

2

MODELAGEM DE PROBLEMAS DE BARRAS

A barra é uma estrutura mecânica que, num dado instante, pode ser descrita por um único parâmetro, o deslocamento longitudinal; portanto é um objeto unidimensional [17]. Este capítulo apresentará a dinâmica de movimento e a solução de problemas envolvendo barras.

2.1

Dinâmica de Barras

Considere um corpo unidimensional, representado pelo intervalo $[0, L]$, com densidade ρ , área de seção transversal A e módulo de elasticidade E . Seja $u(x, t)$ a posição do ponto x no instante t e $f(x, t)$ a força externa ao sistema. $u(\bullet, t)$ é a configuração do corpo no instante t e $u(x, \bullet)$ é a trajetória do ponto x . Um exemplo de barra (fixa em uma extremidade e livre na outra) está apresentado na figura (2.1):

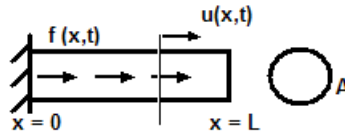


Figura 2.1: Barra fixa-livre

Tomando uma parte finita do domínio $[\overline{x_1 x_2}]$ e adotando as leis de conservação de quantidade de movimento [15], deseja-se calcular a dinâmica do corpo:

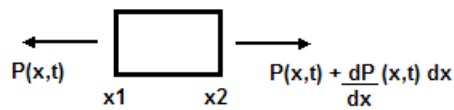


Figura 2.2: Seção $[\overline{x_1 x_2}]$ do domínio

A seção $[\overline{x_1 x_2}]$ está submetida a forças internas $P(x, t)$ que dependem da deformação local:

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{u(x_2, t) - u(x_1, t)}{x_2 - x_1} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} \quad (2-1)$$

Dessa forma, pode-se escrever a dinâmica em $[\overline{x_1 x_2}]$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) A(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = P(x_2, t) - P(x_1, t) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx \quad (2-2)$$

Define-se $\Delta x = x_2 - x_1$ e, se $x_2 \rightarrow x_1$, então $\Delta x \rightarrow 0$.

Usando a equação constitutiva que relaciona $P(x, t)$ com a deformação $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$, e caracteriza materiais elásticos, lineares (lei de Hooke), definida por:

$$\frac{P(x, t)}{A(x)} = E(x) \varepsilon(x, t) = E(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (2-3)$$

$$P(x, t) = E(x) A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

$E(x)$ é o módulo de elasticidade do material, no ponto x ; e $\varepsilon(x, t)$ é a deformação.

Aproxima-se a integral $\int_a^b g(x) dx \sim g(a)(b - a)$, e substitui-se a equação (2-3) em (2-2):

$$\rho(x_1) A(x_1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \bigg|_{x_1}^{x_2} \Delta x = E(x_2) A(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) - E(x_1) A(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) + f(x_1) \Delta x \quad (2-4)$$

Divide-se toda a equação (2-4) por Δx e faz-se $\lim(\Delta x \rightarrow 0)$

$$\rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} (E(x) A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)) = f(x, t) \quad (2-5)$$

Considerando constantes a seção transversal da barra e as propriedades do material, a equação (2-5) reduz-se a:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \quad (2-6)$$

Para $f = 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2-7)$$

A equação (2-5) fornece parte da informação sobre a dinâmica do corpo, porque faltam as informações referentes às extremidades 0 e L , que são denominadas condições de contorno. São necessárias, também, as condições iniciais, que informam a posição e a velocidade de todos os pontos; ou seja, as condições da dinâmica no início do processo.

A equação (2-5), juntamente com as condições de contorno e as condições iniciais constituem um problema que pode-se mostrar ter solução única. Alguns exemplos de problemas de barras com diferentes condições de contorno [8], estão apresentados na figura (2.3):

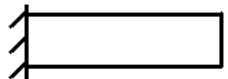
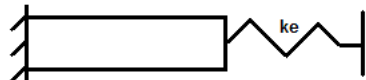
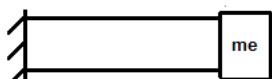
TIPO DE BARRA	CONFIGURAÇÃO	Cond. Contorno $x = 0$	Cond. Contorno $x = L$
Barra Livre-Livre		$EA \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$
Barra Fixa-Livre		$u(0, t) = 0$	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$
Barra Fixa-Mola		$u(0, t) = 0$	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -k_e u(L, t)$
Barra Fixa-Massa		$u(0, t) = 0$	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = m_e \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2}$

Figura 2.3: Condições de contorno e configurações associadas a cada tipo de barra

Definição das condições de contorno:

- Extremidade fixa: $u(x, t) = 0$;
- Extremidade livre: $P(x, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0$;

- Extremidade com mola (k_e): $P(x, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -k_e u(x, t)$;
- Extremidade com massa (m_e): $P(x, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = m_e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$.

2.2

Problema Modelo: resolução por separação de variáveis

Escolheu-se o problema de uma barra livre-livre como modelo a ser apresentado. Como esse problema tem configuração muito simples, a solução de frequências naturais e modos de vibração correspondentes encontram-se na literatura. O cálculo da solução analítica do problema pode dividido em três etapas, que serão explicadas a seguir.

Através desse problema-modelo (problema de barra livre-livre), deseja-se introduzir os conceitos de frequência natural e modo de vibração; além de mostrar que a aproximação da forma $\sum_1^N a_i(t)\phi_i(x)$ é realista [8].

Considere uma barra homogênea (mesmo material) e uniforme (mesma geometria); de comprimento L , livre nas duas extremidades e com força externa nula, $f = 0$.

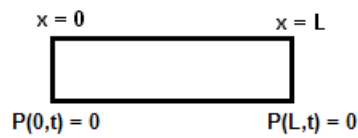


Figura 2.4: Barra livre-livre

Conforme foi apresentado na figura (2.3), quando a extremidade da barra é livre, $P(x, t) = 0$. Com isso, pode-se especificar o problema da barra livre-livre através da equação de movimento, das condições de contorno e das condições iniciais; que são, respectivamente:

$$Problema(P) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & \therefore c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad em (0, L) \\ EA \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 & EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \end{array} \right. \quad (2-8)$$

Para cada ponto no intervalo $[0, L]$, tem-se uma condição: nos pontos internos $(0, L)$ a condição é prescrita por uma equação diferencial parcial e nos extremos, $(x = 0 \text{ e } x = L)$, a condição de a barra estar "livre", faz com que a força exercida seja nula. As condições iniciais do problema informam a posição e a velocidade de cada ponto, no início do processo.

Deseja-se encontrar a solução u da equação diferencial da barra, que satisfaça as condições de contorno e as condições iniciais (2-8). Para isso, devem ser realizadas três etapas [8]: Aplicação do *Método de Separação de Variáveis*, a partir do qual serão obtidas duas Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Uma vez determinadas as *Soluções das duas EDOs*, que satisfaçam as condições de contorno do problema; será feita a *Superposição das Soluções* de forma a satisfazer as condições iniciais.

– Primeira etapa: Método de Separação de Variáveis

Parte-se da equação diferencial e das condições de contorno, apresentadas em (2-8); e procura-se uma solução $u(x, t)$ que seja o produto de duas funções, uma dependente apenas da posição x e outra dependente somente do instante t :

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2-9)$$

Nessa primeira etapa, não utiliza-se as condições iniciais do problema. Define-se diferentes nomenclaturas adotadas para diferenciação em relação à coordenada x e em relação à t , quando trata-se de funções de uma variável:

$$\frac{\partial}{\partial x} = ' \quad \frac{\partial}{\partial t} = \cdot$$

Substitui-se (2-9) na equação diferencial de (2-8):

$$X\ddot{T} = c^2 X''T \quad (2-10)$$

a equação (2-10) pode ser reescrita por:

$$\frac{X''}{X}(x) = \frac{\ddot{T}}{c^2 T}(t) \quad (2-11)$$

Como o lado esquerdo da equação (2-11) depende apenas da variável x e o lado esquerdo depende apenas de t , conclui-se que os dois lados devem ser iguais a uma constante que, por conveniência, será chamada de $-\lambda^2$.

(2-11) pode ser separada em duas equações diferenciais ordinárias:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (2-12)$$

$$\ddot{T} + c^2 \lambda^2 T = 0 \quad (2-13)$$

– **Segunda etapa: Determinação das soluções das duas EDOs**

A mesma separação de variáveis realizada na equação (2-9) deve ser aplicada nas condições de contorno de (2-8):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \implies X'(0)T(t) = 0 \quad (2-14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \implies X'(L)T(t) = 0$$

Para $T(t) \equiv 0$, tem-se que $u(x, t) = 0$, o que não satisfaz condições iniciais não-nulas. Por isso, exige-se que:

$$X'(0) = 0 \text{ e } X'(L) = 0 \quad (2-15)$$

Encontra-se, então o seguinte problema de valor de contorno, conhecido como um problema de Sturm-Liouville:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (2-16)$$

$$X'(0) = 0 \text{ e } X'(L) = 0$$

Deseja-se encontrar o par (λ, X) tal que $X \neq 0$ e que satisfaça o problema de valor característico apresentado pela equação (2-12), satisfazendo as condições de contorno (2-15).

λ são os autovalores e X as autofunções correspondentes.

Para o caso de $\lambda^2 = 0$, tem-se que $X'' = 0$ e a solução $X(x) = A_1x + A_2$. Quando são impostas as condições de contorno de (2-15), verifica-se que $X(x) = 0$; por isso a condição de $\frac{X''}{X} = 0$ é descartada.

Tem-se que a solução geral da equação (2-12) é:

$$X(x) = B_1 \cos \lambda x + B_2 \sin \lambda x \quad (2-17)$$

e a respectiva derivada é:

$$X'(x) = -B_1 \lambda \sin \lambda x + B_2 \lambda \cos \lambda x \quad (2-18)$$

A primeira condição de contorno $X'(0) = 0$ é substituída em (2-18). Sendo $\sin(0) = 0$ e $\cos(0) = 1$, a equação (2-18) reduz-se a:

$$B_2 \lambda = 0 \implies B_2 = 0 \quad (2-19)$$

A possível solução $X(x)$ reduz-se a:

$$X(x) = B_1 \cos \lambda x \quad (2-20)$$

Pela segunda condição de contorno, $X'(L) = 0$:

$$-B_1 \lambda \sin \lambda L = 0 \implies \sin \lambda L = 0 \quad (2-21)$$

Da equação (2-21), existiriam três opções: $B_1 = 0$, $\lambda = 0$, $\sin \lambda L = 0$. Conforme foi explicado anteriormente, $\lambda \neq 0$; e se $B_1 = 0$, pela equação (2-20), $X(x)$ também seria nulo; portanto, necessariamente,

$\sin \lambda L = 0$. Essa condição impõe restrições à constante λ . Por motivos que serão explicados posteriormente, é necessário achar todas as soluções do problema, de forma a satisfazerem as condições iniciais do mesmo (terceira etapa).

Existem infinitas possibilidades que satisfazem a condição $\sin(\lambda L) = 0$ e, para representar cada uma delas utiliza-se um índice n diferente; ou seja $\lambda_n L = n\pi$, tal que $n = 1, 2 \dots \infty$. Então:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2-22)$$

Para cada λ_n , existirá uma solução $X_n(x)$ a ele associada:

$$X_n(x) = B_{1n} \cos \lambda_n x \quad n = 1, 2, \dots \quad (2-23)$$

Conforme foi visto pela equação (2-23), existem infinitas soluções para a primeira função $X_n(x)$. O mesmo acontece com $T(t)$ que, a partir de (2-13), tem-se $\ddot{T}_n + \lambda_n^2 c^2 T_n = 0$; tal que, uma solução para $T_n(t)$ é:

$$T_n(t) = C_{1n} \cos(\lambda_n ct) + C_{2n} \sin(\lambda_n ct) \quad (2-24)$$

Partindo-se de (2-9) tem-se que a solução candidata do sistema é:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) \quad \therefore \quad n = 1, 2, \dots \quad (2-25)$$

que, juntamente com (2-23) e (2-24) pode ser reescrita por:

$$u_n(x, t) = \cos(\lambda_n x)(D_{1n} \cos(\lambda_n ct) + D_{2n} \sin(\lambda_n ct)) \quad (2-26)$$

sendo $D_{1n} = B_{1n}C_{1n}$ e $D_{2n} = B_{1n}C_{2n}$

– **Terceira etapa: Superposição de soluções**

As infinitas soluções do problema não necessariamente satisfazem as condições iniciais do problema (2-8). Para garantir que essas condições sejam satisfeitas, faz-se a superposição das soluções candidatas (u_n); o que resulta em:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda_n x) (D_{1n} \cos(\lambda_n ct) + D_{2n} \sin(\lambda_n ct)) \quad (2-27)$$

sendo $\lambda_n c$ a frequência natural do sistema.

D_{1n} e D_{2n} são calculadas a partir das condições iniciais, apresentadas em (2-8). Substituindo-se a primeira delas na equação (2-27), tem-se:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n} \cos(\lambda_n x) = u_0(x) \quad (2-28)$$

multiplica-se os dois lados da equação por $\cos(\lambda_m x)$ e integra-os no domínio $[0 \quad L]$:

$$\int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n} \cos(\lambda_n x) \cos(\lambda_m x) dx = \int_0^L u_0(x) \cos(\lambda_m x) dx \quad (2-29)$$

o resultado da integral do somatório acima é $L/2$ para $n = m$ e 0 para $n \neq m$, então:

$$D_{1n} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \cos(\lambda_n x) dx \quad (2-30)$$

Aplica-se a segunda condição inicial do sistema (2-8) e tem-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} c \lambda_n \cos(\lambda_n x) = v_0(x) \quad (2-31)$$

A mesma técnica de multiplicar toda a equação por $\cos(\lambda_m x)$, para então integrá-la no domínio $[0 \quad L]$ é adotada:

$$\int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} c \lambda_n \cos(\lambda_n x) \cos(\lambda_m x) dx = \int_0^L v_0(x) \cos(\lambda_m x) dx \quad (2-32)$$

$$D_{2n} = \frac{2}{L \lambda_n c} \int_0^L v_0(x) \cos(\lambda_n x) dx \quad (2-33)$$

A solução geral da dinâmica de uma barra livre-livre, com as respectivas condições de contorno e condições iniciais, consiste na substituição de D_{1n} e D_{2n} (2-30 e 2-33) na expressão de u , de (2-27).

A solução u pode ser expressa de forma simplificada:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t) \quad (2-34)$$

sendo:

$$\phi_n(x) = \cos(\lambda_n x)$$

$$a_n(t) = D_{1n} \cos(\lambda_n c t) + D_{2n} \sin(\lambda_n c t)$$

Associado a cada frequência natural, existe um Modo de Vibração, que é uma configuração do sistema quando todos os seus pontos vibram sincronicamente, ou seja, na mesma frequência.

As frequências naturais e os modos de vibração deste sistema são, respectivamente:

$$\text{Frequências Naturais: } \omega_n = c \lambda_n = c \frac{n\pi}{L} \quad (2-35)$$

$$\text{Modos de Vibração: } \phi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (2-36)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

u pode ser aproximada por N modos de vibração, sendo representada por $u^N(x, t)$ e essa aproximação gera uma parcela de erro a ela associada, que é $\varepsilon^N(x, t)$:

$$u(x, t) = u^N(x, t) + \varepsilon^N(x, t) \quad (2-37)$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t)}_{u(x,t)} = \underbrace{\sum_{n=1}^N \phi_n(x) a_n(t)}_{u^N(x,t)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t)}_{\varepsilon^N(x,t)} \quad (2-38)$$

aproximação:
$$u^N(x, t) = \sum_{n=1}^N \phi_n(x) a_n(t) \quad (2-39)$$

erro de aprox:
$$\varepsilon^N(x, t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t) \quad (2-40)$$

sendo N o número de modos usados na aproximação de u^N .