



**Eduardo Fonseca Mendes**

**Modelando Séries Temporais Não-Lineares  
Através de uma Mistura de Modelos  
Gaussianos Estruturados em Árvore**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-  
graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de  
Engenharia Elétrica da PUC-Rio

Orientador : Prof. Álvaro de Lima Veiga Filho  
Co-Orientador: Prof. Marcelo Cunha Medeiros

Rio de Janeiro  
Agosto de 2006



**Eduardo Fonseca Mendes**

**Modelando Séries Temporais Não-Lineares  
Através de uma Mistura de Modelos  
Gaussianos Estruturados em Árvore**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Álvaro de Lima Veiga Filho**

Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica — PUC-Rio

**Prof. Marcelo Cunha Medeiros**

Co-Orientador

Departamento de Economia — PUC-Rio

**Prof. Joel Maurício Corrêa da Rosa**

UFPR

**Prof. Cristiano Fernandes**

Departamento de Engenharia Elétrica — PUC-RIO

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico —  
PUC-Rio

Rio de Janeiro, 11 de Agosto de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

## **Eduardo Fonseca Mendes**

Graduou-se em Engenharia de Computação na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, direcionando seu curso para otimização de algoritmos e inteligência artificial. Durante sua graduação aplicou as técnicas aprendidas em desenvolvimento de jogos eletrônicos e problemas de suporte à decisão. Estagiou em diversas empresas na área de desenvolvimento e participou de um projeto de iniciação científica em criação de roteiros dinâmicos. Durante o Mestrado, desenvolveu junto aos seus orientadores artigos científicos apresentados em congressos internacionais e nacionais, na França, Holanda e Brasil (Salvador e São Paulo).

### Ficha Catalográfica

Mendes, Eduardo Fonseca

Um modelo de mistura estruturada em árvore de especialistas gaussianas para séries temporais / Eduardo Fonseca Mendes ; orientador: Álvaro Veiga ; co-orientador: Marcelo Cunha Medeiros. – 2006.

51 f. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

Inclui bibliografia

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Mistura de Modelos. 3. Transição Suave. 4. Algoritmo EM. 5. Propriedades Assintóticas. 6. Séries Temporais. 7. Distribuição Condicional. I. Veiga, Álvaro. II. Medeiros, Marcelo Cunha.

CDD: 621.3

## Agradecimentos

Aos meus orientadores Dr. Álvaro Veiga e Dr. Marcelo Medeiros pelo apoio, paciência e incentivo para realização deste trabalho e para o desenvolvimento da minha carreira como pesquisador.

Aos meus pais, avó e irmãos, que conviveram com meu mau humor todas as manhãs e sem os quais não seria possível concluir o trabalho.

Aos meus amigos, principalmente Mauro Lawall, Felipe Belo e Newton Sucupira pelo incentivo e amizade.

Aos professores, funcionários e colegas do departamento de Eng. Elétrica pelo auxílio, carinho e apoio.

Ao CAPES e a PUC-Rio pelo auxílio financeiro.

## Resumo

Mendes, Eduardo Fonseca; Veiga Filho, Álvaro de Lima; Medeiros, Marcelo Cunha. **Modelando Séries Temporais Não-Lineares Através de uma Mistura de Modelos Gaussianos Estruturados em Árvore.** Rio de Janeiro, 2006. 51p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho um novo modelo de mistura de distribuições é proposto, onde a estrutura da mistura é determinada por uma árvore de decisão com transição suave. Modelos baseados em mistura de distribuições são úteis para aproximar distribuições condicionais desconhecidas de dados multivariados. A estrutura em árvore leva a um modelo que é mais simples, e em alguns casos mais interpretável, do que os propostos anteriormente na literatura. Baseando-se no algoritmo de Esperança-Maximização (EM), foi derivado um estimador de quasi-máxima verossimilhança. Além disso, suas propriedades assintóticas são derivadas sob condições de regularidades. Uma estratégia de crescimento da árvore, do específico para o geral, é também proposta para evitar possíveis problemas de identificação. Tanto a estimação quanto a estratégia de crescimento são avaliados em um experimento Monte Carlo, mostrando que a teoria ainda funciona para pequenas amostras. A habilidade de aproximação universal é ainda analisada em experimentos de simulação. Para concluir, duas aplicações com bases de dados reais são apresentadas.

## Palavras-chave

Mistura de Modelos, Transição Suave, Algoritmo EM, Propriedades Assintóticas, Séries Temporais, Distribuição Condicional.

## Abstract

Mendes, Eduardo Fonseca; Veiga Filho, Álvaro de Lima; Medeiros, Marcelo Cunha. **Modeling Nonlinear Time Series with a Tree-Structured Mixture of Gaussian Models**. Rio de Janeiro, 2006. 51p. MsC Thesis — Department of Electrical Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work a new model of mixture of distributions is proposed, where the mixing structure is determined by a smooth transition tree architecture. Models based on mixture of distributions are useful in order to approximate unknown conditional distributions of multivariate data. The tree structure yields a model that is simpler, and in some cases more interpretable, than previous proposals in the literature. Based on the Expectation-Maximization (EM) algorithm a quasi-maximum likelihood estimator is derived and its asymptotic properties are derived under mild regularity conditions. In addition, a specific-to-general model building strategy is proposed in order to avoid possible identification problems. Both the estimation procedure and the model building strategy are evaluated in a Monte Carlo experiment, which give strong support for the theory developed in small samples. The approximation capabilities of the model is also analyzed in a simulation experiment. Finally, two applications with real datasets are considered.

## Keywords

Mixture Models, Smooth Transition, EM algorithm, Asymptotic Properties, Time Series, Conditional Distribution.

# Sumário

1	Introduction	8
2	Mixture of Models: A Brief Review of the Literature	10
3	Model Presentation	12
4	Parameter Estimation	14
4.1	Asymptotic Theory	14
5	Modeling Cycle	16
6	Monte-Carlo Study	18
6.1	Parameter estimation	19
6.2	Specification Algorithm.	19
6.3	Approximation Capabilities	22
7	Examples	25
7.1	Example 1: Canadian Lynx.	25
7.2	Example 2: Brazilian Financial Dataset.	26
8	Conclusions	29
	Referências Bibliográficas	30
A	EM Algorithm	36
B	Identifiability	40
C	Stationarity and Geometric Ergodicity	43
D	Proofs of Theorems	45
D.1	Proof of Theorem 4.1	45
D.2	Proof of Theorem 4.2	46
D.3	Proof of Theorem 4.3	46
E	Lemmas	48