

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] CARDONA, OMAR DARIO. Notas do Curso: **Gestión del Riesgo Colectivo**. Structuralia Consultores, Madrid, España. Setembro, 2005.
- [2] KEIPI, K.; TYSON, J. **Sobreviviendo los desastres**: planificación y protección financiera. Diálogo regional de política, Banco Interamericano de Desarrollo. Washington, DF. 2002.
- [3] CAMPOS, JOÃO LUIZ E., et al. **Implementação numérica para simulação processos de produção de areia utilizando elementos discretos em condições de fluxo bifásico**. Brasil, 2002. 12 p.
- [4] FIGUEIREDO, RODRIGO P. **Aplicação da técnica de relaxação dinâmica à solução de problemas geotécnicos**. 1991. 187 f. Dissertação de Mestrado-Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, setembro de 1991.
- [5] MACIAS, JULIO E. **Implementações computacionais para o estudo da estabilidade de maciços rochosos fraturados**. 1995. 82 f. Dissertação de Mestrado-Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, setembro de 1997.
- [6] RODRIGUES, MÁRCIO. **Procedimentos computacionais para reconstituição de seções geológicas**. 2002. 131 f. Tese de doutorado-Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, abril de 2002.
- [7] LORENZINI, G; MAZZA, N. **Debris Flow**: phenomenology and rheological modeling. Reino Unido: WIT press, 2004. 202 p., il., 16 cm x 25 cm.
- [8] DASGUPTA, PRABIR. Sediment gravity flow- the conceptual problems. **Earth Science Review**. Vol 62, p. 265-281. 2003.
- [9] YI WU, CHENG. **Numerical Modelling on the motion and deposition behaviors of debris flow**. 2003. 168 f. Em inglês. Dissertação de Mestrado-Escola de Engenharia Civil, NCKU, Tainan, Taiwan, junho de 2003.
- [10] CALVETTI, FRANCESCO; et al. **Granular flows and numerical modeling of landslides**. DAMOCLES: Itália, agosto de 2001.
- [11] COUSSOT, P.; MEUNIER, M. Recognition, classification and mechanical description of debris flows. **Earth-Science Reviews**. Vol. 40, p. 209-227. 1996.

- [12] TAKAHASHI, TAMOTSO. **Debris flow**. Holanda: Internacional Association for Hydraulics Research, 1991. 165 p., il., 17 cm x 25 cm. (Monograph Series).
- [13] MALET, J. P.; et al. Triggering conditions and mobility of debris flows associated to complex earthflows. **Geomorphology** (Em impressão). 21 p. 2005.
- [14] IVERSON, RICHARD M. The Physics of debris flow. **Reviews of Geophysics**. Vol. 35, n° 3, p. 245-296. 1997.
- [15] IVERSON, RICHARD M.; REID, MARK E.; LAHUSEN, RICHARD G. Debris flow mobilization from landslides. **Earth-Science Review**. Vol. 25, p. 85-138. 1997.
- [16] IVERSON, RICHARD M.; DENLINGER, ROGER P. Mechanics of debris flows and debris-laden flash floods. In: **7ª Federal Interagency Sedimentation Conference**. Reno, Nevada. Março 2001.
- [17] IVERSON, RICHARD M.; VALLANCE, JAMES W. New views of granular mass flow. **Geology**. Vol. 29 n° 2, p. 115-118. 2001.
- [18] BERTI, MATTEO; et al. Field observations of a debris flow event in the Dolomites. **Geomorphology**. Vol. 29, p. 265-274. 1999.
- [19] ANCEY, CHRISTOPHE. **Debris flows and related phenomena**. CEMAGREF, CEDEX, França. 2000.
- [20] CAMPBELL, CHARLES S.; CLEARY, PAUL W.; HOPKINS, MARK. Large-scale landslide simulations: global deformation, velocities and basal friction. **Journal of Geophysical Research**. Vol. 100, n° B5, p. 8267-8283. 1995.
- [21] KANJI, MILTON A.; MASSAD, F.; CRUZ, P. T. Debris flow in areas of residual soils: occurrence and characteristics. [s.n.]. 2002.
- [22] HUNT, M. L.; et al. Revisiting the 1954 suspension experiments of R. A. Bagnold. **Journal of Fluid Mechanic**. Vol. 452, p. 1-24. 2002.
- [23] CHEN, H.; LEE, C.F. Geohazards of slope mass movement and its prevention in Hong Kong. **Engineering Geology**. Vol. 76, p. 3-25. 2004.
- [24] MÜLLER, DIDIER. **Techniques informatiques efficaces pour la simulation de milieux granulaires par des méthodes d'éléments distincts**. 1996. 181 f. Tese de doutorado-Departamento de Matemática, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suíça, julho de 1996. Em francês.
- [25] HUBL, JOHANNES; KIENHLZ, HANS; LOIPERSBERGER, ANTON. **DOMODIS : Documentation of Mountain Disasters**. Comunidade Européia: INTERPRAEVENT, 2002. 54 f., il.

- [26] FIORILLO, FRANCESCO; WILSON, RAYMOND. Rainfall induced debris flows in pyroclastic deposits, Campania (southern Italy). **Engineering Geology**. Vol. 75, p. 263-289. 2004.
- [27] IVERSON, RICHARD M. Landslide triggering by rain infiltration. **Water Resources Research**. Vol. 36, n° 7, p. 1897-1910. 2000.
- [28] JULIEN, PIERRE Y. **River Mechanics**. Reino Unido: Cambridge University Press: 2002. p. 13-30, il., 15 cm x 23 cm.
- [29] IDELSON, SERGIO R.; STORTI, MARIO A.; OÑATE, EUGENIO. Lagrangian formulations to solve free surface incompressible inviscid fluid flows. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** Vol 191, p. 583-593. 2001.
- [30] IVERSON, RICHARD M.; DENLINGER, ROGER P. Flow of variably fluidized granular masses across three-dimensional terrain. 1- Coulomb mixture theory. **Journal of Geophysical Research**. Vol. 106, n° B1, p. 537-552. 2001.
- [31] IVERSON, RICHARD M.; DENLINGER, ROGER P. Flow of variably fluidized granular masses across three-dimensional terrain. 2- Numerical predictions and experimental test. **Journal of Geophysical Research**. Vol. 106, n° B1, p. 553-566. 2001.
- [32] JANKOWSKI, JACEK A. **A non-hydrostatic model for free surface flows**. 1998. 237 f. Tese de doutorado-Institut für Strömungsmechanik und Elektron, Rechnen im Bauwesen der Universität Hannover, Alemanha, novembro de 1998.
- [33] WIELAND, M.; GRAY, J. M. N. T.; HUTTER, K. Gravity-driven free surface flow of granular avalanches over complex basal topography. **The Royal Society**. Vol. 455, p. 1841-1874. 1999.
- [34] WANG, ZHILIANZ; SHEN, HUNG TAO. Lagrangian simulation of one-dimensional dam-break flow. **Journal of Hydraulic Engineering**. Vol. 125, n° 11, p. 1221-1217. 1999.
- [35] HUNGR, OLDRICH. A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows and avalanches. **Canadian Geotechnical Journal**. Vol. 32, p. 610-623. 1995.
- [36] HUNGR, OLDRICH; MCDOUGALL, S.D. Objectives for the development of an integrated three-dimensional continuum model for the analysis of landslide runout.. 2003. Comunicação pessoal do primeiro autor.

- [37] HUNGR, OLDRICH; MCDOUGALL, S.D. A model for the analysis of rapid landslide motion across three-dimensional terrain. 2004. Comunicação pessoal do primeiro autor.
- [38] CHEN, H.; LEE C.F. Numerical Simulation of debris flow. **Canadian Geotechnical Journal**. Vol. 37, n° 1, p. 146-160. 2000.
- [39] CUNDALL, Peter A.; HART, ROGER D. Numerical modeling of discontinua. **Engineering Computations**. Vol 9, p. 101-113. 1992.
- [40] IOVINE, G.; D'AMBROSIO, D.; DI GREGORIO, S. Applying genetic algorithms for calibrating a hexagonal cellular automata model for the simulation of debris flows characterised by strong inertial effects. **Geomorphology** (Em impressão). 17 p. 2005.
- [41] CUNDALL, Peter A.; STRACK, O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies. **Géotechnique**. Vol 29, n° 1, p. 47-65. 1979.
- [42] JOHANSEN, STEIN TORE; LAUX HARALD. **Simulations of granular materials flow**. Noruega: SINTEF Materials Technology, 1998. 10 p.
- [43] GETHIN, D. T.; et al. Numerical comparison of a deformable discrete element model and an equivalent continuum analysis for the compaction of ductile porous material. **Computers and Structures**. Vol. 79, p. 1287-1294. 2001.
- [44] CUNDALL, Peter A. Formulation of a three-dimensional distinct element model —Part I. A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. **Int. J. Rock Mech., Min. Sci. & Geomech. Abstr.** Vol 25, n° 3, p. 107-116. 1988.
- [45] CUNDALL, Peter A.; HART, ROGER D.; LEMOS, J. Formulation of a three-dimensional distinct element model —Part II. Mechanical calculations for motion and interaction of a system composed of many polyhedral blocks. **Int. J. Rock Mech., Min. Sci. & Geomech. Abstr.** Vol 25, n° 3, p. 117-125. 1988.
- [46] BARDET, J. P.; PROUBET, J. Adaptive dynamic relaxation for statics of granular materials. **Computers and Structures**. Vol 39, n° 3/4, p. 221-229. 1991.
- [47] VU-QUOC, L.; LESBURG, L.; ZHANG, X. An accurate tangential force-displacement model for granular-flow simulations : Contacting spheres with plastic deformation, force-driven formulation. **Journal of Computational Physics**. Vol. 196, p. 298-326. 2004.

- [48] DI RENZO, ALBERTO; DI MAIO, FRANCESCO PAOLO. Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in DEM-based granular flow codes. **Chemical Engineering Science**. Vol 59, p. 525-541. 2004.
- [49] CHOWDHURY, INDRAJIT; et al. **Computation of Rayleigh Damping Coefficients for large systems**. Kharagpur, Índia: Indian Institute of Technology. 2000.
- [50] OÑATE, E.; ROJEK, J. Combination of discrete element and finite element methods for dynamic analysis of geomechanics problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. Vol 193, p. 3087-3128. 2004.
- [51] ITASCA CONSULTING GROUP, Inc. **PFC2D: Theory and Background**. 2ª ed., Minneapolis, Minnesota: Itasca Consulting Group, Inc. 2002, il.
- [52] DEITEL, H. M.; DEITEL, P. J. **C++: Como Programar**. Tradução de Sergio Luis Ma. Ruiz F. em espanhol, 2. ed. Juarez, México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., 1999. 1130 p. Título original: C++: How to program.
- [53] BUSTAMANTE, PAUL; et al. **Aprenda C++ como si estuviera en primero**. Navarra, España: Ingeniarien Goi Malaiko Eskola, Nafarroako Unibertsitateko Campus Teknologikoa, 2004. 72 p.
- [54] RESTREPO, JUAN. **Cubic Splines**. 2003. Disponível em: <<http://www.mathworld.com/trigonometricinterpolation/splineinterpolation.html>> Acesso em abril 2004.
- [55] SCHNEIDER, PHILIP J.; EBERLY, DAVID H. **Geometrics tools for computer graphics**. São Francisco, Estados Unidos: Elsevier Science, 2003. 1007 p., il. 19 cm x 23 cm.
- [56] FERREZ, JEAN-AL BERT. **Dynamic Triangulations for efficient 3D simulation of granular materials**. 2003. 181 f. Tese de doutorado-Departamento de Matemática, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suíça, 2001. Em inglês.
- [57] MUNJIZA, ANTONIO. **The combined finite- discrete element method**. Reino Unido: WILEY, 2004. 333 p., il., 17 cm x 25 cm.
- [58] NEZAMI, ERFAN G.; HASHASH, YOUSSEF M.A.; JAMSHID GHABOUSSI, DAWEI ZHAO. A fast detection algorithm for 3-D discrete element method. **Computers and Geotechnics**. Vol 31, p. 575-587. 2004.
- [59] SCHALLER, GERNOT; MEYER-HERMANN, MICHAEL. Kinetic and Dynamic Delauny tetrahedralizations in three dimensions. **Elsevier Science**. 2005.

- [60] VU-QUOC, L.; ZHANG, X.; WALTON, O. R. A 3D discrete-element method for dry granular flows of ellipsoidal particles. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. Vol 187, p. 483-528. 2000.
- [61] LANGSTON, PAUL A.; et al. Distinct element modelling of non-spherical frictionless particle flow. **Chemical Engineering Science**. Vol. 59, p. 425-435. 2004.

---

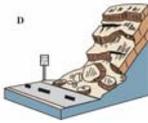
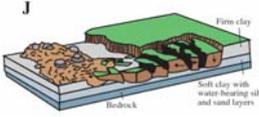
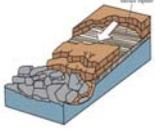
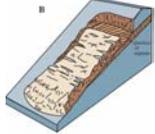
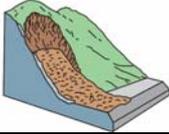
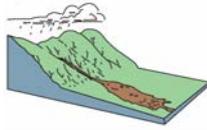
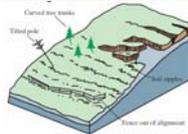
---

# ANEXOS

---

---

### ANEXO I: Classificação de Varnes para movimentos de massa (1978)

TIPO DE MOVIMENTO		TIPO DE MATERIAL		
		Maciços Rochosos	Material altamente intemperizado	
			Detritos	Solo
QUEDAS			Queda de detritos	Queda de solo
TOMBAMENTOS				
DESLOCAMENTOS LATERAIS				
DESGLIZAMENTOS	Rotacional*			
	Translacional			
FLUXOS	Avalanches	Avalanche de Rochas		
	Rápidos	Fluxo de rochas		
	Lentos			
		Rastejo profundo	Rastejo Superficial	
COMPLEXOS		Combinação de dois ou mais dos movimentos anteriores.		

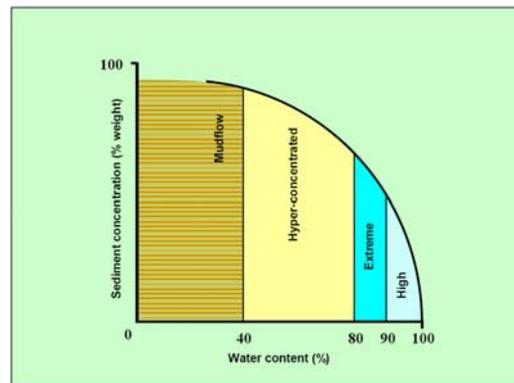
\* No caso de rochas, este tipo de movimento se apresenta devido ao intenso fraturamento do maciço pelo qual pode se comportar como solo para efeitos de desenvolvimento de uma superfície curva de ruptura.

## ANEXO II: Diagramas de algumas classificações dos fluxos de detritos

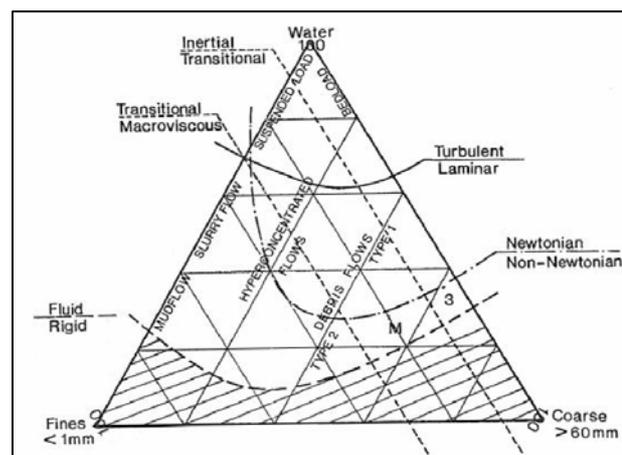
### A. Classificação de Lowe (1979) <sup>[10]</sup>

FLOW BEHAVIOUR	FLOW TYPE		SEDIMENT SUPPORT MECHANISM
FLUID	FLUIDAL FLOW	TURBIDITY CURRENT	FLUID TURBULENCE
		FLUIDIZED FLOW	ESCAPING PORE FLUID (FULL SUPPORT)
		LIQUEFIED FLOW	ESCAPING PORE FLUID (PARTIAL SUPPORT)
PLASTIC (BINGHAM)	DEBRIS FLOW	GRAIN FLOW	DISPERSIVE PRESSURE
		COHESIVE DEBRIS FLOW	MATRIX STRENGTH MATRIX DENSITY

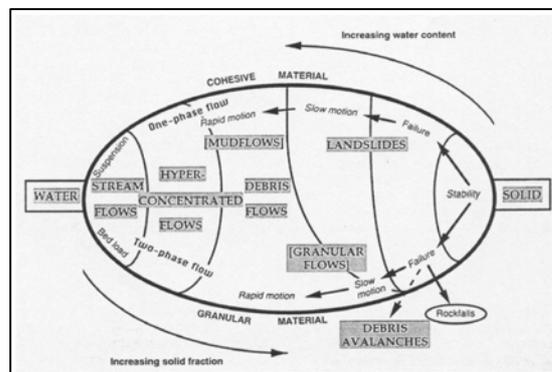
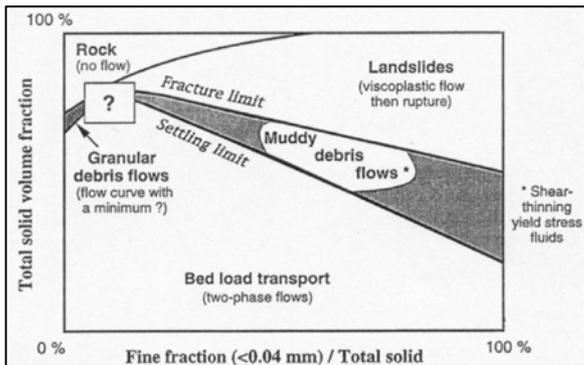
### B. Classificação de Beverage e Culbertson (1979) <sup>[10]</sup>



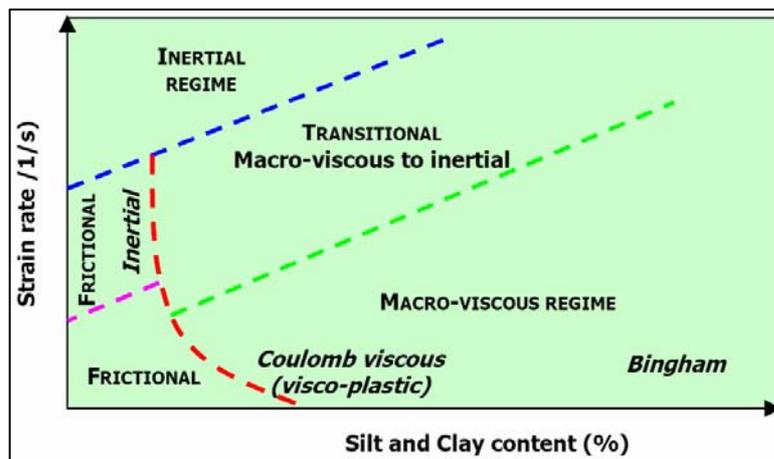
### C. Classificação de Davies (1988) <sup>[9]</sup>



D. Classificação de Coussot (1996) [11].



E. Classificação reológica proposta por Iverson (2001) [10].



**ANEXO III: Descrição dos modelos reológicos mais usados na modelagem do movimento das corridas de massa [7], [9], [12].**

Modelo	Friccionário (Mohr-Coulomb)
Equação Reológica	$\tau_y = c + \sigma \tan(\phi)$
Tensões dominantes	Atrito entre partículas, pois estas viajam muito juntas uma das outras.
Conveniência	Regime plástico, quase-estático sob baixos gradientes de velocidades (baixa deformação). $0.51 \leq C_V \leq 0.56$
Característica da velocidade	- $\tau$ é independente da velocidade. - Efeitos desprezíveis dos esforços dinâmicos e do fluido intersticial.
-Não é adequado para fluxos de detrito.	

Modelo	Colisionar (Bagnold)
Equação Reológica	$\tau = \alpha \left( \frac{du}{dy} \right)^2$
Tensões dominantes	Colisões entre partículas e forças dispersivas
Conveniência	Regime inercial (totalmente dinâmico), fluxo granular a altos gradientes de velocidades (deformação rápida) e partículas espaçadas.
Característica da velocidade	<p>Distribuição da velocidade:</p> $u = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\rho_m g \cdot \text{sen} \theta}{\alpha}} \left[ h^{\frac{3}{2}} - (h-y)^{\frac{3}{2}} \right]$ <p>Velocidade superficial:</p> $u_s = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\rho_m g \cdot \text{sen} \theta}{\alpha}} \cdot h^{\frac{3}{2}}$ <p>Velocidade Meia:</p> $\bar{U} = \frac{3}{5} u_s$ <p>Velocidade relativa à da superfície:</p> $\frac{u_s - u}{u_s} = \left( 1 - \frac{y}{h} \right)^{\frac{3}{2}}$
<p>- Proposto em 1954. - <math>\alpha</math> é função da viscosidade (<math>\mu</math>), dimensões, tamanho e concentração</p>	

de partículas sólidas e ângulo de atrito interno.  
- Também conhecido como modelo dilatante ou dispersivo.

Modelo	Friccionário - Colisionar (Johnson)
Equação Reológica	$\tau = \tau_y + \alpha \left( \frac{du}{dy} \right)^2$
Tensões dominantes	Colisões e atrito entre partículas
Conveniência	Regime inercial misto, fluxo granular.
Característica da velocidade	<p>Distribuição da velocidade:</p> $u = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\rho_m g \cdot \text{sen} \theta}{\alpha}} \left[ H^{\frac{3}{2}} - (H - y)^{\frac{3}{2}} \right] \quad 0 \leq y \leq H$ $H = h - \frac{\tau_y}{\rho_m g \cdot \text{sen} \theta}$ <p>Velocidade superficial:</p> $u_s = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\rho_m g \cdot \text{sen} \theta}{\alpha}} \cdot H^{\frac{3}{2}} \quad H \leq y \leq h$ <p>Velocidade Meia:</p> $\bar{U} = \left( 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{H}{h} \right) u_s$ <p>Velocidade relativa à da superfície:</p> $\frac{u_s - u}{u_s} = \left( 1 - \frac{y}{H} \right)^{\frac{3}{2}} \quad 0 \leq y \leq H$
	<p>- Proposto em 1970. - <math>\tau_y</math> e <math>\alpha</math> são constantes.</p>

Modelo	Macroviscoso
Equação Reológica	$\tau = \mu_m \frac{du}{dy}$
Tensões dominantes	viscosas
Conveniência	Regime viscoso; fluxo newtoniano de baixa concentração $C_v \leq 0.09$ .
Característica da velocidade	<p>Distribuição da velocidade:</p> $u = \frac{\rho_m g h^2 \cdot \text{sen} \theta}{\mu_m} \left[ \frac{y^3}{h} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right]$ <p>Velocidade superficial:</p> $u_s = \frac{\rho_m g h^2 \text{sen} \theta}{2 \mu_m}$ <p>Velocidade Meia:</p> $\bar{U} = \frac{2}{3} u_s$

	<b>Velocidade relativa à da superfície:</b> $\frac{u_s - u}{u_s} = \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2$
- $\mu_m$ é viscosidade aparente, $2.25\lambda 1.5\mu_w$ (Bagnold) ou $\frac{\mu_m}{\mu_w} \left(1 + \frac{4.5}{\pi} K \cdot C_v\right)^{-2.5}$ (Chu) com $K = 2,5$ para esferas rígidas.	

Modelo	Viscoplástico (Bingham)
<b>Equação Reológica</b>	$\tau = \tau_y + \mu_B \frac{du}{dy} \quad \tau > \tau_y$
<b>Tensões dominantes</b>	<b>Coesão entre partículas e viscosas.</b>
<b>Conveniência</b>	<b>Regime viscoso com alta concentração de sólidos.</b>
<b>Característica da velocidade</b>	<b>Distribuição da velocidade:</b> $u = \frac{\rho_m g H^2 \cdot \text{sen} \theta}{\mu_B} \left[ \frac{y^3}{H^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{H}\right)^2 \right] \quad 0 \leq y \leq H$ $H = h - \frac{\tau_y}{\rho_m g \cdot \text{sen} \theta}$ <b>Velocidade superficial:</b> $u_s = \frac{\rho_m g H^2 \text{sen} \theta}{2\mu_B} \quad H \leq y \leq h$ <b>Velocidade Meia:</b> $\bar{U} = \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{h}\right) u_s$ <b>Velocidade relativa à da superfície:</b> $\frac{u_s - u}{u_s} = \left(1 - \frac{y}{H}\right)^2 \quad 0 \leq y \leq H$
<b>- Aplicável para partículas sólidas pequenas (argila, silt).</b>	

Modelo	Viscoplástico Colisionar (Chen)
<b>Equação Reológica</b>	$\tau = c \cos \phi + p \text{sen} \phi + \mu_1 \left(\frac{du}{dy}\right)^\eta$ $\sigma = -p + \mu_2 \left(\frac{du}{dy}\right)^\eta$
<b>Tensões dominantes</b>	<b>Atrito e colisões entre partículas e viscosas.</b>
<b>Conveniência</b>	<b>Regime em suspensão; fluxo de detritos (fluxo de alta concentração)</b>
<b>Característica da velocidade</b>	<b>Distribuição da velocidade:</b> $u = \frac{\eta}{\eta + 1} \left( \frac{\rho^* g H^{\eta+1} \text{sen} \theta}{\mu_1} \right)^{\frac{1}{\eta}} \left[ 1 - \left(1 - \frac{y}{H}\right)^{\frac{\eta+1}{\eta}} \right] \quad 0 \leq y \leq H$

	$H = h - \frac{\tau_y}{\rho_m g \cdot \text{sen} \theta}$ $\rho^* = \left[ \frac{1 - \frac{\text{sen} \phi}{\tan \theta}}{1 + \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \text{sen} \phi} \right] \rho_m$ <p><b>Velocidade superficial:</b></p> $u_s = \frac{\eta}{\eta + 1} \left( \frac{\rho^* g H^{\eta+1} \text{sen} \theta}{\mu_1} \right)^{\frac{1}{\eta}} \quad H \leq y \leq h$ <p><b>Velocidade Meia:</b></p> $\bar{U} = \left( 1 - \frac{\eta}{2\eta + 1} \cdot \frac{H}{h} \right) u_s$ <p><b>Velocidade relativa à da superfície:</b></p> $\frac{u_s - u}{u_s} = \left( 1 - \frac{y}{H} \right)^{\frac{\eta+1}{\eta}} \quad 0 \leq y \leq H$
<p>- Modelo Viscoplastico Generalizado (MVG) de Chen (1988).          - <math>\mu_1</math> e <math>\mu_2</math> índices de consistência constantes.          - <math>\eta</math> índice característico de fluxo 1.0 -2.0</p>	

## ANEXO IV: Método tridimensional de Elementos Discretos de Cundall (1988)

Cundall [44], [45] propôs a extensão de seu método para três dimensões. Neste caso, o autor desenvolveu o método para blocos como uma aplicação na mecânica das rochas. As principais diferenças deste método respeito ao desenvolvido para 2D é que a velocidade angular deixa de ser um escalar e sim um vetor que segue o Teorema de Euler para rotações em 3D [54]. Além de que o contato das esferas é uma área;  $A_c$  (não maior ao 1% da área superficial média das esferas). Um outro aspecto de consideração nos cálculos é o fato de que somente o vetor normal  $\hat{n}$  é conhecido enquanto que o vetor tangencial  $\hat{t}$  não. O modelo de contato utilizado é o mesmo da seção 3.1.2.3. Assim, aplicando as modificações respectivas para elementos esféricos, o método de Cundall para 3D é:

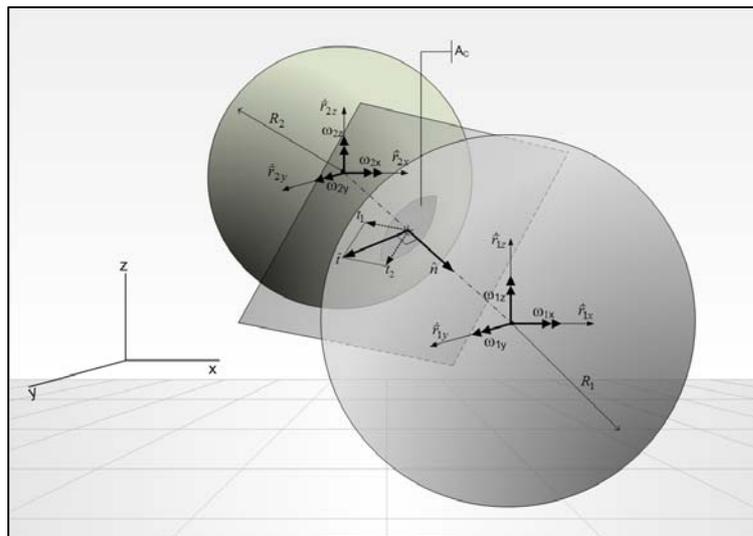


FIGURA IV.a. Notação usada nas equações do DEM-3D.

A velocidade das esferas em contato vem dada por:

$$\dot{r}_i = (\dot{r}_x, \dot{r}_y, \dot{r}_z)_i \quad (\text{iv.1.a})$$

$$\omega_i = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)_i \quad (\text{iv.1.b})$$

No ponto médio de contato das esferas, a velocidade relativa média  $\bar{v}$  deste é dada por:

$$\vec{v} = (\dot{r}_1 - \dot{r}_2) - (\bar{\omega}_1 R_1 + \bar{\omega}_2 R_2) \times \hat{n} \quad (\text{iv.2})$$

A força normal no plano normal definido na área de contato AC é:

$$\delta \vec{F}_N = (-K_N \cdot \delta_N - C_N \vec{v} \cdot \hat{n}) \cdot \hat{n} \quad (\text{iv.3})$$

Com:

$$\delta_N = (\vec{v} \cdot \hat{n}) \cdot dt \quad (\text{iv.4})$$

Desta forma a força tangencial é:

$$\delta \vec{F}_S = (-K_T \cdot \delta_T - C_T \vec{v}_T) \quad (\text{iv.5})$$

Com:

$$\vec{v}_T = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{n}) \cdot \hat{n} + (\bar{\omega}_1 R_1 + \bar{\omega}_2 R_2) \times \hat{n} \quad (\text{iv.6})$$

e:

$$\delta_T = \vec{v}_T \cdot dt \quad (\text{iv.7})$$

Assim, considerando a força de cisalhamento seguindo a Lei de Coulomb, se:

$$|\vec{F}_T| > |\vec{F}_N| \tan \phi + c \cdot A_C \quad (\text{iv.8})$$

Então:

$$\vec{F}_T = (|\vec{F}_N| \cdot \tan \phi + c \cdot A_C) \cdot \frac{\vec{F}_T}{|\vec{F}_T|} \quad (\text{iv.9})$$

Finalmente, o somatório das forças e momentos devido a todos os contatos é:

$$\vec{F} = \sum_k (\vec{F}_{N_i} + \vec{F}_{T_i}) \quad (\text{iv.10})$$

$$M_{\text{Externo}} = \sum_k (R \cdot \hat{n} \times \vec{F}_{T_i}) \quad (\text{iv.11.a})$$

$$M_{\text{Inercial}} = \dot{H} = [I] \cdot [\dot{\omega}] + [\dot{\omega}] \times [H] \quad (\text{iv.11.b})$$

$$H = [I] \cdot [\omega] \quad (\text{iv.11.c})$$

Que no caso de partículas esféricas, o segundo termo de (iv.11.c) é nulo, pelo que o caso 3D se reduz ao caso 2D. Por outro lado, as equações do movimento, considerando o Teorema de Amortecimento de Rayleigh, para uma esfera são dadas por:

$$\ddot{r}^i + \alpha \dot{r}^i = \frac{F_i}{m} + g_i \quad \forall i = 1,2,3 \quad (\text{iv.12.a})$$

$$\ddot{\omega}^i + \alpha \dot{\omega}^i = \frac{M_i}{I_i} \quad \forall i = 1,2,3 \quad (\text{iv.12.b})$$

Onde os termos não-lineares foram desprezados a causa da análise quase-estático no espaço de tempo  $dt$ . Deste jeito, a solução é similar ao caso 2D.

Partindo de:

$$\dot{r}_t^i = \frac{1}{2} (\dot{r}_{t-\frac{1}{2}dt}^i + \dot{r}_{t+\frac{1}{2}dt}^i) \quad (\text{iv.13.a})$$

$$\dot{\omega}_t^i = \frac{1}{2} (\dot{\omega}_{t-\frac{1}{2}dt}^i + \dot{\omega}_{t+\frac{1}{2}dt}^i) \quad (\text{iv.13.b})$$

$$\ddot{r}_t^i = \frac{1}{dt} (\dot{r}_{t-\frac{1}{2}dt}^i - \dot{r}_{t+\frac{1}{2}dt}^i) \quad (\text{iv.14.a})$$

$$\ddot{\omega}_t^i = \frac{1}{dt} (\dot{\omega}_{t-\frac{1}{2}dt}^i - \dot{\omega}_{t+\frac{1}{2}dt}^i) \quad (\text{iv.14.b})$$

A solução das equações (iv.11) é:

$$\dot{r}_{t+\frac{1}{2}dt}^i = \left( \frac{\dot{r}_{t-\frac{1}{2}dt}^i \left[ 1 - \frac{\alpha dt}{2} \right] + \sum_i [F_i]_t \frac{dt}{m} + g_i dt}{1 + \frac{\alpha dt}{2}} \right) \quad (\text{iv.15.a})$$

$$\dot{\omega}_{t+\frac{1}{2}dt}^i = \left( \frac{\dot{\omega}_{t-\frac{1}{2}dt}^i \left[ 1 - \frac{\alpha dt}{2} \right] + \sum_i [M_i]_t \frac{dt}{I_i}}{1 + \frac{\alpha dt}{2}} \right) \quad (\text{iv.15.b})$$

Finalmente, a atualização dos deslocamentos da esfera vem dados por:

$$\delta r_{t+dt}^i = \delta r_t^i + \dot{r}_{t+\frac{1}{2}dt}^i \cdot dt \quad (\text{iv.16.a})$$

$$\delta \theta_{t+dt}^i = \delta \theta_t^i + \dot{\omega}_{t+\frac{1}{2}dt}^i \cdot dt \quad (\text{iv.16.b})$$

Onde se reconhece o vetor de deslocamento do centro das esferas:

$$\delta \vec{r}_i = (x, y, z)_i \quad (\text{iv.17.a})$$

$$\delta \theta_i = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)_i = (\psi, \varphi, \gamma)_i \quad (\text{iv.17.b})$$

Este último vetor corresponde aos ângulos do teorema de rotação de Euler. Estes ângulos devem ser atualizados pela correção descrita na equação (3.39) no Capítulo 3:

$$\cos(\theta^i + \delta\theta^i) = \cos\theta^i - \text{sen}\theta^i \cdot \delta\theta^i \quad \forall i = 1,2,3 \quad (\text{iv.18.a})$$

$$\text{sen}(\theta^i + \delta\theta^i) = \text{sen}\theta^i + \cos\theta^i \cdot \delta\theta^i \quad \forall i = 1,2,3 \quad (\text{iv.18.b})$$

Agora, a relação entre coordenadas globais e locais não é tão simples quanto no caso 2D. Partindo que a rotação de cada eixo global (x,y,z) é no sentido horário, obtêm-se as matrizes de rotação (matrizes de rotação de Euler) dadas por:

$$R_{x,\psi} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \text{sen}\psi \\ 0 & -\text{sen}\psi & \cos\psi \end{vmatrix} \quad R_{y,\varphi} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & 0 & -\text{sen}\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \end{vmatrix} \quad R_{z,\gamma} = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \text{sen}\gamma & 0 \\ -\text{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{iv.19})$$

A combinação destas matrizes produz rotações diversas do corpo, mas a mais utilizada nas modelações gráficas em 3D é dada pela ordem  $R_{z,\gamma} \cdot R_{x,\psi} \cdot R_{y,\varphi}$ . Assim, as coordenadas locais vêm dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \hat{n} \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = R_{z,\gamma} \cdot R_{x,\psi} \cdot R_{y,\varphi} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \quad (\text{iv.20})$$

$$\begin{vmatrix} \cos\gamma \cdot \cos\varphi + \text{sen}\gamma \cdot \text{sen}\psi \cdot \text{sen}\varphi & \text{sen}\gamma \cdot \cos\varphi & -\cos\gamma \cdot \text{sen}\varphi + \text{sen}\gamma \cdot \text{sen}\psi \cdot \cos\varphi \\ -\text{sen}\gamma \cdot \cos\varphi + \cos\gamma \cdot \text{sen}\psi \cdot \text{sen}\varphi & \cos\gamma \cdot \cos\varphi & \text{sen}\gamma \cdot \text{sen}\varphi + \cos\gamma \cdot \text{sen}\psi \cdot \cos\varphi \\ \cos\psi \cdot \text{sen}\varphi & -\text{sen}\psi & \cos\psi \cdot \cos\varphi \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Onde  $\hat{t} = (t_1, t_2)$ . Estes vetores estão contidos no plano comum de contato como se observa na FIGURA IV.a.

## ANEXO V: Algoritmo de curvas bidimensionais spline cúbicas <sup>[54]</sup>

Sabendo da existência de um conjunto de pontos  $x_0, y_0; x_1, y_1 \dots x_n, y_n$ ; então se diz que existe um conjunto de funções SP(x) contendo uma função típica interpolante cúbica  $S_n^3(x)$  para cada intervalo  $[x_j, x_{j+1}]$  para  $j=0, 1, \dots, n-1$ ; com as seguintes características:

1.  $S_j^3(x) = S^3(x_j) = f(x_j) = y_j \quad \forall j = 0, 1, \dots, n.$
2.  $S_{j+1}^3(x_{j+1}) = S_j^3(x_{j+1}) \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-2.$
3.  $\partial_x S_{j+1}^3(x_{j+1}) = \partial_x S_j^3(x_{j+1}) \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-2.$
4.  $\partial_x^2 S_{j+1}^3(x_{j+1}) = \partial_x^2 S_j^3(x_{j+1}) \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-2.$

E deve-se satisfazer algum das seguintes condições de contorno:

5.  $\partial_x^2 S^3(x_0) = \partial_x^2 S^3(x_n) = 0 \quad (\text{Condição de Contorno Natural})$
6.  $\partial_x S^3(x_0) = \partial_x f_0 \text{ e } \partial_x S^3(x_n) = \partial_x f_n \quad (\text{Condição de Contorno Fixa})$

A condição (1) e (2) garante a interpolação dos pontos contidos em cada intervalo. A condição (3) garante uma transição suave das funções entre intervalos e a (4) garante continuidade de ordem dois para polinômios cúbicos. Sabendo que dito polinômio é dado por:

$$S_j^3(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (v.1)$$

O sistema de algébrico a ser resolvido é de  $4n$  incógnitas (coeficientes do polinômio dos  $n$  pontos) contra:

- $n+1$  equações dadas por a condição (1).
- $n-1$  equações dadas por a condição (2).
- $n-1$  equações dadas por a condição (3).
- $n-1$  equações dadas por a condição (4).
- 2 condições de contorno dadas por (5) ou (6).

Aplicando as condições anteriores na equação (v.1), tem-se que aplicando (1) e (2):

$$S_j^3(x_j) = a_j = f(x_j) = y_j \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (v.2)$$

Então:

$$a_{j+1} = S_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3$$

$$j = 0, 1, \dots, n-2. \quad (\text{v.3.a})$$

Tomando  $h_j = x_{j+1} - x_j$   $j=0, 1, \dots, n-1$ .

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j (h_j)^2 + d_j (h_j)^3 \quad j=0, 1, \dots, n-1. \quad (\text{v.3.b})$$

Agora, aplicando (3):

$$\partial_x S_j(x_j) = b_j \quad (\text{v.4.a})$$

$$b_{j+1} = b_j + c_j h_j + 3d_j h_j^2 \quad (\text{v.4.b})$$

Finalmente, aplicando (4):

$$\partial_x^2 S_j(x_j) = 2c_j \Rightarrow c_j = \frac{\partial_x^2 S_j(x_j)}{2} \quad (\text{v.5.a})$$

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \quad (\text{v.5.b})$$

Tomando  $d_j$  de (v.5.b) e substituindo em (v.4.b) e (v.3.b), tem-se que:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \quad j=0, 1, \dots, n-1. \quad (\text{v.6})$$

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}) \quad (\text{v.7})$$

Tomando ambas as equações para resolver para  $b_j$ :

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \quad (\text{v.8.a})$$

$$\therefore b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j) \quad (\text{v.8.b})$$

Substituindo as equações (v.8.a) e (v.8.b) em (v.7), obtém-se:

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \quad (\text{v.9})$$

Aqui são conhecidos os  $h_j$  e  $a_j$  com os quais se podem conhecer os coeficientes  $\{c_j\}_0^n$ . Depois usando (v.8.a) serão conhecidos os coeficientes  $\{b_j\}_0^n$  e

com (v.5.b) os valores de  $\{d_j\}_0^n$ . Além, considerando as condições de contorno tem-se que:

$$\partial_x^2 S^3(x_0) = \partial_x^2 S^3(x_n) = 0 \therefore c_n = 0 \text{ e } c_0 = 0 \quad (\text{v.10.a})$$

ou

$$\partial_x S^3(x_0) = \partial_x f_0 \quad \text{e} \quad \partial_x S^3(x_n) = \partial_x f_n$$

$$\therefore c_n = 3 \cdot \partial_x f_n - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \quad \text{e} \quad c_0 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3 \cdot \partial_x f_0 \quad (\text{v.10.b})$$

Desta forma, o sistema a resolver como  $\bar{A}x = \bar{b}$ , onde seguindo (v.10.a):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{v.11})$$

E para (v.10.b):

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

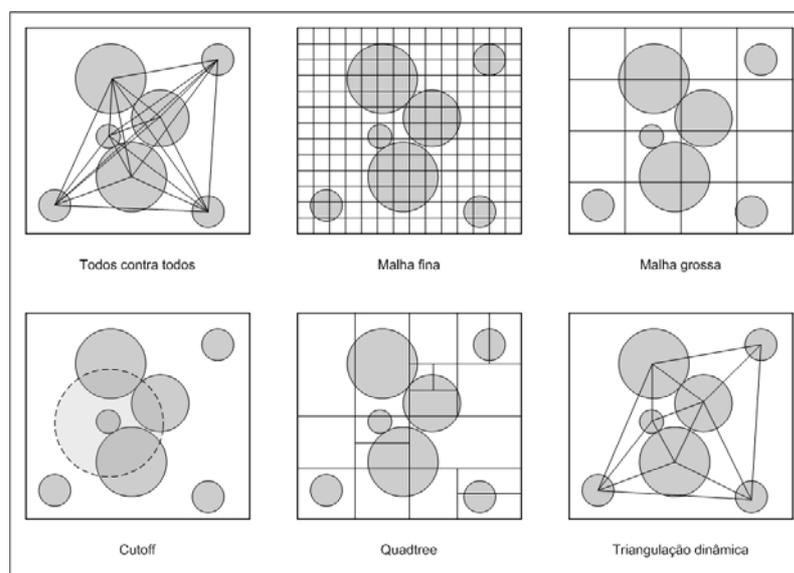
$$x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3 \cdot \partial_x f_0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3 \cdot \partial_x f_n - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{v.12})$$

Assim, o sistema pode ser resolvido com qualquer método para matrizes diagonais.

## ANEXO VI: Algoritmos de detecção de contatos

O maior problema do DEM é a eficiência do algoritmo de detecção de contatos entre as partículas. Este problema é tratado usualmente como de duas etapas: reconhecimento de potenciais partículas de contato e identificação dos pontos dos contatos.

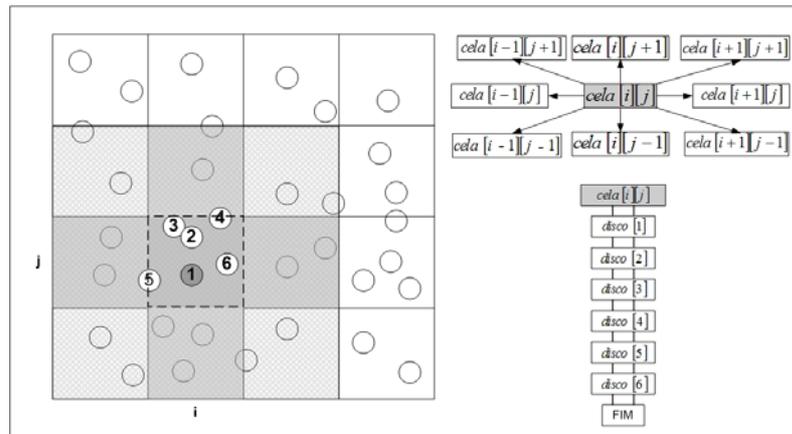
As técnicas mais usadas se baseiam nos critérios da cela adjacente, da partícula mais próxima ou recentemente da triangulação dinâmica.



**FIGURA VI.a. Técnicas de detecção de contatos para elementos discretos** [54].

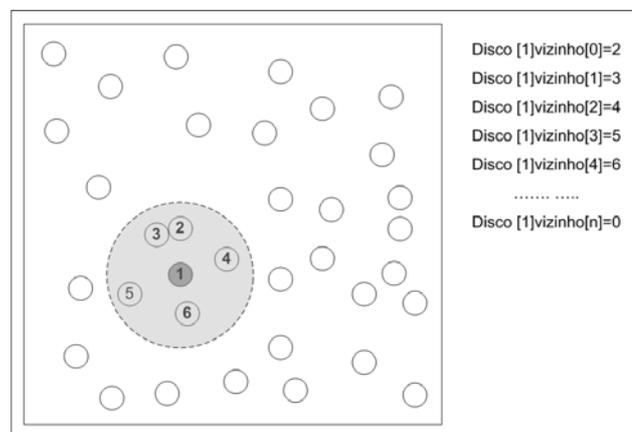
Do primeiro esquema da FIGURA VI.a, para um arranjo de  $N$  partículas implica  $N(N-1)/2$  iterações para identificar potenciais contatos, pelo qual não é uma técnica atrativa para problemas dinâmicos e grande quantidade de partículas.

Os esquemas de celas adjacentas (malha espacial, fina ou grossa) se baseiam na duplicidade das listas das partículas contidas em cada cela [57]. Conferindo os potenciais contatos entre partículas pertencentes à mesma cela e celas adjacentas. Entre estes esquemas, o mapeamento direto de partículas é o mais básico (Vede FIGURA VI.b), na qual se requerem  $n$  iterações na procura de contatos.



**FIGURA VI.b. Esquema da técnica da cela adjunta.**

Por outro lado, as técnicas de partículas mais próximas ou cutoff, pode ser mediante um raio de influência ou um quadrilátero. Neste esquema, cada partícula tem uma lista para as outras partículas e somente aquelas que estejam dentro desta área têm valores não nulos. Mas também, as partículas que ficam dentro de dita área são atualizadas a cada passo de tempo pelo que cada partícula registra todas as partículas que passaram por sua área de influência <sup>[58]</sup>. Esta técnica não é recomendada para grande número de partículas. São necessárias  $n \cdot \log n$  iterações na procura.



**FIGURA VI.c. técnica da**

**próxima ou cutoff.**

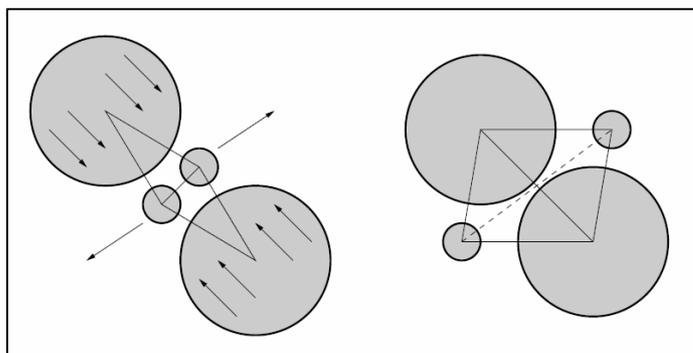
**Esquema da partícula mais**

O esquema de Quadtree é um sistema binário de procura ao igual que os anteriores, mas neste esquema precisam-se  $N \cdot \log N$  iterações.

Atualmente, novos algoritmos estão sendo desenvolvidos para melhorar o tempo e memória de armazenamento dos contatos nos programas de DEM.

A técnica de triangulação dinâmica reduz as iterações de  $n(n-1)/2$  a  $3n$  para um arranjo de  $n$  partículas, convertendo-se na técnica mais eficiente até agora desenvolvida para o caso bidimensional <sup>[24]</sup>. Esta também é conhecida como triangulação dinâmica de Delauny <sup>[57]</sup>.

Müller (1996) <sup>[24]</sup> apresenta um trabalho extensivo sobre esta técnica e adverte que a aplicação tridimensional da técnica é interessante, mas apresenta uma programação tediosa e requer ferramentas matemáticas e computacionais potentes, com as quais muitos modelos de interação entre partículas não seriam aplicáveis neste caso.



**FIGURA VI.d. Técnica de Triangulação dinâmica de Delauny.**

Estes métodos aqui descritos aplicam para partículas disco ou esféricas. Para outro tipo de geometria, os métodos viram mais complexos e de difícil programação <sup>[60]</sup>, <sup>[61]</sup>, pois a este nível o problema vira mais uma encrenca da lógica computacional (programação dinâmica, gráficos tridimensionais, etc.) do que problema físico (modelo de contato, modelo reológico, etc.).