	(1,0)	50	(1,0)
						42	(0,1)	29	(0,1)	37	(0,1)
	0.4	0	0	0	8	83	(1,0)	56	(1,0)	80	(1,0)
GARMA(2,0)	0.6	0	0	0	8	12	(0,1)	9	(2,1)	11	(0,1)
						98	(1,0)	62	(1,0)	90	(1,0)
						2	(2,1)	10	(2,1)	4	(2,1)
GARMA(1,1)	0.2	0.2	0	0	8	65	(2,0)	58	(2,0)	65	(2,0)
						20	(0,2)	17	(0,2)	19	(0,2)
	0.2	0.6	0	0	8	96	(2,0)	70	(2,0)	88	(2,0)
						2	(3,0)	10	(2,1)	5	(3,0)
	0.6	0.2	0	0	8	52	(1,0)	37	(2,0)	39	(2,0)
						23	(2,0)	27	(1,1)	22	(1,1)
GARMA(0,1)	0.6	0.6	0	0	8	53	(2,0)	47	(2,0)	52	(2,0)
						40	(1,1)	34	(1,1)	40	(1,1)
	0.2	0	0.2	0	8	59	(0,1)	41	(0,1)	53	(0,1)
						38	(1,0)	27	(1,0)	34	(1,0)
	0.2	0	0.6	0	8	79	(0,1)	38	(0,1)	64	(0,1)
GARMA(0,2)						10	(0,2)	16	(1,1)	10	(0,2)
	0.6	0	0.2	0	8	37	(2,0)	33	(2,0)	36	(2,0)
						30	(1,0)	26	(1,1)	23	(1,1)
	0.6	0	0.6	0	8	78	(1,1)	45	(1,1)	65	(1,1)
GARMA(1,2)						10	(2,2)	37	(2,2)	19	(2,2)
	0	0	0.2	0	8	64	(0,1)	37	(0,1)	55	(0,1)
						29	(1,0)	20	(1,0)	24	(1,0)
	0	0	0.6	0	8	92	(0,1)	53	(0,1)	80	(0,1)
						5	(0,2)	16	(1,2)	7	(0,2)
GARMA(2,1)	0	0	0.2	0.2	8	53	(0,2)	47	(0,2)	59	(0,2)
						34	(1,0)	16	(3,0)	17	(1,0)
	0	0	0.2	0.6	8	95	(0,2)	57	(0,2)	81	(0,2)
						4	(2,1)	22	(2,2)	10	(2,1)
	0	0	0.6	0.2	8	34	(0,1)	30	(0,2)	34	(2,0)
GARMA(2,2)						25	(0,2)/(2,0)	28	(2,0)	33	(0,2)
	0	0	0.6	0.6	8	92	(0,2)	53	(0,2)	79	(0,2)
						4	(1,2)/(3,0)	22	(2,2)	9	(1,2)
	0.2	0.2	0.2	0	8	66	(1,0)	24	(1,0)	43	(1,0)
						17	(0,2)	23	(2,0)	20	(2,0)
	0.2	0.2	0.6	0	8	55	(1,1)	44	(1,1)	62	(1,1)
GARMA(1,1)						12	(0,1)/(2,0)	18	(2,1)	13	(2,0)
	0.2	0.6	0.2	0	8	82	(2,0)	48	(2,0)	64	(2,0)
						9	(3,0)	21	(3,0)	17	(3,0)
	0.6	0.2	0.2	0	8	98	(1,0)	61	(1,0)	85	(1,0)
						1	(2,1)/(2,2)	13	(2,2)	6	(2,2)
GARMA(1,2)	0.2	0	0.2	0.2	8	56	(1,0)	49	(0,2)	52	(0,2)
						40	(0,2)	17	(3,0)	30	(1,0)
	0.2	0	0.2	0.6	8	84	(0,2)	43	(0,2)	70	(0,2)
						15	(1,2)	29	(2,2)	21	(1,2)
	0.2	0	0.6	0.2	8	55	(2,0)	39	(2,0)	49	(2,0)
GARMA(2,2)						33	(0,2)	25	(0,2)	31	(0,2)
	0.6	0	0.2	0.2	8	39	(1,0)	31	(3,0)	32	(3,0)
						23	(3,0)	29	(1,2)	27	(1,2)
	0.2	0.2	0.2	0.2	8	53	(0,2)	30	(1,2)	37	(0,2)
						23	(2,0)	24	(0,2)	20	(2,0)
	0.2	0.2	0.2	0.6	8	48	(0,2)	55	(1,2)	50	(1,2)
						47	(1,2)	29	(2,2)	33	(0,2)
	0.2	0.2	0.6	0.2	8	35	(1,0)	23	(2,1)	23	(0,2)
						26	(0,2)	22	(0,2)	22	(2,0)
	0.2	0.6	0.2	0.2	8	57	(3,0)	45	(3,0)	56	(3,0)
						22	(2,0)	35	(2,2)	15	(2,2)
	0.6	0.2	0.2	0.2	8	49	(1,0)	37	(1,2)	37	(1,2)
GARMA(2,1)						27	(3,0)	32	(3,0)	31	(3,0)
	0.2	0.2	0.6	0.6	8	56	(0,2)	37	(1,2)	40	(0,2)
						34	(1,2)	34	(2,2)	36	(1,2)
	0.2	0.6	0.2	0.6	8	98	(2,2)	99	(2,2)	99	(2,2)
						1	(1,2)/(0,2)	1	(1,2)	1	(1,2)
	0.2	0.6	0.6	0.2	8	56	(3,0)	47	(3,0)	56	(3,0)
						17	(1,0)	35	(2,2)	19	(2,2)
	0.2	0.6	0.6	0.6	8	95	(2,2)	97	(2,2)	97	(2,2)
					4	(3,0)	3	(3,0)	3	(3,0)	

Na Tabela 3, referente às séries geradas pelos modelos GARMA-Poisson, é possível observar que a estrutura geradora das séries é identificada corretamente para os casos puramente autoregressivos salvo para o caso onde o valor de  $\phi_1$  é pequeno (no caso, igual a 0.2).

Para os casos puramente médias móveis as estruturas não foram corretamente identificadas na maioria das vezes, apenas com êxito em dois casos, onde BIC e Hanna-Quinn identificaram corretamente a estrutura GARMA(0,2) para o caso  $\theta_1 = \theta_2 = 0.2$ . Mas observando a diferença entre as porcentagens obtidas pelo primeiros e segundos melhores modelos, o êxito na identificação torna-se não tão pronunciado. Para o caso misto GARMA(1,1) obteve-se êxito na identificação de todas as estruturas salvo a  $\phi_1 = \theta_1 = 0.2$ .

Apesar de não ocorrer nenhuma identificação correta para o caso GARMA(2,1), alguns critérios de decisão identificaram como segunda melhor opção, modelos com a estrutura correta. Em dois casos (estrutura  $\phi_1 = \phi_2 = 0.2$  e  $\theta_1 = 0.6$  e estrutura  $\phi_1 = 0.2$ ,  $\phi_2 = 0.6$  e  $\theta_1 = 0.2$ ) o critério AIC identificou como segundas melhores opções os modelos corretos. E pode-se observar que praticamente não há diferença entre as porcentagens da primeira melhor e segunda melhor opção escolhida. O mesmo ocorreu com o resultado encontrado pelo critério BIC, mas neste caso com uma significativa diferença entre as porcentagens.

Para estrutura GARMA(1,2) houve algumas identificações corretas. Para a estrutura geradora com  $\phi_1 = 0.6$ , e  $\theta_1 = \theta_2 = 0.2$  todos os critérios de identificação obtiveram êxito.

Ocorreram muitas identificações corretas e GARMA(2,2) e em vários casos houve uma superestimação da ordem da estrutura. Os êxitos na identificação ocorreram para diversas estruturas mas uma merece destaque, a estrutura  $\phi_1 = 0.2$ ,  $\phi_2 = 0.6$ ,  $\theta_1 = 0.2$  e  $\theta_2 = 0.6$ . Nesta ocorreu identificação correta para 100% das séries pelos três critérios.

Na Tabela 4, onde estão os resultados referentes aos modelos geradores GARMA-NB com  $k=3$ . Verifica-se que houve êxito na identificação de todas as estruturas GARMA(1,0). As estruturas GARMA(2,0) foram identificadas corretamente exceto por um caso, a saber,  $\phi_1 = 0.6$ ,  $\phi_2 = 0.2$ .

Todos os casos de estrutura puramente médias móveis foram identificados corretamente. Já nos casos referentes às estruturas GARMA(1,1) os resultados foram semelhantes aos respectivos encontrados na análise GARMA(1,1)-Poisson.

Não houve êxito na identificação das estruturas GARMA(2,1) e GARMA(1,2) mas em alguns casos a identificação ocorreu nas segundas melhores opções fornecidas pelos critérios utilizados.

Poucas identificações ocorreram para o caso GARMA(2,2). Apenas para as estruturas  $(\phi_1=0.2, \phi_2=0.6, \theta_1=0.2 \text{ e } \theta_2=0.6)$  e  $(\phi_1=0.2, \phi_2=0.6, \theta_1=0.6 \text{ e } \theta_2=0.6)$ . Vale ressaltar que, como no caso GARMA-Poisson, a estrutura  $(\phi_1=0.2, \phi_2=0.6, \theta_1=0.2 \text{ e } \theta_2=0.6)$  foi identificada corretamente 100% (mas desta vez, não pelos três critérios).

Os resultados referentes ao modelo GARMA-NB com  $k=8$  não diferem muito dos encontrados para o modelo GARMA-NB com  $k=3$ . A diferença mais marcante é o menor número de êxitos no caso da estrutura GARMA(0,2).

Uma análise preliminar foi feita para o caso GARMA-NB com  $k=20$ , mas os resultados encontrados praticamente não diferiram dos encontrados no caso dos modelos GARMA-Poisson. O que não é surpresa visto que ao se aumentar o valor do hiperparâmetro  $k$  a distribuição Binomial Negativa convirja para a distribuição Poisson.