

A Comparação entre os Modelos de Imunização

A essência da pesquisa empírica está na produção e acumulação de evidência para suportar suas conclusões (REMENYI, *et al.* 1998). Nesse sentido, são necessárias as seguintes ações com o objetivo de comparar a eficiência dos modelos de imunização:

- a) Estimar a estrutura a termo das taxas reais de juros (ETTJr) a partir das NTN-C disponíveis em mercado^{xvii}. Em princípio, a ETTJr pode ser obtida de uma forma alternativa, a partir da observação das taxas negociadas no mercado de derivativos, mais especificamente no mercado de *swaps* (DI x IGP-M). Nesses contratos, uma das partes envolvidas aceita trocar os juros acumulados no mercado de DI, durante o período de vigência do acordo, por juros prefixados indexados a uma taxa flutuante (no caso, o IGP-M). A outra parte assume o compromisso inverso. Entretanto, a ETTJr obtida a partir dos títulos do Tesouro Nacional indexados ao IGP-M caracteriza-se, atualmente, como a melhor alternativa. “Dada a carência de derivativos de índices de preços, os rendimentos de títulos públicos federais indexados à inflação representam a única solução para a extração de uma curva de juros reais (FRALETTI, 2004, p. 62)”;
- b) Simular a evolução da ETTJr. Basicamente, o processo envolve a escolha do processo estocástico que descreve a taxa de juros, a calibragem dos parâmetros do processo e a simulação em si, onde são obtidas as trajetórias fictícias das variáveis de interesse;
- c) Construir as carteiras imunizadas a partir da formulação imposta por cada um dos métodos descritos na seção 2.3;
- d) Estimar o valor presente líquido da estratégia para um dado horizonte de investimento, ou seja, a diferença entre os fluxos futuros do ativo e do passivo, descontados pelas taxas obtidas no processo de modelagem da ETTJr (passo b);
- e) Calcular a exposição líquida ao risco, aqui definida como a mediana do desvio absoluto entre o valor presente dos fluxos futuros do ativo e do passivo. A

mediana representa o valor típico da estratégia, tendo sido também a medida de posição escolhida por SOTO (2004) para a comparação entre as estratégias^{xviii};

- f) Avaliar o grau de diversificação da carteira imunizada. A diversificação reduz o risco de liquidez e o risco de alavancagem associado às carteiras compostas por poucos instrumentos financeiros. Em princípio, títulos com maturações distintas (ao invés da concentração em único vencimento) garantem uma maior flexibilidade para o gestor;
- g) Calcular os custos de transação de cada uma das diferentes estratégias;
- h) Estabelecer um peso para cada um dos três indicadores de eficiência – exposição líquida ao risco, diversificação e custos de transação – de forma a viabilizar a classificação ordenada de acordo com os critérios determinados.

A base de dados a ser utilizada é a disponibilizada pela Associação Nacional de Instituições do Mercado Financeiro – ANDIMA, a partir do ano de 2001, com as taxas indicativas de negociação de títulos públicos no mercado secundário. A pesquisa se restringe aos títulos de responsabilidade do Tesouro Nacional passíveis de alocação de acordo com as resoluções CMN 2967/02, CMN 3121/03 e CMN 3305/2005, que impõem os limites a serem respeitados pelas EPC no que diz respeito à aplicação dos recursos referentes às reservas técnicas.

A legislação obriga a correção anual dos valores dos benefícios por um índice de preços, serão utilizados na análise todos os vencimentos disponíveis das Notas do Tesouro Nacional – Série C (NTN-C), títulos indexados ao IGP-M. Ressalta-se que a estratégia de imunização pode ser formatada com qualquer outro título de renda fixa (NTN-B, NTN-Principal, LTN, debêntures, etc). A tabela 3 retrata os títulos utilizados na análise. Os vencimentos originais foram ligeiramente alterados com vistas a simplificar as simulações. Assim, todos os títulos pagam cupons na mesma data. Os preços foram recalculados com base na curva *spot* original interpolada, de tal forma que os fluxos calculados são idênticos aos que de fato ocorreriam na eventual existência dos títulos.

Tabela 3 – Títulos Utilizados

<i>Título</i>	<i>Vencimento Original</i>	<i>Novo Vencimento</i>
NTN-C	01/12/2006	01/10/2006
NTN-C	01/04/2008	01/10/2008
NTN-C	01/03/2011	01/10/2011
NTN-C	01/07/2017	01/10/2017
NTN-C	01/04/2021	01/10/2021
NTN-C	01/01/2031	01/10/2030

Embora o passivo de uma EPC seja corrigido anualmente por um índice de preços, o pagamento de cupons pelas NTN-C é semestral, o que implica um descasamento em favor do ativo. Tal descasamento será tanto mais significativo quanto maior o índice de inflação. Para evitar esse viés, assume-se que o IGP-M acumulado no período entre a formatação da carteira imunizada e o pagamento das obrigações será igual a zero. Os *portfolios* de ativos serão rebalanceados sempre que ocorrer pagamento de cupons dos títulos em carteira.

3.1

Estimando a estrutura a termo da taxa de juros

A primeira dificuldade na gestão do risco de taxa de juros surge durante a estimação da ETTJr. Primeiro, é necessário calcular as taxas à vista a partir de títulos com cupom, já que o mercado brasileiro não conta com títulos sem cupom de longo prazo. Para tanto, foi utilizado a técnica de *bootstrapping* descrita no ponto 2.2. Posteriormente, é preciso obter taxas de juros para uma série de prazos distintos, a partir de apenas alguns pontos (seis no caso dessa tese). Normalmente, utiliza-se algum procedimento de interpolação, o que reduz a estimação da ETTJr a um exercício de cálculo numérico. A interpolação pode ser considerada como um processo para a determinação do valor y de uma função $y = f(x)$, onde o valor de y não pode ser computado diretamente a partir da própria função, mas é determinado por meio de certos valores previamente conhecidos.

Varga (2003) demonstra a superioridade do método baseado em *splines* para o mercado brasileiro. Segundo o autor, as taxas resultantes da utilização do método fazem muito mais sentido econômico do que as obtidas, por exemplo, pela capitalização das taxas a termo ou pela interpolação linear.

As funções *spline* têm sua origem no velho método de aproximação de funções diferenciáveis por meio de aproximações polinomiais. A base desse método é estabelecida pelo Teorema de Weierstrass, que explicita a possibilidade de aproximação de uma função continuamente diferenciável em um determinado intervalo por um polinômio definido nesse mesmo intervalo. Todos os polinômios que se ajustam a uma determinada função formam o que se convencionou denominar base, e a escolha do polinômio de ajuste pode ser baseada, por exemplo, no critério dos mínimos quadrados.

A tendência de maior precisão nos ajustes obtidos a partir da utilização de polinômios de alto grau é acompanhada por um aumento na variância dos parâmetros, tornando o processo de estimação menos confiável. Entretanto, esse tipo de problema pode ser mitigado por meio da aproximação de seções de polinômios por polinômios de menor grau. “Essas funções polinomiais são denominadas funções *spline*, das quais as mais utilizadas são as *splines* cúbicas (SHEA, 1984, p. 256)”.

Para efeito dessa tese, o cômputo das taxas à vista foi realizado por meio da utilização de *cubic splines*. Embora mais trabalhosa, a implementação do *cubic spline* é facilitada sobremaneira pela existência, no MATLAB, de funções predefinidas para a realização dos cálculos. Computadas as taxas à vista é possível obter as taxas a termo e, por conseguinte, iniciar o processo de simulação da ETTJr descrito abaixo.

3.2

Simulando a Evolução da Curva a Termo

Dada a taxonomia e as características básicas dos modelos descritos no ponto 2.2.2, o gestor de recursos poderia indagar se realmente existe um método que deva ser eleito como o mais apropriado para o exame do comportamento futuro das taxas de juros. “Em virtude da profusão de modelos é razoável se questionar se existem considerações, empíricas ou não, que possam motivar a escolha de um modelo (CHEYETTE, 1999)”.

Vários critérios podem ser identificados como necessários a um modelo de estrutura a termo. A princípio, o método deve ter significado econômico, ser implementável e aproximar de forma bastante precisa os preços observados no

momento da análise. Ocorre que não apenas um, mas vários modelos citados preenchem esses requisitos básicos e, portanto, são elegíveis.

Os modelos endógenos são consistentes com o equilíbrio econômico, embora a um alto custo: nem sempre é possível descrever a estrutura a termo vigente. Fitton e McNatt (1999) ressaltam que os modelos de não-arbitragem utilizam uma série de premissas que, embora auxiliem o processo de ajuste dos parâmetros à ETTJr vigente, não necessariamente capturaram a essência da dinâmica da estrutura a termo. Os modelos multifatoriais estão normalmente associados a uma implementação mais lenta e dispendiosa e, portanto, o analista deve examinar criteriosamente o *trade-off* existente, especialmente no caso das taxas apresentarem alto grau de correlação. Nesse caso, a utilização dos modelos unifatoriais pode ser mais interessante. Finalmente, “os modelos normais e lognormais representam os extremos de um processo que, em realidade, parece estar em algum lugar entre esses limites (SANYAL, 1997, p. 55)”.

Para efeito dessa tese, foram considerados os seguintes critérios de escolha, em ordem decrescente de importância:

- a) Facilidade de implementação;
- b) Possibilidade de calibragem do modelo, ou seja, adequação do modelo à ETTJr vigente;
- c) Geração de curvas futuras condizentes com as expectativas de mercado obtidas a partir da estrutura a termo da volatilidade.

Assim, a escolha recaiu sobre o modelo BDT. Embora não necessariamente o mais realista, tal modelo goza de grande aceitação no mercado (LEVIN, 2004) e pode ser implementado de forma relativamente simples (apresenta rotinas de implementação predefinidas em MATLAB). Ademais, o modelo não exige a definição a priori de uma taxa de juros real de equilíbrio, já que o processo de reversão à média não é tratado de forma explícita. Essa característica é bastante importante, na medida em que não existe consenso sobre qual seria essa taxa de equilíbrio no caso brasileiro. O fato da reversão à média ser endógena ao modelo, ou seja, determinada a partir dos parâmetros de entrada, resulta na vantagem adicional de que as taxas de juro não podem tornar-se negativas.

Definido o modelo, faz-se necessária a implementação da simulação da ETTJr *per se*. O modelo BDT foi originalmente derivado em tempo discreto, fazendo uso de uma árvore binomial com probabilidades idênticas de movimentos para cima e para baixo do preço do ativo-objeto. De modo geral, a aproximação discreta para a construção de uma árvore binomial procura aproximar a equação diferencial estocástica do ativo-objeto, tomando-se intervalos de tempo Δt .

Pode-se avaliar um título de qualquer prazo de vencimento, desde que se construa uma árvore de taxas futuras longa o suficiente. O processo começa com o valor de face da obrigação e, a partir daí, vai-se obtendo o preço a cada vértice anterior, descontando os preços futuros usando a taxa daquele nó. Indo para trás, até a raiz da árvore, chega-se ao preço hoje (BESSADA, et al., 2003).

Definido o número de passos, o valor do ativo financeiro é calculado por meio da “indução para trás”. Para cada título do Tesouro foi utilizada uma árvore com 12 passos e estrutura a termo da volatilidade consistente com o horizonte de análise.

Embora a estrutura a termo da volatilidade das taxas de juros vigente seja observável (além de representar um *input* de suma importância do modelo) é interessante confrontar o tipo de variação que se observa no preço do ativo financeiro quando o processo de simulação da ETTJr parte de estruturas a termo da volatilidade distintas. Trata-se de uma ferramenta que garante maior robustez à análise, na medida em que se torna possível testar como o preço dos títulos é afetado por diferentes estruturas de volatilidade. No limite, o que se está tentando observar é como e em que profundidade as diferentes árvores binomiais obtidas irão influenciar o ativo e o passivo da entidade de previdência complementar.

Por simplicidade, adotou-se um modelo *ad hoc* para a volatilidade, desconsiderando-se modelos de volatilidade condicional. O modelo de simulação contempla uma volatilidade da volatilidade, aqui definida como o desvio padrão da volatilidade calculada para períodos subsequentes de 12 meses cada.

Trata-se, portanto, do cálculo do desvio padrão da volatilidade a partir de uma janela móvel com um número fixo de observações. Foram realizadas 1000 simulações para cada um dos títulos disponíveis para aquisição. Para cada simulação foi imputada uma estrutura a termo da volatilidade distinta. Cada ponto dessa estrutura foi calculado a partir de uma distribuição normal com média igual à volatilidade vigente para aquele termo e desvio padrão obtido a partir do

cômputo da volatilidade da volatilidade. Assim, foi possível obter 1000 diferentes preços em t_0 e calcular o efeito líquido sobre cada uma das estratégias de alocação de ativos.

3.3

Cômputo do passivo de uma EPC

Embora o evento morte tenha natureza não-determinística, os fluxos de saída são normalmente tratados como fluxos predeterminados, sendo obtidos a partir da aplicação de tábuas de mortalidade.

Os fluxos, embora não associados a uma EPC específica, são realistas, tendo sido computados por meio da aplicação das tábuas de mortalidade de 2004 para os sexos feminino e masculino, disponibilizadas pelo IBGE.

Tabela 4 – Tábua de Mortalidade - Sexo Feminino – 2004 (Dados Parciais)

<i>Idades Exatas (X)</i>	<i>Probabilidades de Morte entre Duas Idades Exatas $Q(X,N)$ (Por Mil)</i>	<i>Óbitos $D(X,N)$</i>	<i>$l(X)$</i>	<i>$L(X)$</i>	<i>$T(X)$</i>	<i>Expectativa de Vida à Idade X $E(X)$</i>
0	22,61	2261	100000	98018	7554125	75,5
1	2,353	230	97739	97624	7456107	76,3
.	.	.	.	.	.	.
65	16,292	1294	79401	78754	1469742	18,5
66	17,591	1374	78108	77421	1390987	17,8
67	19,065	1463	76734	76002	1313567	17,1
68	20,757	1562	75271	74489	1237565	16,4
69	22,659	1670	73708	72873	1163075	15,8
70	24,708	1780	72038	71148	1090202	15,1
71	26,907	1890	70258	69313	1019054	14,5
72	29,335	2006	68368	67365	949741	13,9
73	32,028	2125	66362	65299	882376	13,3
74	34,988	2248	64237	63113	817076	12,7
75	38,175	2366	61989	60806	753964	12,2
.	.	.	.	.	.	.
80 ou mais	1000	49058	49058	475269	475269	9,7

Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas (DPE), Coordenação de População e Indicadores Sociais

$Q(X, N)$ = Probabilidades de morte entre as idades exatas X e X+N.

$l(X)$ = Número de sobreviventes à idade exata X.

$D(X, N)$ = Número de óbitos ocorridos entre as idades X e X+N.

$L(X, N)$ = Número de pessoas-anos vividos entre as idades X e X+N.

$T(X)$ = Número de pessoas-anos vividos a partir da idade X.

$E(X)$ = Expectativa de vida à idade X.

Tabela 5 – Tábua de Mortalidade - Sexo Masculino – 2004 (Dados Parciais)

<i>Idades Exatas (X)</i>	<i>Probabilidades de Morte entre Duas Idades Exatas $Q(X,N)$ (Por Mil)</i>	<i>Óbitos $D(X,N)$</i>	<i>$l(X)$</i>	<i>$L(X)$</i>	<i>$T(X)$</i>	<i>Expectativa de Vida à Idade X $E(X)$</i>
0	30,41	3041	100000	97372	6790971	67,9
1	2,782	270	96959	96824	6693599	69,0
.	.	.	.	.	.	.
65	25,285	1654	65411	64584	1044134	16,0
66	27,063	1725	63757	62894	979550	15,4
67	29,086	1804	62032	61130	916656	14,8
68	31,416	1892	60227	59281	855526	14,2
69	34,033	1985	58335	57343	796245	13,6
70	36,878	2078	56350	55311	738902	13,1
71	39,885	2165	54272	53190	683591	12,6
72	43,048	2243	52107	50986	630402	12,1
73	46,334	2310	49864	48709	579416	11,6
74	49,771	2367	47554	46370	530707	11,2
75	53,444	2415	45187	43979	484337	10,7
.	.	.	.	.	.	.
80 ou mais	1000	32819	32819	289085	289085	8,8

Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas (DPE), Coordenação de População e Indicadores Sociais $Q(X, N)$ = Probabilidades de morte entre as idades exatas X e X+N.

$l(X)$ = Número de sobreviventes à idade exata X.

$D(X, N)$ = Número de óbitos ocorridos entre as idades X e X+N.

$L(X, N)$ = Número de pessoas-anos vividos entre as idades X e X+N.

$T(X)$ = Número de pessoas-anos vividos a partir da idade X.

$E(X)$ = Expectativa de vida à idade X.

Assume-se que: a) a entidade de previdência complementar concede o benefício da renda vitalícia para um grupo de 500 mulheres e 500 homens, todos com idade igual a 65 anos no momento da aposentadoria; e b) os benefícios não serão revertidos a novos beneficiários após a morte do participante. A data de corte é representada pelo mês de outubro de 2005 e estipulou-se um salário anual fixo e uniforme da ordem de R\$ 50.000,00. O fluxo aproximado de dispêndio da EPC para os próximos dez anos é descrito na tabela 6:

Tabela 6 – Dispêndio da EPC

<i>Ano</i>	<i>Mulheres</i>	<i>Homens</i>	<i>Total</i>
2006	24.592.700,00	24.367.875,00	48.960.575,00
2007	24.152.925,00	23.691.300,00	47.844.225,00
2008	23.676.300,00	22.964.150,00	46.640.450,00
2009	23.157.375,00	22.178.750,00	45.336.125,00
2010	22.590.900,00	21.327.925,00	43.918.825,00
2011	21.973.200,00	20.405.975,00	42.379.175,00
2012	21.300.525,00	19.408.850,00	40.709.375,00
2013	20.567.150,00	18.332.650,00	38.899.800,00
2014	19.766.450,00	17.174.300,00	36.940.750,00
2015	18.891.750,00	15.930.025,00	34.821.775,00

Nota: Dispêndio calculado a partir da multiplicação do montante salarial referente ao grupo de mulheres e de homens pelas probabilidades de sobrevivência descritas nas tabelas 4 e 5, respectivamente.

O passivo de uma EPC pode ser compreendido como um *portfolio* de títulos sem cupom, com vencimentos idênticos aos das datas em que ocorrem os pagamentos dos benefícios aos assistidos (RYAN e FABOZZI, 2002). Portanto, tem-se um índice, formatado pelo atuário da EPC, que retrata a rentabilidade de uma série de títulos. Caberia ao gestor imunizar a carteira de ativos de forma a buscar exatamente a rentabilidade desse índice.

Não obstante, o passivo não será tratado de forma conjunta sob o formato de um único “índice atuarial”, mas como uma série de índices ou horizontes de investimento onde cada pagamento será imunizado individualmente. Realizada dessa forma, a análise permite comparar a evolução das diferenças entre os modelos quando expostos a diferentes horizontes de investimento.

Embora a legislação brasileira (Resolução CNSP nº 104/2004 e Resolução MPAS/CPC nº 1/1978) determine que a contratação de taxa de juros no período de pagamento do benefício deve respeitar o limite máximo de 6% ao ano, o valor presente do fluxo de benefícios será obtido com base na estrutura a termo prevalecente na data da imunização, evitando-se eventual sobra (ou falta) de recursos em decorrência do descasamento entre a taxa atuarial utilizada e a taxa de juros efetivamente observada. A utilização de uma taxa de desconto única não seria conveniente por dois motivos:

- a) A taxa seria arbitrária, podendo ser diferente para planos de pensão com o mesmo risco de crédito e de mercado, inviabilizando eventuais comparações;
- b) Os fluxos de saída não serão necessariamente distribuídos de forma uniforme. A *yield to maturity* é apenas uma taxa “média” utilizada para títulos que oferecem o pagamento de cupons.

3.4

Construindo as carteiras imunizadas

As estratégias de imunização em análise envolvem o exame de um a quatro fatores de risco. Daí o aspecto multidimensional da análise. Basicamente, a construção de uma carteira imunizada envolve dois passos:

- a) o cômputo do vetor de risco dos títulos e, por conseguinte, do *portfolio*:

$$M_{port} = M_i \times p_i \quad (18)$$

onde M_i representa o vetor de risco do título i e p_i o peso desse título na carteira;

- b) a resolução de um problema de otimização.

A otimização, por sua vez, contempla:

- b.1) uma função objetivo que maximiza a diversificação da carteira de ativos nos moldes propostos por Nawalkha (2003) e Soto (2004):

$$\text{Min} \sum_{i=1}^j p_i^2 \quad (19)$$

- b.2) uma restrição que condicione a igualdade do vetor de risco do *portfolio* ao vetor de riscos do passivo;
- b.3) uma restrição que obrigue que o somatório das participações dos títulos presentes na carteira seja igual a 100%.

3.4.1

Carteira baseada em formas funcionais da ETTJr

Os três primeiros parâmetros da caracterização funcional de Nelson e Siegel para a curva de juros – descrita pela equação (10) – podem ser interpretados como a força particular de cada um dos componentes da curva a termo: taxas de curto, médio e longo prazo. No curto prazo, onde m assume valores pequenos, o valor de

$YC(m)$ é função do somatório entre os parâmetros l e s . Nos pontos intermediários da curva a termo, a taxa é influenciada pelos parâmetros l e c . Por fim, o limite do valor de $YC(m)$ à medida que m cresce é dado pelo parâmetro l .

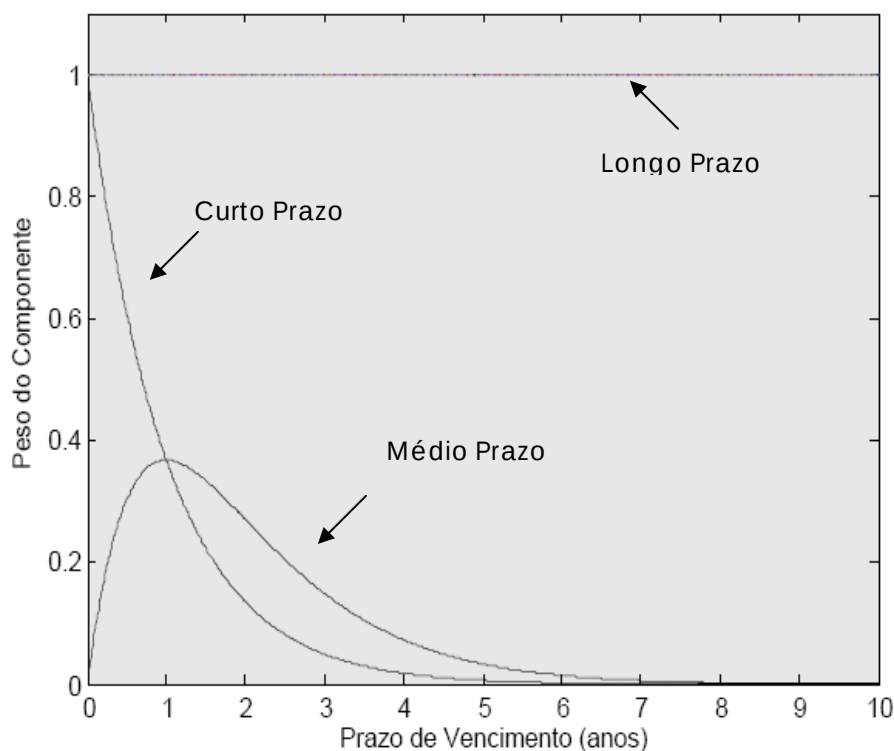


Figura 2 – Componentes da Curva a Termo

Barrett et al. (2004) demonstraram que o ajuste de $YC(m)$ é relativamente insensível à velocidade de convergência, de forma que a análise pode assumir um valor constante para o parâmetro τ . O exame gráfico da ETTJr em vários pontos do tempo fornece indícios de que a curva de juros torna-se aproximadamente plana entre 60 e 120 meses. Dessa forma, adotar-se-á τ igual a 90 meses, uma vez que esse representa o ponto médio do intervalo. Definido o valor de τ é possível ajustar a curva por meio de uma regressão não-linear e obter os valores ótimos para os parâmetros l , s e c . A tabela 7 exhibe os parâmetros e os valores de R^2 para as ETTJr estimadas mensalmente no período compreendido entre outubro de 2002 e setembro de 2005^{xix}:

Tabela 7 – Estatísticas Gerais

Mês	l	s	c	R ²	Mês	l	s	c	R ²
out/02	10,71	(2,15)	2,15	0,93	abr/04	8,30	(0,67)	0,67	0,98
nov/02	11,05	(3,16)	3,15	0,95	mai/04	8,34	(1,51)	1,51	0,90
dez/02	10,21	1,61	(1,60)	0,46	jun/04	8,24	(1,16)	1,16	0,96
jan/03	10,72	(0,33)	0,33	0,51	jul/04	8,08	(0,60)	0,59	0,76
fev/03	10,83	(1,72)	1,72	0,85	ago/04	7,98	0,62	(0,61)	0,71
mar/03	10,67	(0,64)	0,64	0,52	set/04	8,04	0,27	(0,26)	0,24
abr/03	9,98	1,67	(1,68)	0,70	out/04	7,99	0,84	(0,83)	0,80
mai/03	9,52	3,49	(3,48)	0,84	nov/04	8,07	0,99	(1,00)	0,85
jun/03	9,44	3,71	(3,71)	0,86	dez/04	8,08	1,05	(1,06)	0,85
jul/03	9,47	3,62	(3,62)	0,86	jan/05	7,93	2,28	(2,31)	0,85
ago/03	9,56	1,70	(1,69)	0,96	fev/05	8,01	2,83	(2,87)	0,81
set/03	9,51	0,05	(0,05)	0,38	mar/05	8,28	1,90	(1,94)	0,76
out/03	9,33	0,07	(0,07)	0,41	abr/05	8,27	1,48	(1,51)	0,75
nov/03	9,12	(0,37)	0,36	0,65	mai/05	7,97	3,36	(3,43)	0,74
dez/03	8,79	(0,29)	0,29	0,60	jun/05	7,91	3,92	(4,01)	0,73
jan/04	8,38	(0,30)	0,29	0,88	jul/05	7,90	3,96	(4,06)	0,73
fev/04	8,30	(0,06)	0,06	0,18	ago/05	7,59	4,55	(4,64)	0,72
mar/04	8,39	(0,44)	0,44	0,93	set/05	7,72	5,12	(5,22)	0,77

De posse dos parâmetros estimados para setembro de 2005, é possível calcular o vetor de *duration* para cada um dos títulos, tal como descrito em Fernández (1999):

$$D_i = \begin{pmatrix} D_{l,i} \\ D_{s,i} \\ D_{c,i} \\ D_{\tau,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_i} \sum_{t=1}^{v_i} F_{it} t \exp(-r_t t) \\ \frac{1}{P_i} \sum_{t=1}^{v_i} F_{it} \tau \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \exp(-r_t t) \\ \frac{1}{P_i} \sum_{t=1}^{v_i} F_{it} \tau \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \right] \exp(-r_t t) \\ \frac{1}{P_i} \sum_{t=1}^{v_i} F_{it} \left\{ (s+c) - \left[(s+c) \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) + \frac{t^2 c}{\tau^2} \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right\} \exp(-r_t t) \end{pmatrix}$$

onde F_{it} representa o fluxo de caixa do título i no período t . Por último, deve-se formatar a carteira de forma a garantir que a *duration* do *portfolio* seja idêntica à do passivo:

$$D_{passivo} = \begin{pmatrix} D_{l,p} \\ D_{s,p} \\ D_{c,p} \\ D_{\tau,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ \tau \left[1 - \exp\left(-\frac{H}{\tau}\right) \right] \\ \tau \left[1 - \left(1 + \frac{H}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{H}{\tau}\right) \right] \\ (s+c) - \left[(s+c) \left(1 + \frac{H}{\tau}\right) + \frac{H^2 c}{\tau^2} \right] \exp\left(-\frac{H}{\tau}\right) \end{pmatrix}$$

As tabelas 8 a 11 explicitam a composição da carteira imunizada para cada um dos horizontes de análise:

Tabela 8 – Imunização (Fator Único)

Horizonte de Investimento	NTN-C 2006	NTN-C 2008	NTN-C 2011	NTN-C 2017	NTN-C 2021	NTN-C 2031
2006	0,52	0,40	0,25	0,03	(0,07)	(0,14)
2007	0,45	0,35	0,24	0,06	(0,02)	(0,08)
2008	0,38	0,30	0,22	0,09	0,03	(0,02)
2009	0,30	0,26	0,20	0,12	0,08	0,05
2010	0,23	0,21	0,18	0,14	0,13	0,11
2011	0,16	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17
2012	0,08	0,11	0,15	0,20	0,22	0,24
2013	0,01	0,07	0,13	0,23	0,27	0,30
2014	(0,06)	0,02	0,11	0,25	0,32	0,37
2015	(0,14)	(0,03)	0,09	0,28	0,36	0,43

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Willner (1996). O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 9 – Imunização (2 Fatores)

Horizonte de Investimento	NTN-C 2006	NTN-C 2008	NTN-C 2011	NTN-C 2017	NTN-C 2021	NTN-C 2031
2006	0,75	0,36	0,03	(0,17)	(0,10)	0,14
2007	0,50	0,34	0,18	0,01	(0,03)	(0,01)
2008	0,29	0,32	0,31	0,17	0,05	(0,13)
2009	0,09	0,30	0,41	0,30	0,11	(0,22)
2010	(0,08)	0,27	0,49	0,42	0,18	(0,27)
2011	(0,22)	0,23	0,54	0,51	0,24	(0,30)
2012	(0,34)	0,19	0,57	0,58	0,29	(0,30)
2013	(0,44)	0,15	0,58	0,63	0,35	(0,26)
2014	(0,52)	0,10	0,56	0,66	0,39	(0,20)
2015	(0,57)	0,05	0,53	0,67	0,44	(0,12)

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Willner (1996). O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 10 – Imunização (3 Fatores)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	0,91	0,21	(0,14)	(0,05)	0,10	(0,03)
2007	0,45	0,39	0,24	(0,03)	(0,10)	0,05
2008	0,08	0,50	0,52	0,02	(0,20)	0,08
2009	(0,19)	0,54	0,71	0,09	(0,23)	0,08
2010	(0,38)	0,53	0,81	0,19	(0,20)	0,05
2011	(0,51)	0,48	0,84	0,30	(0,11)	(0,00)
2012	(0,57)	0,39	0,81	0,41	0,01	(0,06)
2013	(0,59)	0,28	0,73	0,52	0,17	(0,11)
2014	(0,56)	0,14	0,61	0,63	0,34	(0,16)
2015	(0,51)	(0,01)	0,46	0,72	0,52	(0,19)

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Willner (1996). O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 11 – Imunização (4 Fatores)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	0,97	0,08	(0,09)	0,07	(0,04)	0,01
2007	0,45	0,39	0,24	(0,03)	(0,10)	0,05
2008	0,05	0,56	0,53	(0,11)	(0,07)	0,05
2009	(0,26)	0,70	0,64	(0,05)	(0,06)	(0,26)
2010	(0,38)	0,54	0,81	0,19	(0,19)	(0,38)
2011	(0,53)	0,54	0,82	0,25	(0,05)	(0,02)
2012	(0,57)	0,39	0,81	0,41	0,01	(0,06)
2013	(0,58)	0,27	0,73	0,53	0,16	(0,11)
2014	(0,56)	0,14	0,61	0,63	0,34	(0,16)
2015	(0,32)	(0,42)	0,62	1,10	0,08	(0,07)

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Willner (1996). O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

3.4.2

Carteira baseada na análise dos componentes principais

O primeiro passo para a construção da carteira imunizada baseada na ACP é extrair, do histórico de mudanças das taxas a vista, um pequeno número de componentes principais capazes de explicar a parte máxima da variância dessas mudanças. Para tanto, foram utilizados dados referentes ao período compreendido entre outubro de 2002 e outubro de 2005. O procedimento completo compreende as seguintes etapas: a) cálculo da curva a vista teórica a partir das taxas internas de

retorno dos títulos negociados no primeiro dia útil de cada mês; b) interpolação das taxas utilizando o método de *splines* cúbicas e c) extração dos componentes principais.

Foram selecionados 23 pontos distintos para a ACP, espaçados de forma não uniforme, com maior concentração no curto prazo. A ausência de uniformidade segue os padrões propostos por Barber e Copper (1996) e se justifica pela maior volatilidade da parte inicial da ETTJr:

Tabela 12 – Quatro Primeiros Autovetores

<i>Prazo de Vencimento (em anos)</i>	<i>U1</i>	<i>U2</i>	<i>U3</i>	<i>U4</i>
0,083	0,423	0,887	0,160	0,084
0,166	0,424	0,889	0,145	0,089
0,249	0,431	0,888	0,130	0,094
0,500	0,477	0,869	0,072	0,109
1,000	0,671	0,719	-0,113	0,128
1,500	0,861	0,381	-0,322	0,084
2,000	0,915	0,203	-0,348	-0,008
2,500	0,928	0,270	-0,234	-0,076
3,000	0,904	0,399	-0,069	-0,112
3,500	0,881	0,449	0,066	-0,127
4,000	0,893	0,406	0,143	-0,131
4,500	0,942	0,273	0,150	-0,117
5,000	0,987	0,065	0,103	-0,085
5,500	0,982	-0,163	0,042	-0,044
6,000	0,936	-0,346	0,001	-0,008
6,500	0,882	-0,469	-0,013	0,019
7,000	0,836	-0,547	-0,011	0,037
7,500	0,801	-0,596	0,002	0,050
8,000	0,779	-0,623	0,022	0,058
8,500	0,769	-0,634	0,045	0,062
9,000	0,769	-0,631	0,071	0,064
9,500	0,777	-0,616	0,097	0,064
10,000	0,792	-0,591	0,125	0,062

Nota: Os autovetores correspondem aos coeficientes de cada um dos componentes principais, podendo ser compreendidos como a importância relativa de cada variável em relação ao componente principal.

Tabela 13 – Poder Explanatório do Modelo

<i>Componente</i>	<i>Autovalor</i>	<i>% Variância</i>	<i>% Cumulativo</i>
1	14,897	64,768	64,768
2	7,440	32,346	97,114
3	0,458	1,991	99,105
4	0,157	0,682	99,787

Nota: O autovalor representa a quantidade de variância explicada por um fator. A variância total é igual a 23,00.

As tabelas 14 a 17 explicitam a composição da carteira imunizada para cada um dos horizontes de análise:

Tabela 14 – Imunização (Fator Único)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	0,17	0,20	0,20	0,15	0,16	0,12
2007	0,19	0,34	0,32	0,07	0,15	(0,06)
2008	0,20	0,47	0,44	(0,01)	0,14	(0,24)
2009	0,23	0,73	0,66	(0,16)	0,11	(0,57)
2010	0,23	0,76	0,69	(0,18)	0,11	(0,61)
2011	0,20	0,43	0,40	0,01	0,14	(0,18)
2012	0,15	(0,00)	0,02	0,26	0,18	0,39
2013	0,12	(0,28)	(0,23)	0,43	0,21	0,76
2014	0,10	(0,44)	(0,37)	0,52	0,23	0,96
2015	0,10	(0,46)	(0,39)	0,53	0,23	0,99

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Barber e Cooper (1996). O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 15 – Imunização (2 Fatores)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	0,29	0,01	0,18	0,13	0,41	(0,03)
2007	(0,05)	0,69	0,35	0,09	(0,33)	0,24
2008	0,04	0,72	0,46	0,01	(0,20)	(0,02)
2009	0,84	(0,20)	0,57	(0,23)	1,36	(1,35)
2010	1,00	(0,39)	0,58	(0,26)	1,67	(1,59)
2011	0,14	0,51	0,41	0,02	0,03	(0,11)
2012	(0,66)	1,22	0,14	0,35	(1,47)	1,42
2013	(1,00)	1,40	(0,07)	0,55	(2,06)	2,18
2014	(1,01)	1,24	(0,20)	0,64	(2,03)	2,37
2015	(0,76)	0,83	(0,26)	0,62	(1,51)	2,07

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Barber e Cooper (1996). O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 16 – Imunização (3 Fatores)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	0,66	0,22	(0,18)	(0,13)	0,39	0,03
2007	0,50	1,01	(0,18)	(0,30)	(0,36)	0,34
2008	0,23	0,84	0,27	(0,13)	(0,21)	0,01
2009	0,83	(0,20)	0,58	(0,22)	1,36	(1,35)
2010	0,63	(0,61)	0,94	0,00	1,69	(1,66)
2011	(0,41)	0,19	0,96	0,42	0,06	(0,22)
2012	(1,32)	0,84	0,79	0,83	(1,43)	1,29
2013	(1,72)	0,98	0,65	1,07	(2,02)	2,04
2014	(1,77)	0,80	0,55	1,19	(1,99)	2,23
2015	(1,47)	0,42	0,44	1,13	(1,47)	1,94

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Barber e Cooper (1996). O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 17 – Imunização (4 Fatores)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	0,80	0,07	(0,00)	(0,26)	0,27	0,12
2007	0,10	1,42	(0,67)	0,07	(0,02)	0,10
2008	(0,02)	1,10	(0,04)	0,10	(0,00)	(0,14)
2009	(0,18)	0,87	(0,68)	0,73	2,22	(1,97)
2010	0,10	(0,04)	0,27	0,51	2,14	(1,98)
2011	(0,01)	(0,24)	1,46	0,04	(0,28)	0,03
2012	(0,63)	0,12	1,64	0,18	(2,02)	1,71
2013	(1,08)	0,30	1,45	0,46	(2,56)	2,43
2014	(1,25)	0,25	1,20	0,69	(2,43)	2,55
2015	(1,20)	0,14	0,77	0,88	(1,70)	2,10

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Barber e Cooper (1996). O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

3.4.3

Carteira baseada em choques arbitrários

Definido o vetor M generalizado para título i , ou seja, uma série de medidas de risco de imunização de ordem m é possível calcular o risco de mesma ordem do *portfolio*:

$$\sum_{i=1}^j p_i M_i^m = 0 \quad (20)$$

onde j representa o número de títulos disponíveis e p_i a proporção de cada título na carteira. Isso equivale à construção das seguintes restrições para o processo de imunização:

$$\begin{pmatrix} D(1) \\ D(2) \\ D(3) \\ D(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_i} \sum_{t=1}^n C_t W_t g(t) \\ \frac{1}{P_i} \sum_{t=1}^{v_i} C_t W_t g(t)^2 \\ \frac{1}{P_i} \sum_{t=1}^{v_i} C_t W_t g(t)^3 \\ \frac{1}{P_i} \sum_{t=1}^{v_i} C_t W_t g(t)^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(H) \\ g(H)^2 \\ g(H)^3 \\ g(H)^4 \end{pmatrix}$$

Foram adotados 4 modelos, cada um deles com um parâmetro α distinto: 0,25; 0,50; 0,75 e 1. As tabelas 18 a 33 explicitam a composição da carteira imunizada para cada um dos horizontes de análise:

Tabela 18 – Imunização Fator Único ($\alpha = 0,25$)

Horizonte de Investimento	NTN-C 2006	NTN-C 2008	NTN-C 2011	NTN-C 2017	NTN-C 2021	NTN-C 2031
2006	0,75	0,36	0,18	(0,04)	(0,11)	(0,15)
2007	0,45	0,26	0,18	0,07	0,04	0,02
2008	0,25	0,19	0,17	0,14	0,13	0,12
2009	0,09	0,14	0,16	0,19	0,20	0,21
2010	(0,04)	0,10	0,16	0,24	0,26	0,28
2011	(0,15)	0,06	0,16	0,28	0,32	0,34
2012	(0,25)	0,03	0,15	0,31	0,36	0,39
2013	(0,33)	(0,00)	0,15	0,34	0,40	0,44
2014	(0,41)	(0,03)	0,15	0,37	0,44	0,48
2015	(0,49)	(0,05)	0,15	0,40	0,47	0,52

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 19 – Imunização 2 Fatores ($\alpha = 0,25$)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	1,07	(0,09)	(0,00)	(0,05)	0,02	0,05
2007	0,06	0,81	0,40	0,08	(0,12)	(0,23)
2008	(0,49)	1,21	0,60	0,17	(0,17)	(0,33)
2009	(0,83)	1,42	0,70	0,23	(0,17)	(0,36)
2010	(1,06)	1,53	0,76	0,28	(0,15)	(0,35)
2011	(1,23)	1,57	0,79	0,32	(0,12)	(0,33)
2012	(1,35)	1,57	0,80	0,36	(0,09)	(0,29)
2013	(1,43)	1,53	0,79	0,39	(0,04)	(0,24)
2014	(1,49)	1,48	0,78	0,42	0,00	(0,18)
2015	(1,53)	1,41	0,76	0,44	0,05	(0,12)

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 20 – Imunização 3 Fatores ($\alpha = 0,25$)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	1,07	(0,21)	0,16	0,03	0,04	(0,08)
2007	0,03	6,92	(7,49)	(3,96)	(0,90)	6,40
2008	(0,50)	5,32	(4,71)	(2,55)	(0,69)	4,13
2009	(0,85)	7,83	(7,58)	(4,00)	(0,98)	6,58
2010	(1,09)	10,37	(10,66)	(5,56)	(1,27)	9,22
2011	(1,27)	12,96	(13,93)	(7,21)	(1,57)	12,02
2012	(1,40)	15,62	(17,36)	(8,93)	(1,87)	14,94
2013	(1,49)	18,34	(20,93)	(10,72)	(2,18)	17,98
2014	(1,56)	21,12	(24,61)	(12,57)	(2,49)	21,11
2015	(1,61)	23,96	(28,39)	(14,47)	(2,81)	24,33

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 21 – Imunização 4 Fatores ($\alpha = 0,25$)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	1,04	(0,28)	0,45	(0,25)	(0,10)	0,14
2007	(2,97)	(1,40)	25,64	(35,53)	(17,12)	32,39
2008	(5,92)	(9,66)	55,00	(59,47)	(29,94)	50,98
2009	(1,50)	6,05	(0,47)	(10,78)	(4,46)	12,16
2010	(3,91)	2,58	20,35	(35,12)	(16,46)	33,56
2011	(7,29)	(3,70)	52,44	(70,48)	(34,08)	64,10
2012	(11,66)	(12,78)	95,82	(116,82)	(57,30)	103,75
2013	(17,04)	(24,66)	150,44	(174,07)	(86,10)	152,43
2014	(23,41)	(39,31)	216,20	(242,12)	(120,43)	210,05
2015	(30,77)	(56,69)	293,02	(320,85)	(160,22)	276,51

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 22 – Imunização Fator Único ($\alpha = 0,50$)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	0,66	0,39	0,20	(0,02)	(0,10)	(0,14)
2007	0,48	0,31	0,19	0,05	0,00	(0,03)
2008	0,34	0,24	0,18	0,10	0,08	0,06
2009	0,22	0,19	0,17	0,15	0,14	0,14
2010	0,11	0,14	0,16	0,19	0,20	0,20
2011	0,02	0,10	0,16	0,22	0,25	0,26
2012	(0,07)	0,06	0,15	0,26	0,29	0,31
2013	(0,15)	0,02	0,14	0,29	0,34	0,37
2014	(0,23)	(0,01)	0,14	0,32	0,38	0,41
2015	(0,30)	(0,05)	0,13	0,34	0,42	0,46

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 23 – Imunização 2 Fatores ($\alpha = 0,50$)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	0,93	0,18	(0,07)	(0,13)	(0,03)	0,12
2007	0,01	0,67	0,66	0,23	(0,11)	(0,47)
2008	0,00	0,50	0,51	0,23	0,00	(0,25)
2009	(0,24)	0,55	0,63	0,33	0,03	(0,30)
2010	(0,42)	0,56	0,70	0,39	0,07	(0,30)
2011	(0,54)	0,54	0,72	0,44	0,12	(0,27)
2012	(0,63)	0,50	0,71	0,47	0,16	(0,22)
2013	(0,69)	0,44	0,68	0,49	0,21	(0,14)
2014	(0,72)	0,37	0,63	0,51	0,26	(0,05)
2015	(0,73)	0,29	0,56	0,51	0,32	0,05

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 24 – Imunização 3 Fatores ($\alpha = 0,50$)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	1,01	0,02	(0,05)	0,02	0,05	(0,04)
2007	(0,13)	1,48	0,19	(0,84)	(0,59)	0,90
2008	(0,23)	1,01	0,46	(0,21)	(0,27)	0,24
2009	(0,47)	1,05	0,58	(0,11)	(0,23)	0,18
2010	(0,62)	0,99	0,65	0,02	(0,15)	0,11
2011	(0,69)	0,86	0,68	0,15	(0,05)	0,04
2012	(0,73)	0,72	0,69	0,28	0,05	(0,00)
2013	(0,74)	0,56	0,67	0,38	0,15	(0,02)
2014	(0,74)	0,41	0,63	0,47	0,24	(0,01)
2015	(0,72)	0,28	0,57	0,52	0,32	0,04

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 25 – Imunização 4 Fatores ($\alpha = 0,50$)

Horizonte de Investimento	NTN-C 2006	NTN-C 2008	NTN-C 2011	NTN-C 2017	NTN-C 2021	NTN-C 2031
2006	1,02	(0,08)	0,07	0,00	(0,04)	0,02
2007	(0,78)	5,45	(5,18)	(0,18)	3,17	(1,48)
2008	(0,04)	(0,17)	2,06	(0,41)	(1,39)	0,95
2009	(0,56)	1,56	(0,11)	(0,03)	0,25	(0,12)
2010	(0,69)	1,44	0,04	0,10	0,28	(0,16)
2011	(0,77)	1,31	0,08	0,23	0,37	(0,22)
2012	(0,81)	1,22	0,02	0,36	0,52	(0,30)
2013	(0,84)	1,17	(0,15)	0,49	0,72	(0,38)
2014	(0,86)	1,17	(0,39)	0,59	0,95	(0,46)
2015	(0,88)	1,21	(0,69)	0,68	1,20	(0,52)

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 26 – Imunização Fator Único ($\alpha = 0,75$)

Horizonte de Investimento	NTN-C 2006	NTN-C 2008	NTN-C 2011	NTN-C 2017	NTN-C 2021	NTN-C 2031
2006	0,59	0,40	0,23	0,01	(0,08)	(0,14)
2007	0,47	0,34	0,21	0,05	(0,01)	(0,06)
2008	0,37	0,28	0,20	0,09	0,05	0,02
2009	0,27	0,23	0,18	0,13	0,10	0,09
2010	0,18	0,18	0,17	0,16	0,16	0,15
2011	0,10	0,13	0,16	0,19	0,21	0,22
2012	0,02	0,08	0,14	0,22	0,25	0,28
2013	(0,06)	0,04	0,13	0,25	0,30	0,33
2014	(0,14)	(0,00)	0,12	0,28	0,35	0,39
2015	(0,21)	(0,04)	0,11	0,31	0,39	0,44

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 27 – Imunização 2 Fatores ($\alpha = 0,75$)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	0,83	0,29	(0,03)	(0,16)	(0,08)	0,14
2007	0,47	0,34	0,22	0,05	(0,01)	(0,06)
2008	0,19	0,36	0,39	0,21	0,04	(0,19)
2009	(0,03)	0,36	0,50	0,33	0,10	(0,26)
2010	(0,21)	0,35	0,58	0,43	0,15	(0,29)
2011	(0,35)	0,33	0,62	0,49	0,20	(0,30)
2012	(0,46)	0,30	0,64	0,54	0,24	(0,27)
2013	(0,54)	0,25	0,63	0,58	0,29	(0,21)
2014	(0,59)	0,20	0,60	0,59	0,34	(0,13)
2015	(0,62)	0,14	0,54	0,59	0,38	(0,03)

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 28 – Imunização 3 Fatores ($\alpha = 0,75$)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	0,96	0,13	(0,12)	(0,01)	0,08	(0,03)
2007	0,26	0,61	0,37	(0,19)	(0,27)	0,22
2008	(0,04)	0,65	0,55	(0,06)	(0,23)	0,13
2009	(0,29)	0,70	0,69	0,03	(0,22)	0,10
2010	(0,45)	0,67	0,76	0,14	(0,15)	0,04
2011	(0,54)	0,58	0,77	0,27	(0,04)	(0,03)
2012	(0,58)	0,46	0,73	0,40	0,09	(0,10)
2013	(0,58)	0,31	0,66	0,52	0,24	(0,15)
2014	(0,55)	0,15	0,57	0,64	0,38	(0,19)
2015	(0,50)	(0,01)	0,46	0,73	0,53	(0,19)

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 29 – Imunização 4 Fatores ($\alpha = 0,75$)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	1,00	0,01	(0,03)	0,04	(0,03)	0,01
2007	(0,20)	2,02	(0,73)	(0,88)	1,06	(0,27)
2008	(0,08)	0,77	0,46	(0,11)	(0,12)	0,09
2009	(0,40)	1,02	0,44	(0,13)	0,08	(0,01)
2010	(0,48)	0,75	0,69	0,10	(0,07)	0,01
2011	(0,50)	0,44	0,87	0,33	(0,17)	0,02
2012	(0,48)	0,15	0,96	0,55	(0,19)	0,01
2013	(0,46)	(0,07)	0,96	0,71	(0,12)	(0,02)
2014	(0,43)	(0,22)	0,86	0,82	0,03	(0,06)
2015	(0,42)	(0,28)	0,67	0,86	0,27	(0,10)

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 30 – Imunização Fator Único ($\alpha = 1$)

<i>Horizonte de Investimento</i>	<i>NTN-C 2006</i>	<i>NTN-C 2008</i>	<i>NTN-C 2011</i>	<i>NTN-C 2017</i>	<i>NTN-C 2021</i>	<i>NTN-C 2031</i>
2006	0,52	0,40	0,25	0,03	(0,07)	(0,14)
2007	0,45	0,35	0,24	0,06	(0,02)	(0,08)
2008	0,38	0,30	0,22	0,09	0,03	(0,02)
2009	0,30	0,26	0,20	0,12	0,08	0,05
2010	0,23	0,21	0,18	0,14	0,13	0,11
2011	0,16	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17
2012	0,08	0,11	0,15	0,20	0,22	0,24
2013	0,01	0,07	0,13	0,23	0,27	0,30
2014	(0,06)	0,02	0,11	0,25	0,32	0,37
2015	(0,14)	(0,03)	0,09	0,28	0,36	0,43

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 31 – Imunização 2 Fatores ($\alpha = 1$)

Horizonte de Investimento	NTN-C 2006	NTN-C 2008	NTN-C 2011	NTN-C 2017	NTN-C 2021	NTN-C 2031
2006	0,73	0,37	0,05	(0,17)	(0,11)	0,14
2007	0,51	0,34	0,18	0,01	(0,03)	(0,00)
2008	0,30	0,32	0,29	0,16	0,05	(0,12)
2009	0,12	0,29	0,38	0,30	0,12	(0,20)
2010	(0,04)	0,25	0,45	0,41	0,19	(0,26)
2011	(0,19)	0,22	0,50	0,51	0,26	(0,29)
2012	(0,31)	0,18	0,54	0,58	0,32	(0,30)
2013	(0,41)	0,13	0,55	0,64	0,37	(0,27)
2014	(0,49)	0,09	0,54	0,67	0,42	(0,22)
2015	(0,56)	0,04	0,51	0,69	0,46	(0,14)

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 32 – Imunização 3 Fatores ($\alpha = 1$)

Horizonte de Investimento	NTN-C 2006	NTN-C 2008	NTN-C 2011	NTN-C 2017	NTN-C 2021	NTN-C 2031
2006	0,90	0,23	(0,14)	(0,06)	0,10	(0,03)
2007	0,43	0,40	0,26	(0,04)	(0,12)	0,06
2008	0,11	0,47	0,51	0,04	(0,20)	0,07
2009	(0,17)	0,51	0,70	0,12	(0,24)	0,07
2010	(0,37)	0,51	0,81	0,21	(0,21)	0,05
2011	(0,50)	0,47	0,85	0,31	(0,14)	0,01
2012	(0,58)	0,39	0,83	0,42	(0,02)	(0,04)
2013	(0,60)	0,28	0,75	0,52	0,13	(0,09)
2014	(0,58)	0,16	0,63	0,62	0,31	(0,14)
2015	(0,53)	0,02	0,48	0,70	0,50	(0,17)

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

Tabela 33 – Imunização 4 Fatores ($\alpha = 1$)

Horizonte de Investimento	NTN-C 2006	NTN-C 2008	NTN-C 2011	NTN-C 2017	NTN-C 2021	NTN-C 2031
2006	0,97	0,09	(0,10)	0,08	(0,05)	0,01
2007	0,20	0,87	0,12	(0,51)	0,38	(0,06)
2008	(0,04)	0,78	0,42	(0,27)	0,12	(0,01)
2009	(0,32)	0,83	0,61	(0,20)	0,10	(0,01)
2010	(0,44)	0,66	0,76	0,06	(0,05)	0,01
2011	(0,47)	0,40	0,87	0,38	(0,21)	0,03
2012	(0,43)	0,10	0,91	0,71	(0,32)	0,04
2013	(0,37)	(0,19)	0,90	1,00	(0,37)	0,04
2014	(0,29)	(0,43)	0,81	1,21	(0,32)	0,02
2015	(0,23)	(0,60)	0,66	1,32	(0,16)	(0,00)

Nota: Imunização baseada no modelo proposto por Nawalkha et al. (2003). O valor de α representa o expoente do prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

3.5

Indicadores de eficiência

As diferentes estratégias de imunização serão comparadas por meio da ponderação de três indicadores de eficiência distintos: exposição líquida ao risco, diversificação e custos de transação.

Basicamente, existem duas formas de se conduzir a análise: a) calculando-se os valores futuros das carteiras em cada momento (de t_0 até t_n) e comparando-os ao montante necessário para o pagamento dos benéficos de responsabilidade da EPC; b) computando o valor presente líquido das carteiras (valor presente dos ativos menos valor presente do passivo) nos moldes propostos por Serpa (2003).

A primeira perspectiva normalmente está associada à comparação da rentabilidade do *portfolio* ao retorno necessário para o pleno cumprimento das obrigações da EPC. Esse tipo de indicador parece apropriado ao exame em questão, uma vez que a construção de carteiras imunizadas representa a busca pela obtenção de uma taxa de retorno idêntica à do *benchmark*, que nesse caso é representado pelo passivo da EPC.

Ocorre que a formatação da análise sob essa perspectiva aumenta significativamente o número de simulações necessárias a cada período que se acrescenta ao horizonte de investimento. Isso acaba por praticamente inviabilizar

a análise para horizontes de médio e longo prazo^{xx}, reduzindo a viabilidade de sua utilização em estudos que envolvam entidades de previdência.

Nesse caso, a segunda alternativa mostra-se mais apropriada e será a utilizada nessa tese. O cômputo do valor presente líquido da estratégia reduz o volume de simulações e concentra toda a análise em t_0 , através do cômputo de um indicador de erro de aderência ex-ante^{xxi}, que penaliza simetricamente desvios negativos ou positivos. Infelizmente, esse benefício é acompanhado por um custo. Sob essa perspectiva, não é possível calcular o custo de transação de forma direta, o que exige a adoção de uma *proxy*.

3.5.1

Exposição líquida ao risco

O primeiro indicador de eficiência, a exposição líquida ao risco – ELR, é aqui definido como a mediana do desvio absoluto entre o valor presente dos fluxos futuros do ativo e do passivo, descontados pelas taxas obtidas no processo de modelagem da ETTJr. A primeira coluna das tabelas 1 a 10 do apêndice A explicita a mediana da ELR dos *portfolios* associados às distintas possibilidades de imunização para cada um dos dez horizontes de investimento selecionados. Os dados são relativos e a base de comparação é o valor obtido por meio da estratégia de imunização tradicional (idêntica à imunização com apenas um fator baseada em formas funcionais da ETTJr).

3.5.2

Diversificação

As carteiras imunizadas obtidas apresentarão graus distintos de diversificação. As restrições adicionais impostas à otimização pelos modelos não-tradicionais de imunização terão como provável consequência uma menor diversificação da carteira e uma maior alavancagem – utilização de vendas a descoberto (que podem ser parcialmente replicadas por meio da utilização de derivativos, embora esses instrumentos não façam parte da análise contida nessa tese).

Nawalkha (1995) sugere que opções de venda de títulos podem substituir as posições vendidas. Infelizmente, tais opções ainda não estão disponíveis no mercado brasileiro, embora exista a intenção do Tesouro Nacional e do Banco Central do Brasil em adotar o mecanismo, de forma a revitalizar o mercado secundário de títulos públicos, reduzindo o custo de financiamento da dívida pública mobiliária federal interna^{xxii}.

Existem alternativas representadas por contratos de *swap* (DI x IGP-M) e contratos futuros de cupom de IGP-M. Ambos podem ser realizados de forma segura e relativamente simples na Bolsa de Mercadorias e Futuros – BM&F.

Entretanto, ao incluir instrumentos derivativos, o gestor estará agregando novos fatores de risco à sua carteira. “Não há dúvida que derivativos, pelo seu poder de alavancagem, podem, introduzidos numa carteira de aplicações financeiras, aumentar o risco dessa carteira (CARVALHO, 2002, p. 37)”.

Além do risco de base, devem ser levados em consideração a dificuldade em se realizar contratos durante o prazo e no montante necessários à estratégia, dados os limites impostos pela BM&F, e a eventual incapacidade de replicar a operação nos moldes requeridos^{xxiii}.

Assim, o segundo indicador de eficiência será representado pela soma dos quadrados dos pesos de cada ativo no *portfolio*. Uma média da soma dos quadrados alta representa um forte indício de dificuldade na construção da carteira com o nível de restrições imposto. O indicador está expresso na segunda coluna das tabelas 1 a 10 do apêndice A.

3.5.3

Custos de transação

Os custos de transação são formados por um componente fixo, a corretagem, e por um componente variável, a diferença entre o preço de compra e de venda de um título (*bid-ask spread*). A parcela fixa dos custos de transação é representada pelo custo de utilização do sistema especial de liquidação e custódia (SELIC) acrescido de um spread cobrado pela instituição financeira.

Normalmente, trata-se de um custo pouco significativo. A parte variável depende basicamente das condições de mercado, sendo comum verificar um

incremento em situações de estresse, o que pode tornar o “rebalanceamento” de carteiras pouco diversificadas ainda mais oneroso.

O cenário base – conservador – refere-se à média do *bid-ask spread* verificada no ano de 2005, na compra e venda de títulos efetuada pelo Tesouro Nacional no ambiente do Tesouro Direto.

Para efeito do cômputo do custo de transação total, serão acrescentados 0,00035% por transação, referente aos valores devidos pelos participantes do SELIC, relativos à custódia de títulos.

Conforme descrito em 3.5, existe a necessidade de se calcular os custos de transação de forma indireta. Nesse sentido, tais custos serão obtidos a partir do custo associado à transformação da carteira imunizada com base no horizonte de investimento subsequente ao horizonte no qual se apura o custo na carteira referente a este horizonte.

Assim, por exemplo, o custo de transação referente a cada uma das carteiras em 2006 será igual a duas vezes (rebalanceamento semestral) o custo de transformação do *portfolio* de 2007 no *portfolio* de 2006, e assim sucessivamente. Para o exercício de 2005 (ano de formação das carteiras) e 2015 (ano de encerramento das carteiras), assume-se igualdade nos custos associados à formação das carteiras. Os custos de transação estão dispostos na terceira coluna das tabelas 1 a 10 do apêndice A.

3.6

Eficiência média ponderada

Finalmente, é preciso definir a ponderação de cada um dos três indicadores de eficiência. A decisão sobre o peso de cada um dos indicadores é de suma importância, uma vez que a mesma deve levar em consideração as idiosincrasias de cada EPC e seus efeitos sobre a administração de recursos da entidade. Embora exista um número ilimitado de possibilidades a serem definidas pelo gestor, foram adotadas três alternativas distintas de ponderação as quais denominaremos cenários I, II e III, respectivamente.

No cenário I, a ponderação da exposição líquida ao risco, da diversificação e do custo de transação é de 70%, 25% e 5%, respectivamente. Os cenários II e III negligenciam os custos de transação e a ponderação foi fixada em 70/30 e 50/50,

respectivamente. Os pesos associados a cada um dos indicadores de eficiência foram escolhidos de forma *ad hoc*, baseados em uma percepção preliminar do que seria razoável do ponto de vista do gestor de uma EPC. Entretanto, as entidades de previdência complementar têm perfil bastante heterogêneo, o que certamente irá se refletir sobre a forma de ponderação do gestor no que diz respeito aos indicadores e, por conseguinte, sobre os resultados de cada estratégia de imunização. Dessa forma, é fundamental que se compreenda que os resultados apresentados devem ser analisados sob uma perspectiva mais ampla, que contemple diretrizes individuais das EPC para a gestão do risco de taxa de juros.

A tabela 34 retrata os modelos mais eficientes de acordo com cada um dos três cenários, além de explicitar o modelo com menor exposição líquida ao risco, maior diversificação e menor custo de transação.

Tabela 34 – Modelos Mais Eficientes

Ano	ELR	Diversificação	CT	Cenário I	Cenário II	Cenário III
2006	CA 3 (0,75)	ACP 1	EXP 1	EXP 4	CA 4 (0,75)	ACP 1
2007	EXP 2	ACP 1	EXP 1	CA 1 (0,50)	CA 1 (0,50)	CA 1 (0,50)
2008	CA 1 (0,75)	CA 1 (0,25)	EXP 1	CA 1 (0,75)	CA 1 (0,75)	CA 1 (0,50)
2009	EXP 1	CA 1 (0,50)	ACP 1	EXP 1	EXP 1	EXP 1
2010	EXP 1	CA 1 (0,75)	EXP 1	EXP 1	EXP 1	CA 1 (0,75)
2011	ACP 2	EXP 1	CA 2 (0,25)	EXP 1	EXP 1	EXP 1
2012	ACP 1	EXP 1	CA 1 (0,25)	EXP 1	EXP 1	EXP 1
2013	CA 3 (0,50)	EXP 1	CA 1 (0,25)	EXP 1	EXP 1	EXP 1
2014	CA 3 (0,50)	EXP 1	ACP 1	EXP 1	EXP 1	EXP 1
2015	EXP 1	EXP 1	EXP 1	EXP 1	EXP 1	EXP 1

Nota: Os termos EXP, ACP e CA correspondem aos modelos de imunização baseados em Willner (1996), Barber e Cooper (1996) e Nawalkha et al. (2003), respectivamente. O número associado a cada termo representa a quantidade de fatores. Os valores decimais entre parênteses representam o valor de α escolhido para os modelos baseados em choques arbitrários. Os termos ELR e CT correspondem à exposição líquida ao risco e o custo de transação respectivamente. O modelo exponencial de um fator (EXP 1) é idêntico à imunização tradicional.

A análise pormenorizada dos resultados permite várias conclusões. Levando-se em consideração apenas a exposição líquida ao risco, o efeito dimensionalidade não foi verificado em todo o horizonte de estudo. Em metade dos dez anos (2008, 2009, 2010, 2012 e 2015), modelos de apenas um fator se mostraram mais eficientes. Apenas no curto prazo, há evidências inequívocas de que a dimensão, até o limite de três fatores, é um elemento de redução de risco. A importância das variações não paralelas da ETTJ diminui sensivelmente no médio e longo prazo (ver tabela 12). Assim, as conclusões obtidas por Soto (2004) e

Bravo e da Silva (2006) devem ser examinadas com cuidado, na medida em que há uma clara influência do horizonte de investimento sobre o desempenho dos modelos multifatoriais.

A questão da diversificação também influencia sobremaneira os resultados. As carteiras baseadas em medidas multidimensionais são normalmente mais alavancadas. A alavancagem, por sua vez, acaba por impactar o desvio absoluto e, por conseguinte, tornar a estratégia menos eficiente.

Igualmente, a presença de custos de transação altera de forma expressiva a análise, uma vez que a estratégia baseada na imunização tradicional é significativamente mais barata, especialmente em horizontes de investimento mais longos. A influência é especialmente clara no caso dos modelos baseados em choques arbitrários de terceira e quarta ordem. Essa constatação é corroborada por Agca (2005) por meio da afirmação de que a escolha do método de imunização passa a ser uma função do horizonte de investimento, uma vez que os custos de transação impactam profundamente as carteiras imunizadas no médio e longo prazo.

Embora as restrições impostas ao processo de otimização não incluam a obrigatoriedade de inclusão de um título de vencimento próximo ao horizonte de investimento, essa é uma característica que pode ser observada na grande maioria das carteiras formatadas nos moldes da imunização tradicional. Nesse sentido, os resultados são consistentes com os obtidos por Bravo e da Silva (2006). Segundo os autores, a simples inclusão de um título com vencimento próximo ao horizonte de investimento torna a estratégia de imunização tradicional a mais eficiente dentre todas as estratégias analisadas.

Se considerarmos os cenários construídos a partir de ponderações dos três indicadores de eficiência, a imunização tradicional se mostra indubitavelmente superior do quarto ao décimo ano. A explicação para tamanha superioridade parece ser a fusão dos argumentos explicitados acima: as carteiras obtidas a partir do modelo tradicional, embora eventualmente expostas a um risco de taxa de juros marginalmente superior, são significativamente mais diversificadas, menos alavancadas e menos dispendiosas. Ademais, a importância das variações não paralelas diminui no médio e longo prazo. O somatório desses fatores é plenamente favorável às estratégias tradicionais.