

## 2

### Modelagem de um Mercado de Ações

Com o objetivo de construir uma representação simplificada de um Mercado de Ações, neste capítulo será descrita a modelagem utilizada para gerar a dinâmica dos preços. Esta representação baseia-se em dois pontos principais:

1. definição das estratégias de compra e venda que vão delinear o comportamento dos agentes;
2. regra de formação de preços pelo mercado.

#### 2.1

##### Pressupostos Básicos

O modelo descreve o mercado de ações como um “mercado artificial”, citado anteriormente, isto é, um grande balcão onde vários agentes lançam ordens de compra e venda de ações. O modelo adotado nesta dissertação possui alguns pressupostos que detalharemos a seguir.

##### *Estratégias fixas de investimento*

Considera-se o mercado como um sistema onde o número  $N$  de investidores é fixo, assim como a estratégia de investimento de cada investidor ao longo do tempo. Ou seja, não são considerados agentes adaptativos, cuja estratégia de atuação modifica-se conforme a taxa de sucesso acumulada de suas negociações. Da mesma forma, agentes com baixa performance permanecem no mercado, e não são substituídos. Tais modelos de agentes adaptativos e evolucionários foram considerados na literatura recente [3, 4], tendo como foco principal a modelagem da otimização dos agentes. Por outro lado, fixando-se a microestrutura do mercado objetiva-se analisar sua influência sobre a série de preços gerada.

*Carteira de investimentos*

Em nossa modelagem, cada agente  $i$  possui uma quantidade finita de riqueza ao longo do tempo,  $w_i(t)$ , composta pela detenção de ativos de risco e livres de risco:

$$w_i(t) = C_i(t) + R_i(t) \quad (2-1)$$

onde  $C_i(t)$  representa a parcela da riqueza do agente que está aplicada em ativos livres de risco<sup>1 2</sup> no instante  $t$  e  $R_i(t)$  representa a parcela da riqueza do agente que está investida em ativos de risco<sup>3</sup>.

A negociação de um agente consiste em converter uma parcela de  $C_i(t)$  em  $R_i(t)$  e vice-versa. Considera-se como uma hipótese simplificadora, que nesse processo não existe taxa de negociação ou qualquer fluxo de capital externo. Assim, durante o processo de negociação, a riqueza do agente  $i$  permanece constante, sofrendo variação apenas quando novos valores dos ativos de risco forem determinados pelo mercado.

Outra hipótese simplificadora é de que o mercado possui somente um ativo de risco e um ativo livre de risco (dinheiro, por exemplo). Logo o valor da carteira do agente é dado por:

$$w_i(t) = C_i(t) + p(t)S_i(t) \quad (2-2)$$

onde  $S_i(t)$  é a quantidade do ativo de risco (número de ações de determinada empresa ou commodity) que o agente possui e  $p(t)$  é o preço atualizado de mercado para o ativo de risco, isto é, é o valor de uma ação do ativo medido em unidades monetárias.

*Vínculos e quantidades conservadas*

As variáveis dinâmicas  $S_i(t)$  e  $C_i(t)$  representam variáveis de estado do agente  $i$  (estado financeiro), e vão evoluir segundo o sucesso da atuação de compra e venda do agente.

Os agentes somente negociam uma parcela de sua riqueza. Quando eles compram, uma fração de  $C_i(t)$  é utilizada para comprar um certo número de ações a um preço  $p(t)$ . Na venda, eles escolhem uma fração de suas ações,  $S_i(t)$ , que será utilizada na negociação. Portanto,

<sup>1</sup>Ativos livres de risco representam ativos que não tem o seu valor fundamental alterado. Considera-se aqui os ativos estáveis, como moeda ou ouro, que sofrem variação de valor apenas em escalas temporais longas.

<sup>2</sup>Por convenção o valor desse ativo livre de risco é de 1 unidade monetária (UM)

<sup>3</sup>Os ativos de risco são ações de empresas, títulos públicos e commodities, por exemplo.

$$\begin{aligned} C_i(t) &> 0, \quad \forall t \\ S_i(t) &> 0, \quad \forall t. \end{aligned} \tag{2-3}$$

Assim, de acordo com a Eq.2-3, um agente não pode ficar “endividado” ( $C_i(t) < 0$ ) e não pode vender ações a descoberto<sup>4</sup> ( $S_i(t) < 0$ ).

Um último pressuposto é de que nesse mercado não há pagamento de dividendos pelas ações, assim como não há rendimentos de juros do capital e nem custo pela negociação (taxa de corretagem, taxa de administração, etc). Dessa forma, o número total de ações e o dinheiro total existentes no mercado são apenas redistribuídos entre os agentes através das negociações, constituindo grandezas conservadas do sistema:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N C_i(t) &= \mathcal{C} \\ \sum_{i=1}^N S_i(t) &= \mathcal{S} \end{aligned} \tag{2-4}$$

A utilização destes vínculos, apesar de não realistas, evita que o mercado se mova para um regime dominado por apenas um tipo de ativo, cuja dinâmica de preços seria alterada. Com a conservação da razão  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{S}}$ , mantém-se em equilíbrio entre os dois tipos de ativo durante as simulações, permitindo a obtenção de grande amostragem representativa do mercado.

Como consequência, nesta modelagem, a única forma de um agente enriquecer é vendendo as ações a um preço maior do que o que ele comprou, e ele somente perderá riqueza se vender ações a um preço menor do que ele pagou para ter estas ações. No entanto, o valor do preço futuro é desconhecido. Logo, cada agente, com o objetivo de aumentar sua riqueza, constrói uma expectativa para o próximo movimento do preço baseado em sua análise do mercado e emite ordem de compra ou venda.

### *Mercado centralizado*

O mecanismo de negociação que determina como a intenção de compra ou de venda dos agentes deve ser modificada para que a demanda e oferta se ajustem é essencial na determinação tanto do preço final quanto do volume da negociação.

<sup>4</sup>Negociar a descoberto é um termo cunhado no mercado e significa: vender algo que não se possui. Um indivíduo que vende a descoberto pode lucrar com as quedas dos preços, uma vez que ele “vende” a um preço e compre posteriormente a um preço menor, honrando o contrato acordado previamente. Esta é uma prática comum em contratos futuros.

O modelo assume que não existe negociação intradiária e todas as negociações são executadas simultaneamente, uma vez ao dia. Além disso, os agentes negociam através de um controlador do mercado (*market maker*) que recolhe as ordens de compra e venda e determina o preço justo do mercado. Este modelo de mercado centralizado, apesar de descrever aproximadamente alguns mercados reais, tais como o NYSE (*New York Stock Exchange*) e a BOVESPA, constitui-se de uma hipótese simplificadora e tem sido utilizado em modelos artificiais de mercado baseados em agentes [5, 6, 7].

Uma abordagem oposta a essa é a de um mercado descentralizado, onde os agentes negociam entre si diretamente. Esse mercado é completamente assíncrono, pois a cada negociação um novo preço é formado. O modelo de mercado descentralizado descreve aproximadamente os mercados mais modernos, os balcões eletrônicos, os home-brokers e também tem sido utilizado nos modelos artificiais de mercado baseados em agentes [8, 9].

Enquanto o modelo descentralizado é mais indicado para representar as negociações intradiárias de um ativo com grande liquidez (altamente negociado), o modelo centralizado simula as negociações de baixa frequência com escala de tempo a partir de um dia. Este é o regime de tempo que se pretende descrever.

## 2.2

### Fatores relevantes na atuação dos agentes

Cada agente atua de acordo com uma estratégia de investimento. Esta atuação depende de sua observação e interpretação das informações do mercado, da expectativa de mudança de preços, de sua riqueza, de sua ambição e de sua propensão à investir em um mercado de risco. Todos estes fatores, determinam se é um momento oportuno para efetuar uma transação. Portanto, as estratégias de investimento são funções de um conjunto de variáveis consideradas relevantes para o processo de tomada de decisão do agente. Em um mercado real, diversos fatores relevantes podem ser enunciados, e que serão detalhados a seguir:

1. flutuações nos preços das ações;
2. indicadores financeiros;
3. situação financeira individual;
4. fatores políticos e econômicos;
5. fatores climáticos;

6. relatórios liberados por empresas;
7. influência de outros agentes;
8. irracionalidade;

### *Flutuações nos preços das ações*

O mercado pode apresentar grande instabilidade no dia a dia, que se reflete nas flutuações relativas dos preços. Quando a amplitude destas flutuações aumenta muito, aumenta também a incerteza dos investidores sobre o comportamento futuro dos preços, afetando o valor do preço final negociado.

A volatilidade é uma grandeza do mercado utilizada para estimar o grau de incerteza dos preços. Dada uma série temporal,  $\mathbf{p}_t$ , podemos obter a série de flutuações relativas (retornos) de preços através de:

$$r(t) = \frac{\delta p(t)}{p(t)} = \frac{p(t) - p(t-1)}{p(t)} \quad (2-5)$$

A volatilidade  $\mathcal{V}_\tau(t)$  pode ser obtida através do desvio padrão da série de retornos, dentro de uma janela temporal  $\tau$ :

$$\mathcal{V}_\tau^2(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{t'=t-\tau}^t \left[ r(t') - \bar{r}(t) \right]^2 \quad (2-6)$$

com

$$\bar{r}(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{t'=t-\tau}^t r(t') \quad (2-7)$$

### *Indicadores financeiros*

Os indicadores financeiros trazem informações sobre o comportamento de diversos fatores de uma economia, como exemplo a Taxa SELIC que é a taxa básica utilizada como referência pela política monetária no Brasil. Aqui vamos nos restringir aos indicadores de Análise Técnica, que utilizam como informação a história da série temporal de preços passados na decisão de investimentos. Estes indicadores expressam uma suposta tendência do mercado para o preço do ativo no futuro, utilizando informações tais como preços de fechamento, máximo ou mínimo dentro do dia, ou ainda o volume de ações negociadas (os indicadores técnicos serão analisados com mais detalhe no Capítulo 3).

*Situação financeira individual*

As variáveis que determinam a situação financeira individual do agente, aqui representadas por  $S_i(t)$  e  $C_i(t)$ , são intrínsecas a cada agente. Na prática, a atuação dos investidores também é função do seu posicionamento anterior, cujo grau de exposição do risco, por exemplo, influencia o posicionamento seguinte, apesar de sua nova expectativa em relação aos preços.

*Fatores políticos, econômicos e climáticos*

Os grandes eventos políticos, econômicos, climáticos e outros que podem causar grande movimentação no valor dos preços são fatores esporádicos podendo ainda afetar apenas um setor econômico (excetuando-se os casos de crashes financeiros), e assim, por longos períodos de tempo o comportamento do preço de um ativo particular é determinado basicamente pelo comportamento dos agentes frente às notícias e informações cotidianas do mercado, ao menos em uma economia madura e estável.

*Informações periódicas de empresas e setores da economia*

As empresas que tem ações na bolsa liberaram periodicamente relatórios apresentando diversas informações a respeito de suas finanças, o seu plano de metas para um futuro próximo, ou o seu plano de investimento por exemplo. No entanto, esses relatórios, devido ao seu caráter completamente sazonal e setorial, não influenciam a dinâmica contínua dos preços.

Na verdade, pequenos pacotes de informação estão constantemente fluindo do mundo para o mercado, incluindo as expectativas de lucros ou prejuízos futuros dos ativos. Este fluxo de informação através do mercado é muito eficiente, e assim, muitas vezes o mercado não é afetado pelas estas notícias provenientes da análise fundamental de empresas ou do setor público, porque nestes casos a informação já estava incluída no preço, antes mesmo de se tornar pública.

*Influência de outros agentes*

Uma característica do sistema de agentes é a existência de uma rede informacional entre eles através da qual cada agente sofre influência direta da atuação de grupos de outros agentes. A estrutura desta rede de informação é particularmente importante em épocas de histeria (ou de crise financeira), onde se observa o “efeito manada” do mercado de ações, devido à emissão de ordens de compra (ou de venda) simultânea por grandes grupos de agentes, gerada

a partir da propagação da atuação “imitativa” dos investidores conectados informacionalmente.

### *Irracionalidade*

O comportamento de investidores em um mercado real muitas vezes é injustificável. Muitos não conseguem controlar a ansiedade e tomam atitudes imprevisíveis, algumas vezes contrariando seus fundamentos econômicos. A componente irracional do comportamento dos investidores, que é referente a fatores cognitivos dos seres humanos, é muito difícil de ser modelado e em geral é mais forte à medida que as informações disponíveis no mercado tornam-se mais parciais ou incompletas.

Como já foi citado no Capítulo 1, o processo de formação dos preços em um mercado de ações está vinculado à existência de investidores que concordem em negociar um determinado bem a um preço acordado por ambas as partes. Dessa forma, apesar das diferentes estratégias e da situação financeira particular de cada agente, a formação dos preços está inerentemente ligada ao comportamento coletivo do sistema formado pelos agentes.

## **2.3**

### **Agentes Especuladores do Mercado**

De acordo com os fatores predominantes que influenciam a atuação dos agentes que foram levantados na seção anterior, é possível considerar três classes distintas de agentes especuladores, a saber:

**Agentes técnicos:** utilizam os indicadores da Análise Técnica de Investimentos para antecipar as flutuações de preço a partir dos dados históricos e negociar de acordo com esta previsão. Serão analisados em detalhe no Capítulo 3.

**Agentes fundamentalistas:** utilizam a Análise Fundamentalista para investir. Estes investidores consideram que as informações do mercado chegam de diferentes fontes, em diferentes momentos, sendo interpretadas de diferentes maneiras, e dessa forma, os preços não refletem o “valor justo” do ativo. Um investidor fundamentalista avalia os fatores específicos que afetam a empresa ou commodities – política de preços, fontes de financiamento, entre outros. A combinação desses fatores é utilizada em modelos que estimam o preço alvo (preço fundamental). Os agentes fundamentalistas acreditam que no longo prazo, os preços do ativo reverterão ao preço fundamental e conseqüentemente, as decisões

de compra (ou venda) de ações dessa empresa são tomadas de acordo com a sub (ou sobre) avaliação dos preços do mercado em relação ao preço fundamental.

**Agentes indecisos (ou aleatórios):** não tem estratégia de investimentos bem definida e na maioria das vezes agem por impulso, não são racionais. Os agentes aleatórios também representam os que negociam devido à necessidades pessoais, como por exemplo, vender ações para pagamento dívidas ou para outro tipo de investimento, ou também pessoas sem experiência no mercado financeiro, que recebem dinheiro e resolvem investir. Por essas razões suas ações são completamente aleatórias. Essa classe de agentes representa a maioria dos agentes e é em grande parte responsável pela estocasticidade no movimento dos preços, sustentando a dinâmica do mercado.

## 2.4

### Modelagem Endógena

Nesta dissertação, simulamos um mercado de ações baseado na modelagem de fatores endógenos que determinam a atuação dos participantes do mercado. Fatores exógenos ao mercado, quando considerados, serão tratados como variáveis estocásticas. A modelagem utilizada tem como objetivo gerar uma série artificial de preços que contenha as principais características observadas nas séries empíricas no regime normal do mercado.

Os fatores endógenos considerados são aqueles provenientes do próprio mercado de ações, formado pelo conjunto de investidores, sua riqueza, sua exposição ao risco, as estratégias próprias de investimento, as regras de formação de preços dos ativos de risco pelo mercado, além da própria série de preços gerada pelo sistema.

Estes fatores estão continuamente presentes ao longo da vida do mercado, influenciando de forma predominante na evolução dinâmica dos preços no regime normal do mercado (exceto nas épocas de crise).

Desta forma, não estão sendo considerados no modelo eventos políticos, econômicos e climáticos extremos, pois, apesar de gerarem fortes oscilações nos preços, são eventos raros que atuam localizadamente no tempo, e portanto não contribuem para a dinâmica das flutuações contínuas dos preços que pretendemos simular.

Uma hipótese que vamos adotar é a ausência de conexão entre os agentes. Cada agente atua segundo estratégias próprias e seu posicionamento não é influenciado por nenhum outro posicionamento individual ou de grupos. Assim,

a única forma de um agente inferir sobre o posicionamento dos demais é através do movimento resultante dos preços que traduz o posicionamento médio do mercado.

Os agentes colecionam informações sobre o estado presente e passado do mercado e as processam para determinar uma atuação de investimento. O mapeamento da informação em ação é chamada de estratégia de negociação.

Modelar as estratégias envolve analisar um espaço funcional complexo pois envolvem um conjunto de fatores – expectativas, crenças, como eles “descontam” o futuro e de como agem sob incerteza.

Além disso, as limitações do tempo de análise e da capacidade computacional, levam os agentes a um comportamento parcialmente racional.

Considere a estratégia do agente  $i$ ,  $X_i(t)$ , representada pelo funcional que converte as variáveis relevantes do mercado artificial em atuação do agente:

$$X_i(t) = \mathcal{F}_i \left[ C_i(t), S_i(t), \mathbf{p}_t, \mathbf{I}_t, \eta_i(t) \right] \quad (2-8)$$

onde  $\mathbf{p}_t$  é a série de preços,  $\mathbf{I}_t$  é o conjunto de indicadores ou informações do mercado e  $\eta_i(t)$  é um sinal idiossincrático representando as incertezas do agente.

O agente utiliza a seguinte regra para negociar:

$$\begin{aligned} X_i(t) > 0 &\longrightarrow \text{COMPRA} \\ X_i(t) = 0 &\longrightarrow \text{NEUTRO} \\ X_i(t) < 0 &\longrightarrow \text{VENDA} \end{aligned} \quad (2-9)$$

Como mencionado anteriormente, a estratégia do agente é utilizada para delinear a sua atuação no mercado. Essa estratégia deve transmitir para o agente três informações fundamentais para a sua atuação: quando, como e com quanto atuar. A primeira informação, o “quando”, é o mecanismo temporizador da estratégia <sup>5</sup>,  $\tau_i(t)$ , que mostra ao agente o instante para entrar em ação. A segunda informação é o “como”,  $s_i(t)$ , que informa ao agente se comprar ou vender. O temporizador assume dois estados, negociar ou não negociar, representados aqui por 0 e 1 respectivamente. A variável  $s_i(t)$  assume +1 para compra e -1 para venda. Essas duas informações formam o mecanismo de ativação da estratégia,  $\sigma_i(t)$ .

$$\sigma_i(t) = \tau_i(t)s_i(t) \quad (2-10)$$

Esse mecanismo informa ao agente quando e como atuar, e pode assumir 3 valores: +1 (COMPRA), -1 (VENDA) e 0 (NEUTRO – fora do mercado). Os

<sup>5</sup>O *timing* do investimento.

estados emitidos pelo mecanismo de ativação são mostrados na Tabela 2.1.

$\tau_i(t)$	$s_i(t)$	$\sigma_i(t)$	Mnemônico do Sinal
0	+1	0	NEUTRO
1	+1	+1	COMPRA
0	-1	0	NEUTRO
1	-1	-1	VENDA

Tabela 2.1: Representação dos sinais emitidos pelo mecanismo de ativação,  $\sigma_i(t)$ , de uma estratégia

A terceira e última informação que compõe a estratégia, o “quanto”, informa ao agente a fração de seus ativos que deve ser negociada. Quando o mecanismo de ativação emite um sinal de COMPRA, o agente avalia sua situação financeira para decidir qual a fração do seu dinheiro atual,  $C_i(t)$ , será disponibilizada para comprar novas ações, e quando há um sinal de VENDA, qual a fração de suas ações atuais  $S_i(t)$  ele anunciará para venda.

O mecanismo quantificador,  $\Lambda_i(t)$ , deve fornecer a fração que será utilizada pelo agente em sua atuação. Portanto,  $\Lambda_i(t) \in (0, 1)$ , e é descrito por:

$$\Lambda_i^{compra}(t) = \frac{\Delta C_i(t)}{C_i(t)} \quad (2-11a)$$

$$\Lambda_i^{venda}(t) = \frac{\Delta S_i(t)}{S_i(t)} \quad (2-11b)$$

A estratégia completa do agente é:

$$X_i(t) = \sigma_i(t)\Lambda_i(t) \quad (2-12)$$

composta por um termo responsável pela ativação e outro pela quantificação da atuação. Da Eq. 2-12 tem-se que:

$$X_i(t) \in (-1, +1) \quad (2-13)$$

Todo processo de análise e inferência realizado pela estratégia do agente tem com objetivo formar uma ordem, de compra ou venda de ações, que será enviada para o mercado. Das Eqs. 2-11 e 2-12, a ordem enviada pelo agente é dada por:

$$\Delta S_i(t) = \begin{cases} \frac{X_i(t)C_i(t)}{p(t)}, & \sigma_i(t) > 0 \\ X_i(t)S_i(t), & \sigma_i(t) < 0 \\ 0, & \sigma_i(t) = 0 \end{cases} \quad (2-14)$$

## 2.5

### Mecanismo Quantificador da Estratégia

Para tomar a decisão quanto à quantidade de ações a serem negociadas, o agente é influenciado por dois fatores principais:

1. sua aversão ao risco.
2. incerteza sobre o comportamento futuro dos preços;

Assim, o mecanismo quantificador da estratégia do agente,  $\Lambda_i(t)$  nas Eqs. 2-11, deve ser modelado de forma a representar a busca pelo equilíbrio das aplicações com ou sem risco assim como o grau de incerteza desta aplicação.

#### 2.5.1

##### Aversão ao Risco

Na modelagem considerada o mercado não é neutro ao risco. A atuação dos agentes depende também do grau de exposição ao risco à que são levados devido ao posicionamento sugerido por suas expectativas de movimento dos preços. A razão,

$$\gamma_i(t) = \frac{C_i(t)}{R_i(t)}, \quad (2-15)$$

define a taxa de investimento sem risco em relação ao investimento em ativo de risco do agente  $i$ .

Cada agente possui um valor ótimo para a sua taxa,  $\gamma_i^*$ , que representa um valor de equilíbrio de exposição ao risco, característico do investidor.  $\gamma_i^*$  também pode ser visto como uma medida de aversão ao risco adotada pelo agente. Quanto maior o seu valor, maior é a aversão ao risco do agente, pois menor será a parcela ideal da riqueza do agente que deve ser investida em capital de risco.

Assim, a estratégia do agente visa a aumentar a sua riqueza, porém buscando o equilíbrio imposto por  $\gamma_i^*$ . Isto significa que o investidor permanece igualmente precavido, não importa o valor absoluto de sua riqueza.

#### 2.5.2

##### Função de Equilíbrio de Investimento em Risco

Considere inicialmente que ao desejar comprar ou vender ações, o agente resolva converter uma fração de  $C_i(t)$  em  $R_i(t)$  ou vice-versa. Considerando o preço atual da ação  $p(t)$ , sua riqueza permanece constante. Logo, no caso de compra:

$$C_i(t+1) - C_i(t) = -f_c C_i(t) \quad (2-16a)$$

$$R_i(t+1) - R_i(t) = +f_c C_i(t) \quad (2-16b)$$

onde  $f_c$  é a fração de  $C_i(t)$  que o agente converte em  $R_i(t)$ . No caso de venda temos:

$$C_i(t+1) - C_i(t) = +f_v R_i(t) \quad (2-17a)$$

$$R_i(t+1) - R_i(t) = -f_v R_i(t) \quad (2-17b)$$

onde  $f_v$  é a fração de  $R_i(t)$  que o agente disponibiliza para conversão em  $C_i(t)$ . Logo, ao negociar, a taxa de investimento  $\gamma_i(t)$  é modificada para

$$\hat{\gamma}_i(t+1) = \frac{C_i(t+1)}{R_i(t+1)} = \frac{\gamma_i(t)(1-f_c)}{1+f_c\gamma_i(t)} \quad (2-18)$$

no caso de compra, e para

$$\hat{\gamma}_i(t+1) = \frac{C_i(t+1)}{R_i(t+1)} = \frac{\gamma_i(t)+f_v}{1-f_v} \quad (2-19)$$

no caso de venda.

Esta nova taxa é provisória, pois dura até que o novo preço seja computado. Esta taxa pode ser interpretada como uma estimativa da taxa futura real,  $\gamma_i(t+1)$ , do agente. É importante notar que  $\hat{\gamma}_i(t+1) < \gamma_i(t)$  para compra e  $\hat{\gamma}_i(t+1) > \gamma_i(t)$  para venda.

Com base na estimativa  $\hat{\gamma}_i(t+1)$  e tendo como referência sua taxa de aversão ao risco  $\gamma_i^*$  o agente reavalia sua posição atenuando a ordem inicial por um fator  $\Phi(\hat{\gamma}_i(t+1), \gamma_i^*)$ , que no caso de compra é descrito por:

$$\Phi\left(\hat{\gamma}_i(t+1), \gamma_i^*\right) = 1 - \exp\left(-\frac{\hat{\gamma}_i(t+1)}{\gamma_i^*}\right) \quad (2-20)$$

O comportamento do fator  $\Phi(\hat{\gamma}_i(t+1), \gamma_i^*)$  é ilustrado pela Figura 2.1. O fator  $\Phi(\hat{\gamma}_i(t+1), \gamma_i^*)$  pode ser interpretado como um tipo de filtro que atenua a amplitude da ordem gerada inicialmente levando em conta a estimativa de  $\hat{\gamma}_i(t+1)$  em relação a sua taxa ótima,  $\gamma_i^*$ . Quanto maior for o valor da taxa de aversão ao risco,  $\gamma_i^*$ , menores serão as ordens de compra do agente, em média, pois serão atenuadas com maior intensidade.

Note que para valores muito altos de  $\hat{\gamma}_i(t+1)$  a ordem de compra é muito pouco atenuada, o que faz com que o agente acate a ordem inicial,  $f_c$ , em quase toda sua amplitude. Esse comportamento está completamente de

acordo com a “filosofia” de risco do agente. Quando a estimativa  $\hat{\gamma}_i(t+1)$  do agente está muito acima do seu valor ótimo,  $\gamma_i^*$ , isto significa que o agente estima que ficará com uma parcela da sua riqueza investida em ativos de risco abaixo do que ele acredita ser a ideal. Dessa forma, ele compra a maior quantidade possível de ações dentro da ordem inicial, para reduzir o seu capital livre de risco e aumentar o seu capital investido. Já no caso contrário, para  $\hat{\gamma}_i(t+1) \ll \gamma_i^*$ , apesar do mecanismo de ativação indicar que é um bom momento para comprar, apenas uma pequena parcela da ordem inicial será executada, pois neste caso, o agente estima que ficará com uma parcela investida em capital de risco muito acima do que o que ele considera ideal, preferindo assim manter seu equilíbrio atual de investimento. Dessa forma o agente comprará a menor quantidade possível dentro da ordem inicial.

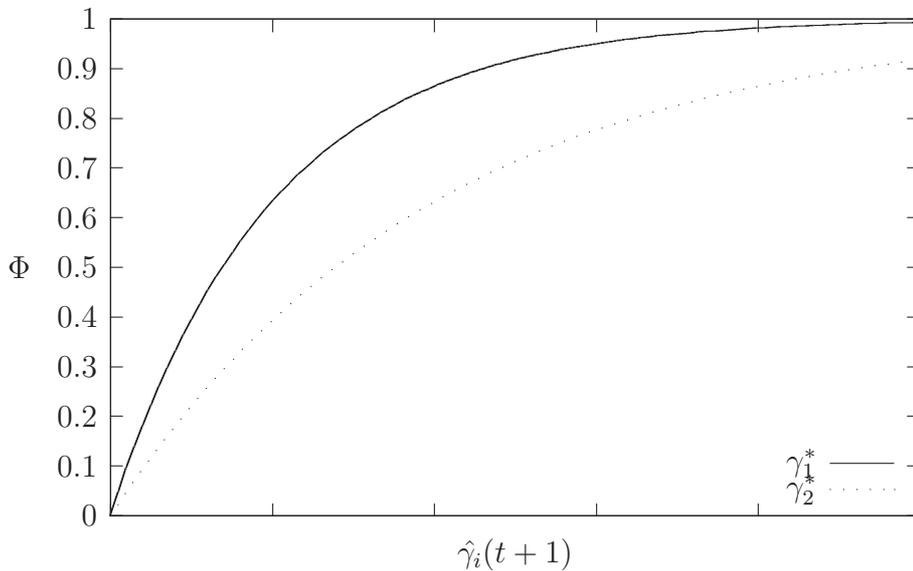


Figura 2.1: Fator de atenuação da ordem inicial,  $\Phi(\hat{\gamma}_i(t+1), \gamma_i^*)$ , para diferentes valores de  $\gamma_i^*$ , onde  $\gamma_1^* < \gamma_2^*$ .

Reescrevendo a Eq. 2-16a considerando a reavaliação da ordem inicial de compra,  $f_c$ , dada pela Eq. 2-20, tem-se:

$$\frac{\Delta C_i(t)}{C_i(t)} = -f_c \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hat{\gamma}_i(t+1)}{\gamma_i^*} \right) \right] \quad (2-21)$$

Logo, para o caso de compra, o mecanismo quantificador da estratégia do agente é descrito por:

$$\Lambda_i^{compra}(t; \gamma_i^*) = f_c \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hat{\gamma}_i(t+1)}{\gamma_i^*} \right) \right] \quad (2-22)$$

Para gerar ordens de venda de forma simétrica às ordens de compra, a

reavaliação da ordem inicial no caso de venda é feita de maneira análoga ao caso de compra, sendo que ao invés de utilizar as taxas  $\gamma_i^*$  e  $\hat{\gamma}_i(t+1)$  na função de atenuação da ordem inicial, utilizam-se os inversos dessas quantidades:

$$\gamma_i^{*'} \equiv \gamma_i^{*-1} \quad (2-23)$$

e

$$\hat{\gamma}_i'(t+1) \equiv \hat{\gamma}_i(t+1)^{-1} \quad (2-24)$$

Assim, analogamente à Eq. 2-20 o fator  $\Phi(\hat{\gamma}_i'(t+1), \gamma_i^{*'})$  é descrito por:

$$\Phi(\hat{\gamma}_i'(t+1), \gamma_i^{*'}) = 1 - \exp\left(-\frac{\hat{\gamma}_i'(t+1)}{\gamma_i^{*'}}\right) \quad (2-25)$$

Essa mudança é necessária porque uma ordem de compra contribui para aumentar o capital investido em risco de um agente, ao contrário da ordem de venda, que reduz esse capital.

É importante notar que o termo  $\gamma_i^{*'}$  representa a taxa de aceitação ao risco do agente. Portanto, enquanto o fator de atenuação  $\Phi$  atua na compra confrontando a aversão ao risco, na venda, atua confrontando a aceitação ao risco. Nesse contexto, quando o mecanismo de ativação indica que é um bom instante para vender, e sendo  $\hat{\gamma}_i'(t+1) \ll \gamma_i^{*'}$  a ordem de venda inicial,  $f_v$ , será bastante atenuada, pois o agente estima que na nova situação ele ficará com capital investido em risco abaixo do que ele considera ideal. Por outro lado, para  $\hat{\gamma}_i'(t+1) \gg \gamma_i^{*'}$ , a ordem inicial de venda é quase que completamente executada, pois, o agente acredita que na nova situação ainda terá mais capital investido em risco do que considera ideal.

Reescrevendo a Eq. 2-17b considerando a reavaliação da ordem inicial de venda  $f_v$ , dada pela Eq. 2-25, tem-se:

$$\frac{\Delta S_i(t)}{S_i(t)} = \frac{\Delta R_i(t)}{R_i(t)} = -f_v \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hat{\gamma}_i'(t+1)}{\gamma_i^{*'}}\right) \right] \quad (2-26)$$

Logo, no caso de venda, o mecanismo quantificador da estratégia do agente é descrito por:

$$\Lambda_i^{venda}(t; \gamma_i^{*'}) = f_v \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hat{\gamma}_i'(t+1)}{\gamma_i^{*'}}\right) \right] \quad (2-27)$$

A partir das Eqs. 2-22 e 2-27, obtém-se a ordem enviada pelo agente, de acordo com a Eq. 2-14.

### 2.5.3

#### Incerteza no investimento

Vamos agora identificar as fontes de incerteza de  $\Lambda_i(t)$ .

No mercado real, as flutuações de preços são geradas pelas expectativas de lucro ou de prejuízos futuros. Estas expectativas são formadas levando-se em conta, além da análise da série histórica dos preços, conforme apresentado na Seção 2.4, as notícias que são difundidas pelo mercado a respeito de uma empresa ou commodity. Os investidores recebem continuamente pequenas parcelas de informação devido às diferentes forças econômicas e políticas. Sua atitude frente à estas informações depende de sua psicologia, de como cada investidor as processa e as interpreta. No entanto, em geral as informações liberadas são imperfeitas ou incompletas, produzindo erros na expectativa formada.

Assim, tem-se incertezas quanto ao preço justo do ativo, pois não existe consenso de julgamento entre os participantes do mercado. Neste caso, o posicionamento do agente adquire também um caráter irracional e imprevisível.

Isto sugere modelar o impacto das informações externas sobre a confiança no ativo, e por consequência, sobre a atuação dos agentes, por um processo estocástico perturbativo da quantidade de ações a serem negociadas, de acordo com o posicionamento sugerido pelas estratégias de investimento.

As ordens de compra e venda dos agentes são então governadas pela presença de ruído não correlacionado e não tendencioso, que determina a escala típica das incertezas do mecanismo quantificador das estratégias. A escala destas flutuações é difícil de ser determinada e por isso será atribuído um valor arbitrário.

A taxa média de ocorrência de novas informações no mercado tem escala temporal  $\tau$  que varia desde o intervalo da ordem de 1 hora ( $\tau = 1/6.5$ , considerando que 1 dia de pregão corresponde a 6.5 horas) até 1 semana ( $\tau = 5$  dias). Levando-se em conta que os grandes veículos de informação possuem periodicidade diária, podemos considerar que a maioria dos investidores recebe nova informação a cada  $\tau = 1$  dia. Portanto, em nossa modelagem, a cada instante, uma nova variável estocástica é gerada para cada agente, para representar o impacto de nova informação sobre sua atuação. Especificamente, as frações  $f_c$  e  $f_v$ , nas Eqs. 2-22 e 2-27, são modeladas por variáveis aleatórias definidas em  $(0, 1)$ .

## 2.6

## Limpeza do Mercado – Market Clearing

Uma vez que os agentes definiram suas ordens iniciais de negociação, vamos obter como o novo preço de mercado é determinado. Como mencionado na Seção 2.1, o modelo de mercado adotado é centralizado, no sentido de que todas as transações são processadas através de um *market maker* (controlador de mercado).

No mercado real, o objetivo do *market maker* é prover liquidez ao mercado, fazendo a contraparte nas ofertas de compra e venda. Seu papel é negociar um preço tal que todos os compradores e vendedores sejam atendidos e nenhuma ordem fique sobrando. Uma forma de obter este equilíbrio é fazendo um leilão do preço do ativo, isto é, variando o preço até que as ordens de compra se igualem às ordens de venda (por exemplo, se as ordens de compra dominam, o preço é elevado para encorajar os vendedores e vice-versa).

Assim, são os detalhes do processo de ajuste das ordens de compra e venda que determinam tanto o preço quanto o volume negociado. No mercado artificial, a simulação da atuação do *market maker* é feita de forma simplificada.

Considere a cada instante diversos agentes emitindo ordens de compra e venda ao mercado baseando-se em suas estratégias. O somatório de todas as ordens de compra representa a quantidade total de ações que os agentes desejam comprar no instante  $t$ , ou seja, é a quantidade demandada de ações em  $t$ . Assim define-se a demanda do mercado em  $t$ , por:

$$D(t) = \sum_{i:\Delta S_i(t)>0} \Delta S_i(t) \quad (2-28)$$

Analogamente, a soma de todas as ordens de venda é a quantidade total de ações ofertadas, definindo a oferta do mercado em  $t$  por:

$$O(t) = \sum_{i:\Delta S_i(t)<0} \Delta S_i(t). \quad (2-29)$$

Quando  $D(t) > O(t)$  tem-se mais agentes demandando ações do que agentes ofertando, logo, esse excesso de demanda será frustrado, isto é, os agentes que enviaram ordens de compra vão comprar menos do que inicialmente pretendiam. Essa demanda inicial será reduzida para se ajustar à oferta, multiplicando-se as ordens de compra de cada agente pela fração  $\frac{O(t)}{D(t)}$ , ou seja, a quantidade negociada efetivamente por esses agentes passa a ser:

$$\overline{\Delta S_i(t)} \Big|_{i:\Delta S_i(t)>0} = \frac{O(t)}{D(t)} \Delta S_i(t) \Big|_{i:\Delta S_i(t)>0}. \quad (2-30)$$

Assim, a demanda efetiva é igual à oferta:

$$\begin{aligned} \sum_{i:\Delta S_i(t)>0} \overline{\Delta S_i(t)} &= \frac{O(t)}{D(t)} \sum_{i:\Delta S_i(t)>0} \Delta S_i(t) \\ &= O(t) \end{aligned} \quad (2-31)$$

Logo, para  $D(t) > O(t)$ , os agentes que enviaram ordens de venda tem seu posicionamento inalterado e somente as ordens originais de compra serão reposicionadas.

Analogamente, quando  $O(t) > D(t)$  o excesso de oferta será frustrado, sendo necessário, para obter a quantidade efetivamente negociada pelos agentes, multiplicar as ordens de venda pela razão inversa  $\frac{D(t)}{O(t)}$ .

$$\overline{\Delta S_i(t)} \Big|_{i:\Delta S_i(t)<0} = \frac{D(t)}{O(t)} \Delta S_i(t) \Big|_{i:\Delta S_i(t)<0} \quad (2-32)$$

Assim, a oferta efetiva iguala-se à demanda:

$$\begin{aligned} \sum_{i:\Delta S_i(t)<0} \overline{\Delta S_i(t)} &= \frac{D(t)}{O(t)} \sum_{i:\Delta S_i(t)<0} \Delta S_i(t) \\ &= D(t) \end{aligned} \quad (2-33)$$

Logo, para  $O(t) > D(t)$  somente as ordens originais de venda serão frustradas e reposicionadas. A Tabela 2.2 mostra as ações efetivas,  $\overline{\Delta S_i(t)}$ , dos agentes.

	Ordem	$\Delta S_i(t)$	$\overline{\Delta S_i(t)}$
$D(t) > O(t)$	VENDA	$< 0$	$\Delta S_i(t)$
	COMPRA	$> 0$	$\frac{O(t)}{D(t)} \Delta S_i(t)$
$D(t) < O(t)$	COMPRA	$> 0$	$\Delta S_i(t)$
	VENDA	$< 0$	$\frac{D(t)}{O(t)} \Delta S_i(t)$

Tabela 2.2: Ordens efetivas dos agentes após a limpeza do mercado.

Em Economia esse conceito chama-se Limpeza do Mercado (*Market Clearing*). É uma hipótese simplificadora de que o mercado sempre converge para um equilíbrio no qual as quantidades demandadas são iguais às quantidades ofertadas.

## 2.7

### Atualização do estado financeiro dos Agentes

Definidas as quantidades de demanda e oferta, e realizada a limpeza do mercado os agentes estão prontos para efetuar as negociações e atualizar seu capital investido nos dois tipos de ativos, que se dá pelas seguintes regras:

$$\begin{aligned} S_i(t+1) &= S_i(t) + \overline{\Delta S_i(t)} \\ C_i(t+1) &= C_i(t) - p(t)\overline{\Delta S_i(t)} \end{aligned} \quad (2-34)$$

Como  $\overline{\Delta S_i(t)}$  pode ser positivo ou negativo a regra atende a ambos os casos, tanto de compra quanto de venda.

## 2.8

### Regra de formação de preços

A regra de formação de preços é utilizada para encontrar o preço do instante  $t+1$ , após a rodada de negociação. Essa regra deve atender a alguns requisitos:

1. Deve existir uma situação em que o comportamento dos agentes encontra o equilíbrio. Este equilíbrio ocorre quando a oferta for igual a demanda, sem a necessidade de se efetuar a limpeza do mercado. Quando esse cenário se apresentar,  $p(t+1)$  será igual a  $p(t)$ .
2. Presença de propriedades de demanda e oferta: a demanda impulsiona o preço para cima e a oferta impulsiona o preço para baixo.

Atendendo aos requisitos apresentados, o novo preço,  $p(t+1)$ , será determinado pela seguinte equação:

$$p(t+1) = p(t) \left[ 1 + \zeta \left( \frac{D(t) - O(t)}{V(t)} \right) \right] \quad (2-35)$$

que pode ser reescrita, usando a Eq. 2-5 como:

$$r(t) = \frac{p(t+1) - p(t)}{p(t)} = \zeta \left( \frac{D(t) - O(t)}{V(t)} \right) \quad (2-36)$$

Nas Eqs.2-35 e 2-36,  $\zeta$  é uma parâmetro de escala que determina a variação na resposta dos preços, de acordo com o excesso de demanda ou de oferta. Este parâmetro pode ser interpretado como a liquidez do ativo, onde o ativo mais líquido é aquele cuja variação de preço, causada pelo mesmo desbalanceamento entre oferta e demanda, é maior. O termo  $V(t)$  é o volume de ações negociadas, isto é, é a quantidade efetiva de ações envolvidas nas transações de compra e venda. De acordo com a limpeza do mercado descrita na Seção 2.6 esta quantidade pode ser definida por:

$$V(t) = \min(D(t), O(t)) \quad (2-37)$$

pois, a Tabela 2.2 mostra que o excesso de demanda ou de oferta, é ajustado ao menor valor dentre estas duas quantidades.

É ainda importante observar que a razão entre o excesso de demanda e o volume negociado representa uma grandeza intensiva do sistema, e portanto não depende do tamanho do mercado, isto é, a regra de formação de preços é independente do número de agentes do mercado.

O parâmetro de escala  $\zeta$  permite modelar a dinâmica de preços em diferentes regimes de volatilidade do mercado. Em períodos de grande volatilidade, os negociadores estão mais nervosos e a incerteza quanto ao preço justo do ativo é maior. Assim, os preços de negociação aceitos pelo mercado podem variar mais. Este efeito de *feedback* da volatilidade é considerado de forma efetiva inserindo uma flutuação no parâmetro de escala  $\zeta$  da forma:

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \kappa \mathcal{V}_\tau(t) \quad (2-38)$$

onde  $\zeta_0$  é um parâmetro típico do mercado e  $\kappa$  é uma constante, a qual é atribuído valor 0 ou 1 para representar a ausência ou presença deste efeito no modelo.

## 2.9

### Tipos de agentes no mercado artificial

De acordo com a Seção 2.3, os negociadores do mercado podem ser classificados em 3 tipos, dependendo de seu comportamento na negociação: agentes técnicos, fundamentalistas ou aleatórios.

Os agentes fundamentalistas, que estabelecem um valor de referência do preço para negociar, podem ser considerados como investidores de longo prazo. Como não seguem o comportamento especulativo de curto prazo, não serão considerados na construção do mercado artificial. Já os agentes técnicos, que se baseiam na série passada dos preços para antecipar o valor esperado da ação, serão considerados no modelo, porém, apenas aqueles que atuam com um horizonte temporal curto.

No entanto, estes dois tipos de agentes não são exclusivos, e de fato, nas estratégias descritas pela Eq. 2-8 os agentes avaliam sua ação baseados tanto em fundamentos (informações novas) quanto na história dos preços (informações passadas).

Uma vez que as informações do mercado são em geral incompletas, e os agentes são heterogêneos, não é possível antecipar o comportamento do outros agentes e formular uma expectativa totalmente racional do preço futuro. Por isso, estes agentes são classificados como “parcialmente racionais”.

Consideramos também, a presença de agentes aleatórios, os quais, devido à ausência de estratégia racional de atuação de compra e venda, tem

posicionamento dominado por comportamento irracional e imprevisível.

Tendo considerado apenas duas classes de agentes, os aleatórios e os parcialmente racionais, outro parâmetro do modelo é a fração  $\phi$  desses últimos no mercado artificial. Como os agentes não mudam de classe essa fração é constante no tempo.

## 2.10

### Resumo da modelagem

O modelo consiste de um número fixo de agentes heterogêneos com estratégias fixas de investimento, que negociam diariamente (e simultaneamente) com um único *market maker*, cujo objetivo é “limpar” o mercado, estabelecendo um preço atualizado para o ativo.

Cada agente possui uma carteira com um ativo de risco e um ativo sem risco e procura maximizar sua riqueza através de negociações baseadas na previsão do movimento futuro dos preços.

Foi apresentado nesse capítulo um modelo parcimonioso para descrever o comportamento endógeno dos agentes em um mercado de ações. Este mercado artificial apresenta diversas características que estão em acordo com o comportamento de investidores em um mercado real. Dentre estas características podemos enumerar:

1. os agentes tem capital finito;
2. os agentes tem aversão ao risco, modelada pelo parâmetro  $\gamma_i^*$ ;
3. os agentes apresentam comportamento irracional e incerteza ao negociar, modelado pelo comportamento aleatório de  $f_c$  e  $f_v$ ;
4. a variação do preço obedece a regras de demanda e oferta;

Como será visto no Capítulo 3 outra característica importante são as estratégias realistas utilizadas pelos agentes para determinar seu posicionamento no mercado.

A Tabela 2.3 mostra todas as variáveis usadas no modelo. Os parâmetros são as variáveis de entrada da simulação e as variáveis de estado caracterizam o estado do sistema de agentes em cada instante.

É importante observar que através da diversidade de  $\gamma_i^*$ ,  $f_c$ ,  $f_v$  e das estratégias técnicas utilizadas é possível garantir que as decisões tomadas pelos agentes, assim como as ordens de negociação enviadas ao mercado, sejam bastante heterogêneas. Dessa maneira, o mercado não irá evoluir para uma situação estacionária onde os agentes tomam sempre a mesma decisão, gerando por sua vez, uma dinâmica complexa de flutuações nos preços.

Símbolo	Significado
Parâmetros e variáveis do Mercado	
$N$	número total de Agentes
$p(t)$	preço do ativo no instante $t$
$V(t)$	volume negociado (número de ações negociadas) no instante $t$
$\mathcal{C}$	quantidade total de ativo livre de risco
$\mathcal{S}$	quantidade total de ativo de risco
$\mathcal{V}_\tau(t)$	volatilidade dos preços na janela temporal $\tau$
$\phi$	fração de agentes técnicos do mercado
$\zeta(t)$	liquidez do ativo
Parâmetros e variáveis do agente	
$w_i(t)$	riqueza total do agente
$C_i(t)$	riqueza aplicada em ativo livre de risco
$R_i(t)$	riqueza aplicada em ativo de risco
$S_i(t)$	quantidade de ações que o agente possui
$\gamma_i^*$	taxa ótima de aversão ao risco
$f_c$ e $f_v$	ordens iniciais de compra e venda, respectivamente

Tabela 2.3: Tabela de parâmetros e variáveis de estado do modelo.