

4

Relaxação lagrangeana para AGMD

A utilização de relaxação lagrangeana, para a resolução de problemas de otimização combinatória NP-difíceis, foi iniciada com a contribuição fundamental de Held e Karp para o problema do caixeiro viajante [39, 40]. Em suas origens combinatórias, o uso da técnica era quase unicamente voltado para o desenvolvimento de métodos de solução exata. No entanto, posteriormente, passou a ter também um uso crescente no desenvolvimento de heurísticas. Estas são genericamente denominadas de heurísticas lagrangeanas e têm por característica básica o uso de informação dual (lagrangeana) para guiar a geração de soluções primais inteiras.

Nesse capítulo, propõem-se heurísticas lagrangeanas para AGMD. Essas heurísticas se originam de uma relaxação lagrangeana para a formulação multifluxo (2-31)–(2-40), apresentada na Seção 2.3.2. Tal formulação tende a ser mais forte que a de Achuthan com *lifting*, ou seja, em geral, produz relaxações lineares de valor mais alto que aquela. No entanto, para instâncias do AGMD com poucos nós e arestas, a formulação tipicamente demanda altos tempos de CPU. Por exemplo, relata-se em Gouveia [28] que foi consumido mais de uma semana de tempo de computação para resolver instâncias pequenas e esparsas de 20 nós e 50 arestas, utilizando o modelo multifluxo básico. Assim sendo, a mesma se apresenta como uma candidata natural a um tratamento lagrangeano. Da mesma forma, a qualidade relativa dos limites inferiores que produz, torna essa formulação, adicionalmente, uma boa candidata para o desenvolvimento de heurísticas lagrangeanas. Em geral, quanto melhores são as soluções duais geradas por uma relaxação lagrangeana, melhores serão as soluções primais geradas a partir das mesmas.

4.1

Fundamentos básicos da técnica

Considerando-se uma formulação genérica para um problema de otimização combinatória NP-difícil. Por simplicidade de apresentação e sem perda de generalidade, assume-se que esta formulação envolve variáveis $x \in \{0, 1\}^t$ e contém matrizes A e B de coeficientes racionais e dimensões $r \times t$ e $s \times t$, respectivamente. Assume-se ainda que a mesma contém os vetores b , c e d , de

dimensões r , t e s , respectivamente, e que estes também possuem coeficientes racionais. Assim sendo, a formulação é descrita por:

$$z = \min cx \quad (4-1)$$

sujeito a:

$$Ax \geq b, \quad (4-2)$$

$$Bx \geq d, \quad (4-3)$$

$$x \in \{0, 1\}^t. \quad (4-4)$$

Seja $\{\min cx : Bx \geq d, x \in \{0, 1\}^t\}$ um problema fácil de se resolver e, conseqüentemente, (4-2) são as restrições que complicam a resolução da formulação acima. Assim sendo, considera-se então a alternativa de associar multiplicadores de Lagrange $\lambda \in R_+^r$ às desigualdades (4-2) e levá-las à função objetivo. Procedendo-se dessa maneira, obtém-se então um problema lagrangiano, denotado por $PL(\lambda)$ definido por:

$$z(\lambda) = \min cx + \lambda(b - Ax) \quad (4-5)$$

sujeito a:

$$Bx \geq d, \quad (4-6)$$

$$x \in \{0, 1\}^t. \quad (4-7)$$

O valor de $z(\lambda)$ define um limite inferior para o valor de z . Isso pode ser demonstrado através dos argumentos que se seguem. Observa-se inicialmente que $z'(\lambda) = \{\min cx + \lambda(b - Ax) : Ax \geq b, Bx \geq d, x \in \{0, 1\}^t\}$ domina o valor de $z(\lambda)$. Isso ocorre pois a mesma função objetivo é otimizada sobre uma região de viabilidade mais restrita. Dessa forma, tem-se então que $z(\lambda) \leq z'(\lambda)$. Por outro lado, $z'(\lambda) \leq z$ já que ambas as formulações envolvem a mesma região de viabilidade e, necessariamente, na função objetivo da primeira, $\lambda(b - Ax) \leq 0$. Isso se aplica pois $\lambda \geq 0$, por definição, e $Ax \geq b$ é imposto como restrição da formulação, devendo assim ser satisfeita. Ou seja, para qualquer ponto do espaço único de soluções envolvido, o valor correspondente da função objetivo da primeira formulação será sempre inferior ao valor da segunda. Tem-se então que $z(\lambda) \leq z'(\lambda) \leq z$, o que comprova ser $z(\lambda)$ um limite inferior para z .

O melhor limite inferior $z(\lambda^*)$ que pode ser obtido em (4-5)–(4-7) é dado pelo problema dual lagrangeano:

$$z_d = \max_{\lambda \geq 0} \{ PL(\lambda) \}. \quad (4-8)$$

Dentre outras, o problema dual lagrangeano pode ser resolvido através de técnicas baseadas na otimização de subgradientes, por exemplo: o método do subgradiente (MS) de Held e Karp [39, 40] ou os métodos de feixes [8]. Sua

solução ótima pode ainda ser aproximada através de técnicas de ajuste de multiplicadores [9].

Um aspecto importante a analisar é a qualidade oferecida por z_d . Resultados teóricos apresentados, por exemplo, em [34], especificam as condições sob as quais z_d domina o valor \underline{z} da relaxação linear de (4-1)–(4-4). Uma relaxação lagrangeana possui a propriedade de integralidade quando a solução ótima de (4-5)–(4-7) não se modifica ao se substituir as restrições de integralidade $x \in \{0, 1\}^t$ por $x \in [0, 1]^t$. É possível mostrar que, diante da inexistência da propriedade de integralidade, $z_d \geq \underline{z}$. Caso contrário, $z_d = \underline{z}$.

Os métodos de otimização por subgradientes, utilizados para a obtenção de z_d , são, essencialmente, processos iterativos que levam de multiplicadores iniciais λ_0 a multiplicadores λ^* , para os quais $z_{\lambda^*} = z_d$. Descreve-se a seguir, resumidamente, MS que é o método de otimização por subgradientes utilizado nesta tese. É importante ressaltar que, embora a convergência teórica do Método do Subgradiente tenha sido provada [8, 39, 40, 47], o mesmo não pode ser garantido para suas implementações práticas porque o número de iterações deve ser limitado e além disso, erros numéricos podem ocorrer. Neste caso, é melhor referir-se à aproximação de multiplicadores λ^* .

4.1.1

Uma descrição do método do subgradiente

Em uma iteração k de MS, para um vetor viável de multiplicadores de Lagrange λ^k , seja \bar{x}^k a solução ótima correspondente a (4-5)–(4-7). Seja z_{λ^k} o valor dessa solução e \bar{z} um limite superior conhecido para z . Adicionalmente, seja $g^k \in R^m$ um subgradiente associado, no ponto \bar{x}^k , às restrições relaxadas. Os coeficientes de g^k são definidos por:

$$g_i^k = (b_i - a_i \bar{x}^k), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (4-9)$$

Na literatura [23], para se proceder à atualização dos multiplicadores de Lagrange, é gerado primeiro um tamanho de passo:

$$\theta^k = \frac{\pi[\bar{z} - z_{\lambda^k}]}{\sum_{i=1, \dots, m} (g_i^k)^2}, \quad (4-10)$$

onde π é um número real que assume valores em $(0, 2]$. Feito isso, procede-se à atualização

$$\lambda_i^{k+1} \equiv \max\{0; \lambda_i^k - \theta^k g_i^k\}, \quad i = 1, \dots, r \quad (4-11)$$

e passa-se para a iteração $k + 1$ de MS.

Vale ressaltar que a dualização de restrições do tipo $Ax = b$ leva a multiplicadores λ , irrestritos em sinal. Isso ocorre porque restrições de igualdade podem ser reescritas como $Ax \geq b$ e $-Ax \geq -b$. Neste caso, a

dualização dos dois conjuntos de desigualdades envolveria, respectivamente, os multiplicadores $\lambda^1 \in R_+^r$ e $\lambda^2 \in R_+^r$. Dualizados os mesmos, obtém-se, na função objetivo, o termo $[\lambda^1(b - Ax) + \lambda^2(-b + Ax)]$. Reordenando suas componentes, chega-se a $[(\lambda^2 - \lambda^1)Ax - (\lambda^2 - \lambda^1)b]$, onde $\lambda = (\lambda^2 - \lambda^1)$ é irrestrito em sinal, confirmando assim a afirmação inicial.

4.1.2

Heurísticas lagrangeanas

Apresenta-se a seguir, a descrição de um tipo de heurística lagrangeana que, recentemente, vem sendo bastante utilizada [50]. Heurísticas desse tipo serão aqui propostas para AGMD.

Assume-se que uma heurística básica (HB) está disponível para gerar soluções viáveis para o problema de otimização combinatória (4-1)–(4-4). Essa heurística é normalmente chamada, pela primeira vez, antes da inicialização de MS. Chamadas adicionais a HB são feitas em conjunto com algumas iterações de MS (por exemplo: para aquelas iterações onde z_{λ^k} é superior a todos os limites inferiores previamente obtidos para z).

Na primeira chamada a HB, os custos originais c são utilizados. Em chamadas subsequentes, por exemplo, na iteração k de MS, custos lagrangeanos $(c + \lambda^k A)$ ou custos complementares $(1 - \bar{x}^k)c$ são utilizados. Operando sob custos complementares, as variáveis fixadas em 1 na solução \bar{x}^k passam a ter custo 0, tornando-se assim atraentes para serem escolhidas em HB. Sempre que uma solução viável é obtida por HB sob custos lagrangeanos ou custos complementares, deve-se calcular o custo real da solução utilizando os custos originais c .

Até o momento, a experiência prática comprova que melhores soluções viáveis são obtidas em chamadas feitas a HB sob custos complementares. Deve ser também ressaltado que, como é o caso para qualquer algoritmo de solução não-exata, soluções viáveis obtidas em chamadas a HB podem (devem) ser submetidas a procedimentos de busca local.

Refere-se genericamente por HL aos dois tipos de heurísticas lagrangeanas descritas acima. A motivação para esse tipo de utilização de informação dual se baseia tanto em resultados empíricos quanto nas garantias analíticas de desempenho oferecidas por algoritmos primal-dual exatos ou não. Em geral, para que HL apresente um bom desempenho, idealmente, HB deve demandar um baixo custo computacional, já que deverá ser chamada múltiplas vezes. Da mesma forma, z_d deve ser um limite inferior de (muito) boa qualidade para z . Sob essas condições, muitas vezes, uma simples heurística gulosa se mostra plenamente adequada a cumprir o papel de HB.

Estratégias heurísticas do tipo HL foram amplamente aplicadas em

problemas importantes da literatura, tais como: problema de Steiner em grafos [49], problema do caixeiro viajante [10], problema de roteamento de veículos [52], problema de ordenação linear [11], problema de partição retangular [13], problema da árvore geradora capacitada [62] e problema da árvore geradora com restrição de grau nos vértices [6, 16]. Em particular, para o problema de Steiner em grafos, para o problema de ordenação linear e para o problema da árvore geradora com restrição de grau nos vértices, os resultados obtidos a partir de HL são de qualidade igual ou superior às melhores heurísticas e metaheurísticas existentes na literatura para esses problemas. Foram desenvolvidas para AGMD heurísticas lagrangeanas que utilizam tanto os custos lagrangeanos quanto os custos complementares.

4.2

Uma relaxação lagrangeana para o modelo multifluxo básico

Além das restrições de diâmetro, a formulação multifluxo básica possui outro fato complicador: a quantidade de variáveis de fluxo y que contém. Para trabalhar com essas variáveis foi utilizado como estratégia o tratamento implícito das mesmas.

A estratégia empregada consiste em reformular $PL(\lambda)$ como um problema da árvore geradora de custo mínimo, definida unicamente sob as variáveis x . Para tanto, os custos lagrangeanos associados a x em $PL(\lambda)$ passariam a incorporar contribuições adequadas das variáveis y . Essas, em contrapartida, desaparecem de $PL(\lambda)$ e seus valores ótimos correspondentes são inferidos a partir da solução encontrada para $PL(\lambda)$.

Inicialmente, são dualizadas as restrições (2-33), (2-34), (2-35), (2-37) e (2-40). Em seguida, são adicionadas ao $PL(\lambda)$ resultante as restrições (4-14). Essas restrições são necessárias porque, uma vez dualizadas as restrições de envio, recepção e conservação de fluxo, quebra-se a conectividade imposta pela estrutura de fluxo.

Multiplicadores de Lagrange $\lambda = (\sigma, \beta, \xi, \alpha, \delta)$, sendo σ, β, ξ e δ irrestritos em sinal e $\alpha \geq 0$, são então associados respectivamente às restrições (2-33), (2-34), (2-35), (2-37) e (2-40). Dessa forma, $PL(\lambda)$ passa a ser:

$$\begin{aligned}
 z(\lambda) = & \min \sum_{[i,j] \in E} c_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{j,q \in V} \sigma_{jq} \left(1 - \sum_{i:(i,j) \in A} y_{ji}^{jq} \right) \\
 & + \sum_{p,q,j \in V} \beta_{pqj} \left(- \sum_{i:(i,j) \in A} y_{ij}^{pq} + \sum_{i:(i,j) \in A} y_{ji}^{pq} \right) \\
 & + \sum_{j,p \in V} \xi_{jp} \left(1 - \sum_{i:(i,j) \in A} y_{ij}^{pj} \right) + \sum_{p,q \in V} \alpha_{pq} \left(-D + \sum_{(i,j) \in A} y_{ij}^{pq} \right) \\
 & + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{p,q \in V} \delta_{ij}^{pq} (-y_{ij}^{pq} + y_{ji}^{qp}) \tag{4-12}
 \end{aligned}$$

sujeito a:

$$\sum_{[i,j] \in E} x_{ij} = |V| - 1, \tag{4-13}$$

$$\sum_{[i,j] \in E(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset V, |S| > 2, \tag{4-14}$$

$$y_{ij}^{pq} + y_{ji}^{p'q'} \leq x_{ij} \quad \forall [i,j] \in E; p, q, q' \in V, \tag{4-15}$$

$$y_{ij}^{pq} \in [0, 1] \quad \forall (i,j) \in A; p, q \in V, \tag{4-16}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall [i,j] \in E. \tag{4-17}$$

Considera-se, genericamente e por simplicidade, que C_{ij}^{pq} é o custo lagrangeano associado à variável y_{ij}^{pq} . A descrição analítica desses custos é aqui omitida para simplificar a apresentação e o entendimento do método desenvolvido. Entretanto, o cálculo dos mesmos é especificado através de um pseudo-código apresentado na Seção 4.3. Em vista do exposto acima, a função objetivo de PL(λ) é então expressa por:

$$\begin{aligned}
 z(\lambda) = & \min \sum_{[i,j] \in E} c_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{p,q \in V} C_{ij}^{pq} \cdot y_{ij}^{pq} + \sum_{j,q \in V} \sigma_{jq} \\
 & + \sum_{j,q \in V} \xi_{jp} - \sum_{p,q \in V} D \cdot \alpha_{pq} \tag{4-18}
 \end{aligned}$$

e observa-se que uma solução viável para (4-13)–(4-17) define, nas variáveis x , uma árvore geradora para G . Para aquela região de viabilidade, as variáveis y são restritas unicamente por (4-15)–(4-16) e pelas exigências implícitas de não-positividade, impostas pela função objetivo (que é de minimização).

Para uma dada aresta $[i,j] \in E$, procede-se agora a uma análise dos valores \bar{y} a serem assumidos, em (4-12)–(4-17), pelas variáveis y definidas para

os arcos (i, j) e (j, i) . Essa análise deve necessariamente considerar o valor \bar{x}_{ij} assumido pela variável x_{ij} correspondente. Se $x_{ij} = 0$, obviamente, todas as variáveis y_{ij}^{pq} e y_{ji}^{pq} , definidas para todos os pares de vértices distintos p e q , deverão assumir o valor 0. Por outro lado, quando $x_{ij} = 1$, o significado das desigualdades (4-15) é o de que só poderá ocorrer passagem de fluxo, originário de um dado vértice $p \in V$, em no máximo, um dos arcos (i, j) e (j, i) . Assim sendo, é preciso definir, em primeiro lugar, para cada vértice distinto p , as condições necessárias à passagem de fluxo, originário de p , nos arcos (i, j) e (j, i) . Isso é feito a partir dos somatórios:

$$O_{ijp} = \sum_{q \in V: p \neq q} \min\{0, C_{ij}^{pq}\} \quad j \neq p \text{ e } i \neq q. \quad (4-19)$$

e

$$O_{jip} = \sum_{q \in V: p \neq q} \min\{0, C_{ji}^{pq}\} \quad j \neq q \text{ e } i \neq p. \quad (4-20)$$

Se O_{ijp} e O_{jip} forem ambos não-negativos, a política ótima seria fixar em 0 todas as variáveis y_{ij}^{pq} e y_{ji}^{pq} definidas a partir de p e $[i, j]$. Caso contrário, o somatório de valor mais negativo indicará a direção de passagem de fluxo. Caso isso se aplique ao somatório de valor O_{ijp} , todas as variáveis y_{ij}^{pq} , definidas para (i, j) e p , com $C_{ij}^{pq} < 0$, deverão ser fixadas em 1. Conseqüentemente, todas as variáveis y_{ij}^{pq} com $C_{ij}^{pq} > 0$ e todas as variáveis y_{ji}^{pq} deverão ser fixadas em 0. O inverso deverá ocorrer quando o somatório de valor O_{jip} for o mais negativo.

A análise feita acima indica um caminho para reformular (4-12)–(4-17) de forma a conter explicitamente apenas as variáveis x . Bastaria para tanto contemplar, nos custos a serem associados às variáveis x , as contribuições correspondentes às variáveis y associadas. Pelos argumentos utilizados acima, os custos $\{f_{ij} : [i, j] \in E\}$, a serem associados às variáveis $\{x_{ij} : [i, j] \in E\}$ na reformulação proposta, são dados por:

$$f_{ij} = c_{ij} + \sum_{p \in V} \min(0, O_{ijp}, O_{jip}) \quad \forall [i, j] \in E. \quad (4-21)$$

Dessa forma, o PL(λ) a resolver passa a ser definido da seguinte maneira:

$$z(\lambda) = \min \sum_{[i,j] \in E} f_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{j,q \in V} \sigma_{jq} + \sum_{j,p \in V} \xi_{jp} - \sum_{p,q \in V} D \cdot \alpha_{pq} \quad (4-22)$$

sujeito a:

$$\sum_{[i,j] \in E} x_{ij} = |V| - 1, \quad (4-23)$$

$$\sum_{[i,j] \in E(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset V, |S| > 2, \quad (4-24)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall [i, j] \in E. \quad (4-25)$$

Uma solução ótima \bar{x} para (4-22)–(4-25) define uma árvore geradora de custo mínimo para G (sob os custos $\{f_{ij} : [i, j] \in E\}$).

Definido \bar{x} , pode-se deduzir os valores ótimos correspondentes às variáveis y . Para $[i, j] \in E$, $p, q \in V$, $p \neq q$, $i \neq q$, $j \neq p$, existe uma única possibilidade para que \bar{y}_{ij}^{pq} seja igual a 1 e ocorre quando todas as condições definidas a seguir são satisfeitas:

- $\bar{x}_{ij} = 1$ $[i, j] \in E$;
- $O_{ijp} < 0$ e $O_{ijp} < O_{jip}$; e,
- $C_{ij}^{pq} < 0$.

Analogamente, para $[i, j] \in E$, $p, q \in V$, $p \neq q$, $i \neq p$, $j \neq q$, existe uma única possibilidade para que \bar{y}_{ji}^{pq} seja igual a 1 e ocorre quando todas as condições definidas a seguir são satisfeitas:

- $\bar{x}_{ij} = 1$ $[i, j] \in E$;
- $O_{jip} < 0$, $O_{jip} < O_{ijp}$; e,
- $C_{ji}^{pq} < 0$.

Quando $\bar{x}_{ij} = 1$ $[i, j] \in E$, $O_{ijp} = O_{jip}$ e ambos são negativos, então pode-se escolher qualquer uma das direções para passar fluxo. Escolhida uma das direções, os valores assumidos pelas variáveis y serão atribuídos de acordo com as condições citadas acima.

Observa-se que o PL(λ), definido por (4-22)–(4-25), possui a propriedade de integralidade. Isto porque se as variáveis booleanas x_{ij} forem consideradas como contínuas, ainda assim a formulação resultante define uma MST. As restrições (4-24) são em quantidade exponencial $O(2^{|V|})$, mas este fato não afetará o processo de resolução porque não é necessário usar este modelo explicitamente. Utiliza-se operacionalmente um algoritmo polinomial para o cálculo da MST. Com relação à quantidade de multiplicadores de Lagrange, existem respectivamente $O(|V|^2)$ multiplicadores σ_{jp} , ξ_{jq} e α_{pq} , $O(|V|^3)$ multiplicadores β_{pqj} e $O(|E| \cdot |V|^2)$ multiplicadores δ_{ij}^{pq} .

4.3

Algoritmo de solução

Como mencionado anteriormente, a estratégia empregada para encontrar (aproximar) multiplicadores de Lagrange ótimos é o MS de Held e Karp [39, 41]. Inicialmente, os principais passos, para solucionar a relaxação descrita na Seção 4.2, são apresentados no pseudo-código do Algoritmo 3. Em seguida, os principais procedimentos envolvidos são detalhados. A saída do procedimento do Algoritmo 3 é uma árvore T que corresponde àquela com o melhor limite inferior encontrado ao longo de sua execução.

Inicialmente, na linha 1, um limite superior é calculado utilizando a heurística OTT apresentada na Seção 2.4. Os multiplicadores são inicializados com valores iguais a zero na linha 2.

Algoritmo: Relaxação_lagrangeana()

Entrada: $G = (V, E)$, critério de parada

Saída: T

```

1 Calcular limite superior;
2 Inicializar multiplicadores;
3 repita
4   | Calcular MST;
5   | Calcular limite inferior;
6   | Atualizar variáveis de fluxo;
7   | Calcular subgradientes;
8   | Atualizar multiplicadores de Lagrange;
9   | Calcular custos lagrangeanos;
10  | Calcular custos de utilizar cada direção;
11  | Calcular custos auxiliares;
12  | se quantidade de iterações for atingida então
13  |   | Dividir parâmetro  $\pi$ ;
14  | fim
15 até critério de parada seja satisfeito;
```

Algoritmo 3: Pseudo-código geral para relaxação lagrangeana

O laço das linhas de 3 a 15 é repetido até que o critério de parada seja atingido. O critério utilizado é a quantidade de iterações. Na linha 4, é realizado o cálculo da MST considerando os custos auxiliares f definidos na Equação (4-21). O algoritmo utilizado para o cálculo da MST é o de Kruskal [15]. A partir da solução obtida na linha 4, o cálculo do limite inferior é realizado na linha 5 utilizando a função objetivo (4-22). Na linha 6, as variáveis de fluxo y são atualizadas utilizando os argumentos apresentados na Seção 4.2. Essa atualização é apresentada em detalhes no Algoritmo 4. O cálculo dos subgradientes e atualização dos multiplicadores de Lagrange são realizados respectivamente nas linhas 7 e 8. Essas operações são feitas como descrito na Seção 4.1.1. Os custos lagrangeanos C associados às variáveis de fluxo y são calculados na linha 9 e apresentados nos Algoritmos 5 e 6. Na linha 10, é realizado o cálculo do custo de enviar fluxo nas direções arcos (i, j) ou (j, i) como descrito nas Equações (4-19) e (4-20). Finalmente, os custos auxiliares f são atualizados na linha 11, como especificados na Equação (4-21). Nas linhas 12 e 13 é testado se o parâmetro π deve ser atualizado. Satisfeita esta condição, o parâmetro π é dividido por dois na linha 13.

No Algoritmo 4 é descrito como são escolhidas as variáveis de fluxo y .

```

Algoritmo: Atualizar_fluxo()
Entrada:  $x, O, C$ 
Saída:  $y$ 

1  $y_{ij}^{pq} \leftarrow 0, \forall (i, j) \in A, \forall p, q \in V, p \neq q, i \neq q, j \neq p;$ 
2 para todo  $([i, j] \in E)$  faça
3   se  $(x_{ij} = 1)$  então
4     para todo  $(p \in V)$  faça
5       se  $((O_{ijp} < 0) \text{ e } (O_{ijp} \leq O_{jip}))$  então
6         para todo  $(q \in V), (p \neq q), (q \neq i) \text{ e } (p \neq j)$  faça
7           se  $(C_{ij}^{pq} < 0)$  então
8              $y_{ij}^{pq} \leftarrow 1;$ 
9           fim
10        fim
11       senão
12         se  $((O_{jip} < 0) \text{ e } (O_{jip} < O_{ijp}))$  então
13           para todo  $(q \in V), (p \neq q), (q \neq j) \text{ e } (p \neq i)$ 
14             faça
15               se  $(C_{ji}^{pq} < 0)$  então
16                  $y_{ji}^{pq} \leftarrow 1;$ 
17               fim
18             fim
19           fim
20         fim
21       fim
22 fim

```

Algoritmo 4: Pseudo-código para atualização das variáveis de fluxo.

Este procedimento recebe como parâmetros de entrada uma MST definida sob as variáveis $\{x_{ij} : \forall [i, j] \in E\}$, parâmetros de orientação de fluxo $\{O_{ijp} : \forall (i, j) \in A, \forall p \in V\}$ e os custos lagrangeanos $\{C_{ij}^{pq} : \forall (i, j) \in A, \forall p, q \in V, p \neq q, j \neq p, i \neq q\}$. O procedimento retorna as variáveis de fluxo $\{y_{ij}^{pq} : \forall (i, j) \in A, \forall p, q \in V, p \neq q, j \neq p, i \neq q\}$ atualizadas.

Na linha 1, todas as variáveis de fluxo são inicializadas. O laço das linhas de 2 a 22 é repetido para cada aresta do grafo. Na linha 3, é averiguado se a aresta $[i, j]$ encontra-se na MST. Em caso afirmativo, então para todo nó $p \in V$ (linha 4) é testado se faz sentido passar fluxo com origem em p através do arco (i, j) na linha 5. Satisfeitas as condições especificadas na linha 5, então para cada $q \in V$ (linha 6) é averiguado se o custo lagrangeano C_{ij}^{pq} é negativo na linha 7. Se for, a variável y_{ij}^{pq} assume valor 1 na linha 8. Se a condição da linha 5 não for satisfeita, então (linha 11) é testado se faz sentido passar fluxo com origem em p no arco (j, i) na linha 12. Satisfeitas as condições especificadas na

linha 12, então para cada $q \in V$ (linha 13) é averiguado se o custo lagrangeano C_{ij}^{pq} é negativo na linha 14. Se for, a variável y_{ji}^{pq} assume valor 1 na linha 15.

No pseudo-código iniciado no Algoritmo 5 e encerrado no Algoritmo 6, apresenta-se como são contabilizados os custos lagrangeanos C_{ij}^{pq} associado a cada variável y_{ij}^{pq} . Este procedimento recebe como parâmetros de entrada os multiplicadores de Lagrange $\sigma, \beta, \xi, \alpha, \delta$.

Na linha 1, os custos lagrangeanos $\{C_{ij}^{pq} : (\forall (i, j) \in A, p, q \in V, p \neq q, i \neq q, j \neq p)\}$ são inicializados. Esses custos são associados às variáveis $\{y_{ij}^{pq} : (\forall (i, j) \in A, p, q \in V, p \neq q, i \neq q, j \neq p)\}$, especificadas na Seção 2.3.2. Na linha 2, encontra-se um comentário referente ao laço das linhas de 3 a 9. No laço das linhas de 3 a 9 são contabilizadas, nos respectivos custos lagrangeanos C , os multiplicadores σ associados às variáveis y que fazem parte das restrições (2-33). O laço das linhas de 3 a 9 e os laços internos a este estão aninhados seguindo rigorosamente a sequência de índices indicados na restrição considerada. Outro fato rigorosamente observado é que para um dado C_{ij}^{pq} deve-se considerar que $p \neq q, i \neq q$ e $j \neq p$. Analogamente, nos laços das linhas de 11 a 24, de 26 a 32, de 34 a 40 e de 42 a 49 são contabilizados, nos custos lagrangeanos C considerados, os multiplicadores associados às variáveis y utilizadas respectivamente nas restrições (2-34), (2-35), (2-37) e (2-40). Esses multiplicadores são $\beta, \xi, \alpha, \delta$, respectivamente. Nesses casos, também aninhou-se os laços internos seguindo a sequência de índices indicados na respectiva restrição.

4.4

Experimentos computacionais da relaxação lagrangeana

Para a relaxação lagrangeana proposta, foram realizados experimentos computacionais para calibração dos parâmetros e testes para avaliar a qualidade dos limites inferiores produzidos. Nos experimentos de qualidade dos limites inferiores, os valores da relaxação linear para o modelo multifluxo básico foram obtidos utilizando o resolvidor CPLEX 9.0 em seu modo padrão.

O algoritmo MS foi implementado no Visual Studio 6.0. Os experimentos foram realizados em um Pentium IV com relógio de 2.0 GHz e 512 Mbytes de memória RAM. As instâncias dos Grupos 1, 2 e algumas instâncias do Grupo 3 foram utilizadas nestes experimentos.

4.4.1

Experimentos de calibração dos parâmetros

Na literatura, algumas regras são apresentadas, por exemplo em [9] e [23], para a redução do valor do parâmetro π ao longo das iterações MS. Geralmente,

Algoritmo: Atualizar_custos_lagrangeanos()

Entrada: $\sigma, \beta, \xi, \alpha, \delta$

Saída: C

```

1  $C_{ij}^{pq} \leftarrow 0, \forall (i, j) \in A, p, q \in V, (p \neq q, i \neq q \text{ e } j \neq p)$ ;
2 ‘Contribuição de  $\sigma$  associado a  $y$  nas restrições (2-33)’;
3 para todo ( $j \in V$ ) faça
4   para todo ( $q \in V$ ), ( $q \neq j$ ) faça
5     para todo ( $i \in V$ ),  $((i, j) \in A)$  faça
6        $C_{ji}^{jq} \leftarrow C_{ji}^{jq} - \sigma_{jq}$ ;
7     fim
8   fim
9 fim
10 ‘Contribuição de  $\beta$  associado a  $y$  nas restrições (2-34)’;
11 para todo ( $p \in V$ ) faça
12   para todo ( $q \in V$ ), ( $q \neq p$ ) faça
13     para todo ( $j \in V$ ), ( $j \neq p$ ), ( $j \neq q$ ) faça
14       para todo ( $i \in V$ ),  $((i, j) \in A)$  faça
15         se ( $i \neq q$ ) então
16            $C_{ij}^{pq} \leftarrow C_{ij}^{pq} - \beta_{jpq}$ ;
17         fim
18         se ( $i \neq p$ ) então
19            $C_{ji}^{pq} \leftarrow C_{ji}^{pq} + \beta_{jpq}$ ;
20         fim
21       fim
22     fim
23   fim
24 fim
25 ‘Contribuição de  $\xi$  associado a  $y$  nas restrições (2-35)’;
26 para todo ( $j \in V$ ) faça
27   para todo ( $p \in V$ ), ( $p \neq j$ ) faça
28     para todo ( $i \in V$ ),  $((i, j) \in A)$  faça
29        $C_{ij}^{pj} \leftarrow C_{ij}^{pj} - \xi_{jp}$ ;
30     fim
31   fim
32 fim
33 ‘Contribuição de  $\alpha$  associado a  $y$  nas restrições (2-37)’;
34 para todo ( $p \in V$ ) faça
35   para todo ( $q \in V$ ), ( $p \neq q$ ) faça
36     para todo  $((i, j) \in A)$ , ( $i \neq q$ ), ( $j \neq p$ ) faça
37        $C_{ij}^{pq} \leftarrow C_{ij}^{pq} + \alpha_{pq}$ ;
38     fim
39   fim
40 fim

```

Algoritmo 5: Início do pseudo-código para calcular os custos lagrangeanos C .

```

Algoritmo: Atualizar_custos_lagrangeanos()
Entrada:  $\sigma, \beta, \xi, \alpha, \delta$ 
Saída:  $C$ 

41 ‘Contribuição de  $\delta$  associado a  $y$  nas restrições (2-40)’;
42 para todo  $((i, j) \in A)$  faça
43   para todo  $(p \in V), (j \neq p)$  faça
44     para todo  $(q \in V), (p \neq q), (i \neq q)$  faça
45        $C_{ij}^{pq} \leftarrow C_{ij}^{pq} - \delta_{ij}^{pq};$ 
46        $C_{ji}^{qp} \leftarrow C_{ji}^{qp} + \delta_{ij}^{pq};$ 
47     fim
48   fim
49 fim

```

Algoritmo 6: Continuação do pseudo-código para calcular os custos lagrangeanos C .

o parâmetro π é reduzido à metade após um número fixado de iterações sem uma melhoria global no valor do limite inferior.

O objetivo desses experimentos de calibração é encontrar uma boa relação entre a quantidade de iterações e quando deve-se proceder com a atualização do parâmetro π , como citado acima. Dois tipos de testes de calibração foram realizados. No primeiro experimento, a quantidade total de iterações τ de MS é fixada. O número de iterações τ_π consecutivas, sem uma melhoria no limite global, para redução do valor do parâmetro π é variado. No segundo experimento, a partir das melhores relações adquiridas no primeiro experimento, uma quantidade maior de iterações é fornecida, observando uma adequada atualização para τ_π . Nesses experimentos, foi utilizado um sub-conjunto de instâncias dos Grupos 1, 2 e 3.

No primeiro experimento, sete execuções foram realizadas. Em cada uma dessas execuções $\tau = 500$ e o parâmetro $\pi \in (0, 2]$ tem valor inicial igual a 2. Na primeira execução $\tau_\pi = 10$, na segunda execução $\tau_\pi = 15$ e assim sucessivamente até a última execução, onde $\tau_\pi = 40$. A Tabela 4.1 apresenta a evolução dos limites inferiores do primeiro experimento. Para cada instância estão indicados: o grupo ao qual pertence, a quantidade $|V|$ de vértices, a quantidade $|E|$ de arestas e o valor D do diâmetro nas quatro primeiras colunas.

Os valores das soluções inteiras ótimas são dados para as instâncias dos Grupos 1 e 2 e identificados por O^* . Para os Grupos 1 e 2, esses valores são provenientes respectivamente dos trabalhos [60] e [58]. Para as instâncias do Grupo 3, os melhores limites superiores conhecidos na literatura e apresentados na Seção 2.4.4 estão indicados por “+”. Cada linha corresponde a uma instância diferente. Os valores em negrito correspondem aos melhores limites inferiores encontrados dentre todas as execuções realizadas.

Observa-se neste experimento que existe uma concentração maior de melhores limites inferiores quando $\tau_\pi = 25$ e $\tau_\pi = 30$. Sendo que no Grupo 2, os melhores limites inferiores foram encontrados com valores de τ_π mais variados. A partir desses resultados, gráficos foram feitos para instâncias dos três grupos para observar a convergência dos limites inferiores. São apresentados dois gráficos nas Figuras 4.1 e 4.2 que representam um comportamento próximo ao que foi observado nos outros. Esses gráficos correspondem aos resultados obtidos para a instância do Grupo 1 de 25 nós e ótimo igual a 429. No primeiro e segundo gráficos $\tau_\pi = 10$ e $\tau_\pi = 30$, respectivamente.

No segundo experimento, são realizados testes com a quantidade de iterações variando de 500 a 1000 com incrementos de 100. O valor inicial do parâmetro $\pi \in (0, 2]$ é igual a 2. Duas execuções foram realizadas. Os valores de τ_π foram ajustados de acordo com as melhores relações obtidas no primeiro experimento entre τ e τ_π . No primeiro experimento, observa-se que os melhores limites foram encontrados quando τ_π foi ajustado em 5% e 6% da quantidade de iterações. Então, na primeira execução deste segundo experimento, para $\tau = \{500, 600, 700, \dots, 1000\}$, τ_π foi ajustado respectivamente da seguinte forma: $\tau_\pi = \{25, 30, 35, \dots, 50\}$. Já na segunda execução para $\tau = \{500, 600, 700, \dots, 1000\}$ tem-se respectivamente $\tau_\pi = \{30, 36, 42, \dots, 60\}$.

Nas Tabelas 4.2 e 4.3 estão os resultados respectivamente da primeira e segunda execuções realizadas no segundo experimento. Para cada instância estão indicados: o grupo ao qual pertence, a quantidade $|V|$ de vértices, a quantidade $|E|$ de arestas e o valor D do diâmetro nas quatro primeiras colunas. Os valores da coluna O^* são os mesmos apresentados na Tabela 4.1. Os valores em negrito correspondem aos melhores limites inferiores obtidos.

No segundo experimento, observa-se que melhores resultados foram alcançados que aqueles obtidos no primeiro experimento. A medida que o número de iterações aumenta, melhores são os limites inferiores. Nas duas execuções, ocorre uma concentração de melhores limites inferiores encontrados para $\tau = 1000$. Das 17 instâncias testadas, oito melhores limites inferiores são encontrados na primeira execução, sete melhores limites inferiores são encontrados na segunda e ocorrem dois empates.

<i>Grupo</i>	$ V $	$ E $	D	O^*	Limites inferiores ($\tau = 500$)						
					$\tau_\pi = 10$	$\tau_\pi = 15$	$\tau_\pi = 20$	$\tau_\pi = 25$	$\tau_\pi = 30$	$\tau_\pi = 35$	$\tau_\pi = 40$
1	25	300	4	500	429,93	438,09	439,97	442,35	439,18	435,41	408,92
			5	429	368,95	375,75	378,48	379,83	374,59	375,21	369,44
			6	378	347,19	348,73	350,12	350,82	351,32	350,56	351,65
	40	100	4	755	645,15	649,39	659,74	665,04	653,25	620,23	653,78
			5	729	654,37	660,04	665,74	666,21	667,31	655,38	656,95
			6	599	572,74	574,22	575,57	573,90	574,24	574,72	575,10
2	40	400	5	612	509,86	516,31	516,18	525,30	519,07	519,15	503,94
			7	527	459,10	463,16	462,08	465,42	466,51	463,62	464,13
			9	495	450,00	450,55	451,45	451,91	452,32	452,28	452,75
	40	400	5	253	165,56	165,78	163,32	163,25	163,64	164,01	164,01
			6	171	152,52	152,82	153,23	152,84	152,95	153,01	152,20
			7	154	151,00	151,14	151,25	151,29	151,25	151,29	151,20
3	50	1225	5	7,60 ⁺	5,98	6,13	6,11	6,16	6,19	6,11	6,13
			7,68 ⁺	5,98	6,07	6,17	6,14	6,07	6,15	6,09	
			7,24 ⁺	5,67	5,82	5,90	5,88	5,90	5,90	5,81	
			6,59 ⁺	5,45	5,55	5,57	5,60	5,61	5,55	5,56	
			7,32 ⁺	5,71	5,87	5,90	5,93	5,94	5,85	5,79	

Tabela 4.1: Primeiro experimento de calibração.

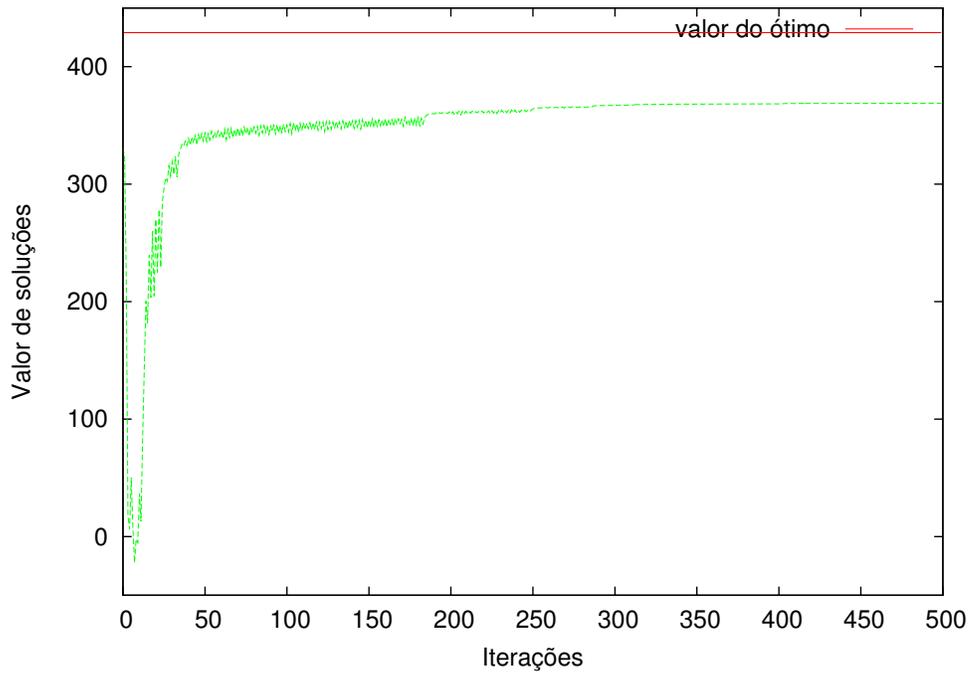


Figura 4.1: Convergência obtida com $\tau_\pi = 10$ e $\tau = 500$.

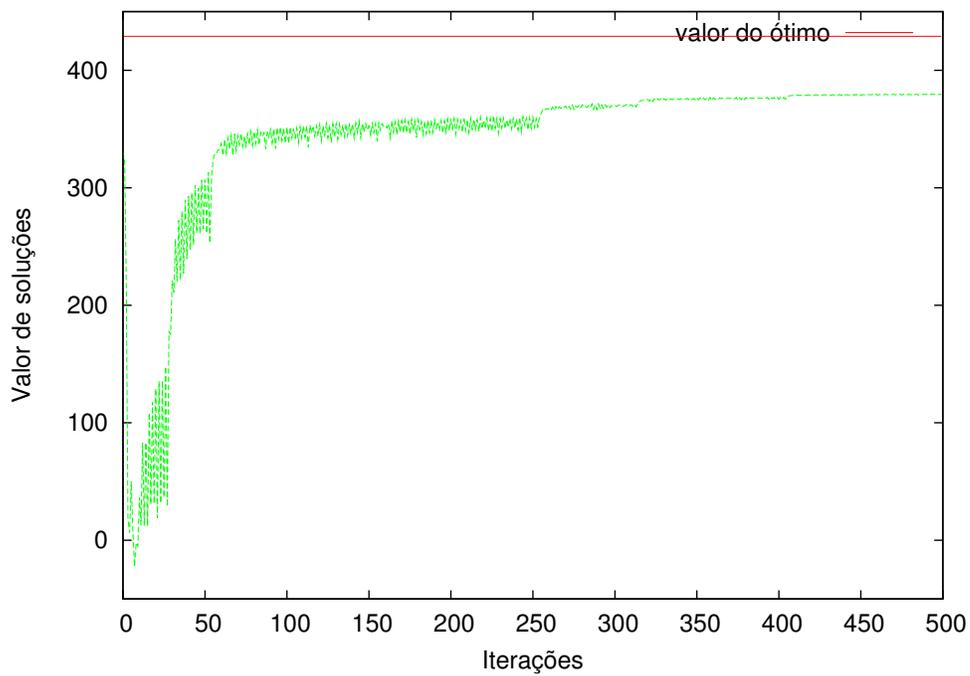


Figura 4.2: Convergência obtida com $\tau_\pi = 25$ e $\tau = 500$.

<i>Grupo</i>	$ V $	$ E $	D	O^*	Limites inferiores					
					$\tau = 500$ e $\tau_\pi = 25$	$\tau = 600$ e $\tau_\pi = 30$	$\tau = 700$ e $\tau_\pi = 35$	$\tau = 800$ e $\tau_\pi = 40$	$\tau = 900$ e $\tau_\pi = 45$	$\tau = 1000$ e $\tau_\pi = 50$
1	25	300	4	500	442,35	444,73	445,23	449,59	453,05	454,90
			5	429	379,83	380,63	382,73	384,57	385,58	383,62
			6	378	350,82	351,95	353,13	354,85	354,38	354,93
	40	100	4	755	665,04	669,17	674,52	674,96	679,95	681,75
			5	729	666,21	670,23	669,02	670,46	674,75	676,44
			6	599	573,90	576,44	577,15	577,60	578,49	578,28
2	40	400	5	612	525,30	527,86	531,28	527,08	534,69	536,18
			7	527	465,42	467,31	465,48	471,15	469,05	473,87
			9	495	451,91	452,51	452,95	453,63	454,20	453,81
	40	400	5	253	163,25	167,71	168,55	169,42	169,46	170,32
			6	171	152,84	153,56	153,26	153,61	153,73	153,83
			7	154	151,29	151,28	151,42	151,51	151,57	151,64
3	50	1225	5	7,60 ⁺	6,16	6,21	6,23	6,19	6,30	6,33
			7,68 ⁺	6,14	6,09	6,21	6,27	6,31	6,33	
			7,24 ⁺	5,88	5,93	6,02	6,00	6,07	6,14	
			6,59 ⁺	5,60	5,63	5,66	5,69	5,72	5,66	
			7,32 ⁺	5,93	5,97	5,96	6,04	6,03	6,07	

Tabela 4.2: Segundo experimento de calibração (primeira execução).

<i>Grupo</i>	$ V $	$ E $	D	O^*	Limites inferiores					
					$\tau = 500$ e $\tau_\pi = 30$	$\tau = 600$ e $\tau_\pi = 36$	$\tau = 700$ e $\tau_\pi = 42$	$\tau = 800$ $\tau_\pi = 48$	$\tau = 900$ $\tau_\pi = 54$	$\tau = 1000$ $\tau_\pi = 60$
1	25	300	4	500	439,18	449,75	439,62	448,23	451,64	450,89
			5	429	374,59	381,41	383,32	386,33	385,39	387,17
			6	378	351,32	351,10	349,85	354,05	351,72	355,46
	40	100	4	755	653,25	659,33	663,62	664,47	679,05	679,83
			5	729	667,31	670,64	670,05	675,68	675,87	677,35
			6	599	574,24	575,25	575,86	578,17	579,61	579,97
2	40	400	5	612	519,07	522,90	525,20	533,87	529,76	531,50
			7	527	466,51	468,75	466,85	472,17	473,90	471,36
			9	495	452,32	452,73	453,47	454,10	455,22	455,72
	40	400	5	253	163,64	164,53	165,57	165,96	169,98	168,00
			6	171	152,95	153,15	153,48	153,66	153,76	152,94
			7	154	151,25	151,40	151,44	151,48	151,61	151,65
3	50	1225	5	7,60 ⁺	6,19	6,14	6,27	6,30	6,22	6,34
				7,68 ⁺	6,07	6,11	6,24	6,25	6,28	6,21
				7,24 ⁺	5,90	5,95	6,04	6,06	6,00	6,02
				6,59 ⁺	5,61	5,58	5,62	5,70	5,72	5,68
				7,32 ⁺	5,94	5,94	5,97	5,99	6,04	6,07

Tabela 4.3: Segundo experimento de calibração (segunda execução).

4.4.2

Experimentos - limite inferior teórico

O objetivo deste experimento é observar se os limites inferiores produzidos pela relaxação lagrangeana aproximam-se dos limites produzidos pela relaxação linear, identificar situações em que o limite teórico é atingido e situações de maior dificuldade de alcançá-lo.

Observados os resultados dos experimentos de calibração dos parâmetros, decidiu-se testar todas as instâncias do Grupo 1 utilizando $\tau = 1000$ e $\tau_\pi = 50$. Utilizou-se este grupo de instâncias por ser o único em que foi possível executar a relaxação linear para algumas instâncias utilizando o CPLEX 9.0 em seu modo padrão sem problemas de memória. O símbolo “_” indica que ocorreram problemas de memória, não sendo possível encerrar a execução. Os resultados encontram-se na Tabela 4.4. São dados para cada instância, a quantidade $|V|$ de vértices, a quantidade $|E|$ de arestas, o valor D do diâmetro e os valores das soluções ótimas O^* . LB indica o valor do limite inferior obtido a partir da relaxação linear ou da relaxação lagrangeana conforme indicado na Tabela 4.4. Os tempos são apresentados em segundos. Neste experimento, $diff.(%)$ é a diferença relativa percentual entre o valor ótimo e o limite inferior, dividido pelo valor do ótimo.

Os resultados da relaxação linear indicam que o modelo multifluxo básico gera limites inferiores menores que 6% do valor ótimo quando $6 \leq D \leq 10$. Para diâmetros pequenos $D \leq 5$, os limites inferiores são menores que 9%. Mesmo com essa limitação para diâmetro pequenos, esses resultados são melhores que os obtidos a partir dos modelos de Achuthan com *lifting*. Entretanto, com este modelo multifluxo básico, dificilmente seria possível provar a otimalidade para instâncias com a mesma quantidade de nós e arestas daquelas resolvidas pelos modelos de Achuthan com *lifting*. A razão é o tamanho dessa formulação. Na Tabela 4.4, pode-se averiguar que mesmo para o cálculo da relaxação linear os tempos de processamento são altos.

Para instâncias com diâmetros $6 \leq D \leq 10$, os limites inferiores obtidos a partir da relaxação lagrangeana estão a menos de 10% do valor ótimo. Já para diâmetros $D \leq 5$, este índice é de menos de 16%. Para aproximar-se mais dos limites teóricos, pode-se executar uma quantidade maior de iterações.

V	E	D	O*	Relaxação linear			Relaxação lagrangeana		
				LB	tempo(s)	diff.(%)	LB	tempo(s)	diff.(%)
10	45	4	252	231,60	121,81	8,09%	224,51	2,73	10,91%
		5	230	221,83	0,95	3,55%	218,73	2,73	4,90%
		6	221	221,00	1,11	0,00%	221,00	2,77	0,00%
		7	203	200,67	2,01	1,15%	198,48	2,90	2,23%
		8	232	232,00	0,86	0,00%	232,00	2,75	0,00%
		9	254	254,00	1,08	0,00%	254,00	2,83	0,00%
		10	254	254,00	1,04	0,00%	254,00	2,73	0,00%
15	105	4	346	326,75	22014,35	5,56%	316,58	28,01	8,50%
		5	331	307,57	17882,81	7,08%	298,57	28,09	9,80%
		6	314	295,81	21761,71	5,79%	286,88	27,98	8,64%
		7	303	286,33	31761,50	5,50%	281,18	27,97	7,20%
		8	240	240,00	14118,93	0,00%	240,00	27,93	0,00%
		9	290	280,00	19149,36	3,45%	277,90	27,94	4,17%
		10	286	279,00	28393,09	2,45%	277,35	27,91	3,02%
20	190	4	349	-	-	-	317,51	132,22	9,02%
		5	414	-	-	-	365,85	131,58	11,63%
		6	298	-	-	-	272,49	131,49	8,56%
		7	333	-	-	-	317,00	131,51	4,80%
		8	331	-	-	-	299,92	131,52	9,39%
		9	327	-	-	-	314,41	131,55	3,85%
		10	324	-	-	-	313,59	131,46	3,21%
25	300	4	500	-	-	-	454,90	363,39	9,02%
		5	429	-	-	-	383,62	363,22	10,58%
		6	378	-	-	-	354,93	363,24	6,10%
		7	408	-	-	-	376,29	362,01	7,77%
		8	369	-	-	-	345,82	361,91	6,28%
		9	336	-	-	-	330,18	361,60	1,73%
		10	379	-	-	-	366,46	361,65	3,31%
20	50	4	442	418,14	51237,50	5,40%	390,55	45,88	11,64%
		5	381	359,17	23041,05	5,73%	339,12	46,02	10,99%
		6	329	325,05	42387,50	1,20%	313,86	45,04	4,60%
		7	362	362,00	8564,79	0,00%	356,88	44,61	1,42%
		8	366	363,75	21,68	0,61%	358,07	45,01	2,17%
		9	362	359,75	17,71	0,62%	357,15	44,97	1,34%
		10	359	357,60	20,00	0,39%	357,01	44,95	0,55%
40	100	4	755	-	-	-	681,75	703,42	9,70%
		5	729	-	-	-	676,44	708,54	7,21%
		6	599	-	-	-	578,28	709,34	3,46%
		7	667	-	-	-	638,38	707,67	4,29%
		8	580	-	-	-	570,81	708,21	1,58%
		9	552	-	-	-	509,99	704,35	7,61%
60	150	5	968	-	-	-	816,33	2763,84	15,67%

Tabela 4.4: Limites inferiores para as instâncias do Grupo 1.

4.5

Conclusões

O modelo multifluxo básico possui um grande número de variáveis e restrições, por isto a relaxação linear consome muito tempo de processamento para calcular limites inferiores. Observa-se que mesmo para instâncias pequenas, em grafos completos de 15 nós e em grafos esparsos de 20 nós e 50 arestas, muito tempo é consumido para calcular os limites inferiores através da relaxação linear. O trabalho realizado no modelo multifluxo básico possibilitou que limites inferiores fossem obtidos a partir de uma relaxação lagrangeana para instâncias com até 60 nós.

Nos experimentos de calibração é possível constatar a influência do parâmetro π e da quantidade de iterações nos valores dos limites inferiores produzidos a partir da relaxação lagrangeana proposta. Observou-se que foram encontrados melhores limites inferiores quando τ_π é igual a 5% e 6% da quantidade total de iterações a serem executadas.

Vale ressaltar que a estratégia utilizada para inferir as variáveis de fluxo pode ser utilizada em outros modelos de fluxo em redes para este problema.