1
Introdução

A teoria dos números transfinitos de Cantor é um dos grandes marcos intelectuais de toda história do conhecimento. Por sua beleza e pela ousadia dos conceitos aí introduzidos, a teoria de Cantor tem um caráter instigante. De uma forma quase que natural, Cantor introduziu o problemático conceito de infinito dentro do escopo daquilo que é objeto de estudo matemático.Embora antes dele Bernard Bolzano também tivesse se dedicado a uma formulação precisa do conceito de infinito, é somente com Cantor que se desenvolve uma teoria, por assim dizer, *abrangente* sobre o infinito; não há nenhum aspecto ou propriedade do infinito que não seja abordado pela teoria de Cantor. Em todas as suas aplicações matemáticas e mesmo em seu conteúdo filosófico, o infinito é esmiuçado por Cantor.

Como é de se esperar em relação a qualquer teoria original que lide com aspectos complexos do entendimento humano, os problemas sempre aparecem. E não foi diferente com Cantor: críticas e desabonos apareceram em profusão. Não foram poucos que julgaram os conceitos cantorianos como um verdadeiro *pesadelo* matemático. Entretanto, a teoria de Cantor sobreviveu, e chegou aos nossos dias com o *status* de verdadeiramente revolucionária.

O que Cantor fez de extrema originalidade foi incorporar como um legítimo objeto da matemática o *infinito atual.* Ao invés de lidar com o conceito de infinito em sentido *potencial,* isto é, como uma grandeza variável finita que pode ser tão grande quanto se queira, Cantor já parte da compleição ou atualidade do infinito; em Cantor, o infinito é um objeto *acabado, findo* e, portanto, passível de ser estudado e matematizado, dentro de certos limites, como o são os objetos finitos.

A partir desta intuição fundamental do infinito como algo terminado, atual, Cantor elabora a sua teoria dos números transfinitos. De fato, os números transfinitos constituem uma extensão dos números finitos; como estes, aqueles se destinam a *contar.* O transfinito de Cantor é o domínio dos números que se prestam a contar e comparar o infinito. Assim como os números naturais são o recurso por meio do qual as coleções finitas são contadas e comparadas pela ordem de grandeza, os números transfinitos são o expediente para a boa ordenação do infinito e para a sua comparabilidade.

bNa qualidade de objetos que se prestam a *contar*, é de se pressupor que os números ordinais transfinitos de Cantor compartilhem muitas das propriedades que caracterizam ou definem os números naturais finitos. Embora o escopo de atuação de cada um destes domínios numéricos seja distinto, tanto o finito quanto o ordinal transfinito são números que se prestam a bem ordenar. Não seria mesmo impertinente afirmar que o transfinito numérico nada mais é do que uma extensão para o infinito, *dentro de certos limites*, da contagem tal qual esta ocorre no finito. Assim sendo, um diálogo entre a aritmética transfinita e a finita é mais do que natural.

É partir desta perspectiva que entra em cena o nome de Richard Dedekind, contemporâneo e amigo de Cantor, e o primeiro matemático que definiu de forma precisa o que é o *ato de contar no âmbito do finito.* Para Dedekind, a razão humana dispõe da *estrutura dos números inteiros* para bem ordenar o mundo à sua volta. Através dos segmentos *finitos* de tal estrutura, os conjuntos finitos podem ser bem ordenados, uma vez que *contar* um conjunto finito nada mais seria do que *emparelhar* um a um os objetos de tal conjunto com os elementos dos segmentos da estrutura dos inteiros. Da mesma forma, há em Cantor o princípio de que os conjuntos infinitos podem ser contados por que admitem uma bijeção com segmentos da classe composta por todos os ordinais; tal classe de *todos os ordinais*, de natureza paradoxal, teria em Cantor o papel de *estoque de números ordinais na razão divina*, algo incompreensível para a razão humana.

Esta tese tem por intuito interpretar o conceito de número ordinal transfinito de Cantor em noções dedekindianas. O intuito de tal interpretação é salientar que o conceito de número ordinal transfinito admite uma definição a partir do conceito de *estrutura dos números naturais*, tal como tal estrutura é definida em Dedekind. O que se pretende demonstrar nesta tese é que as abordagens de Dedekind e de Cantor, em relação aos números inteiros e ao infinito, são muito semelhantes. A diferença fundamental entre eles é o alcance dado ao conceito de número inteiro e ao papel do princípio de boa ordem: para Dedekind, os números inteiros são objetos *a priori* da razão humana que se destinam a ordenar o mundo no qual se insere o homem; para Cantor, "número inteiro" diz respeito aos objetos eternos disponíveis na mente de Deus para enumerar a sua criação. Em Dedekind, talvez por não considerar um tratamento aritmético do infinito, o princípio da boa ordenação não é enfatizado; em Cantor, tal princípio é uma *lei fundamental do pensamento,* posto que é a partir dele que se faz possível elaborar uma aritmética dos conjuntos infinitos, tratando-os, até onde é viável, como se estes fossem finitos. Como se perceberá, o diálogo que aqui se faz entre Dedekind e Cantor é sempre pontuado pela tese de que o primeiro definiu o que é *humanamente* contável, e o segundo o que é *divinamente* contável.

O caminho que aqui se segue, a fim de demonstrar a contento o que se deseja, é divido em quatro capítulos. O primeiro capítulo consiste em uma pequena apresentação do contexto em que a teoria dos números ordinais transfinitos se forjou, indo posteriormente para os *Grundlagen*, de 1883, obra esta em que os conceitos fundamentais da teoria de Cantor sobre os números ordinais são apresentados pela primeira vez.

No que diz respeito aos aspectos seminais da teoria dos números transfinitos, mostra-se aqui que a teoria da representação de funções por meio de séries trigonométricas foi o contexto de nascimento dos números transfinitos. Por meio de seus estudos sobre a unicidade da expansão por meio de séries trigonométricas de uma função qualquer, Cantor chegou ao problema da própria estrutura interna dos números reais. Cantor percebera que o teorema por ele demonstrado de que uma função admite uma única expansão por meio de séries trigonométricas permanece válido mesmo no caso em que, para uma quantidade infinita de números reais, a função em questão não satisfaz as condições suficientes e necessárias à demonstração do aludido teorema. A partir disto, Cantor deslocou o seu interesse das expansões trigonométricas de funções para o domínio dos números reais em suas propriedades constitutivas. Chegou então ao conceito de *ponto de acumulação* e de *conjunto derivado*, os quais consistem no preâmbulo topológico dos números ordinais; pode-se mesmo dizer que o período que vai de 1870 até 1883, quando vieram à luz os *Grundlagen*, consiste em uma época de maturação da teoria dos números transfinitos como tal[1].

---

[1] No período supracitado, além de desenvolver os conceitos topológicos mencionados, Cantor também se dedicou a problemas relativos à enumerabilidade do contínuo, assim como a questões relativas a bijeção entre espaços de dimensões diferentes. Todas estas pesquisas, em que já é clara uma preocupação de comparar ou medir o infinito, desembocariam em 1883 na teoria dos números transfinitos exposta nos *Grundlagen.*

Após uma breve apresentação dos resultados e conceitos mais importantes a que Cantor chegou neste período anterior à teoria dos números transfinitos, o capítulo continua com uma exposição dos principais tópicos dos *Grundlagen*. Editado pela primeira vez em1883[2], os *Grundlagen* são o artigo de número 5 de um total de seis artigos que Cantor veio a publicar sobre domínios infinitos de pontos lineares[3] Percebendo a singularidade do conteúdo deste quinto artigo, Cantor resolveu publicá-lo separadamente, deixando claro a que tipo de leitor os *Grundlagen* se destinavam:

> Dado que entreguei estas páginas à apreciação pública, que fique claro que eu as escrevi tendo em vista dois tipos de leitor - para filósofos que estão a par dos mais recentes desenvolvimentos na matemática, e para matemáticos que estejam familiarizados com os mais importantes resultados tanto da antiga quanto da moderna filosofia (CANTOR, [2000], p.881).

Basicamente, os *Grundlagen* são um tratado sobre o infinito e suas manifestações. Começando com a distinção fundamental entre infinito potencial e atual, pelas seções dos *Grundlagen* uma série de conceitos sobre o infinito são apresentados tanto técnica como filosoficamente. Dentre tais, surgem as noções de número ordinal transfinito e de *potência.* A primeira é introduzida como uma *extensão natural* dos números inteiros para o domínio do infinito. A *potência*, por sua vez, aparece como a ordem de grandeza do infinito, aquilo que serve de parâmetro para compararmos o *tamanho* de dois conjuntos infinitos distintos: se eles têm a mesma *potência*, então são iguais em tamanho, caso contrário um será maior que outro. Basicamente, a teoria dos números transfinitos é uma tentativa de mensurar a *potência* ou tamanho de um conjunto a partir desta extensão dos números naturais para o infinito; e nos *Grundlagen*, esta função precípua da incipiente teoria de Cantor já se mostra de forma inequívoca.

Depois de situar os *Grundlagen* historicamente e de expor os seus conceitos fundamentais, cabe então verificar quais são os pressupostos que aí se encontram. Tal é o intuito fundamental do segundo capítulo. Para tanto, utiliza-se como ponto de partida as idéias do filósofo norte-americano Shaughan Lavine. Em seu livro

[2] *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein matematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, Teubner, Leipzig, 1883.
[3] De 1879 a 1884, Cantor publicou seis artigos sobre pontos de acumulação e conjuntos derivados, intitulados *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Tais artigos apareceram nos *Mathematische Annalen*.

Understanding the Infinite, publicado em 1998, Lavine sustenta que os *Grundlagen* têm como pano de fundo o princípio de que *conjunto* é qualquer agregado de objetos que admite ser numerado ou contado. Longe de apresentar uma noção de conjunto vinculada à extensão de uma propriedade bem definida, Cantor, nos *Grundlagen*, estaria trabalhando com a identidade entre conjunto e agregado contável. Como fundamento da enumeração de qualquer conjunto, Cantor apresenta a seqüência dos números ordinais, a partir da qual os agregados ou multiplicidades quaisquer ganham estatuto de conjuntos na medida em que há uma bijeção entre os segmentos próprios desta seqüência e os agregados ou multiplicidades em questão. Ser conjunto, portanto, passa a ser idêntico a ser numerado por algum ordinal. Além desta noção de conjunto vinculada à enumeração, Lavine também apresenta um conjunto de postulados que, segundo ele, nortearam Cantor na elaboração de seus números transfinitos.

Por trás da tese de que *ser conjunto é ser contável* está o princípio de que os números ordinais são anteriores aos próprios conjuntos, dado que são o fundamento da própria *conjuntividade.* Neste sentido, a seqüência de todos os ordinais, princípio de legitimidade de quaisquer conjuntos, teria prevalência ontológica em relação a estes. De fato, Cantor toma a seqüência dos números ordinais como o *estoque de números na mente de Deus* e, portanto, uma multiplicidade qualquer é conjunto quando concebida contada, em toda a sua compleição, pela intuição de Deus; *ser conjunto é ser contado por Deus* – tal afirmação é o que será denominado de *hipótese teológica.*

A segunda parte do capítulo dois destina-se a um breve estudo sobre o conceito de número cardinal em Cantor. O intuito desta parte é mostrar que, uma vez sendo os números cardinais definidos como todos homogêneos e uniformes, sem relações de ordem entre seus elementos – estes, tomados como *puras unidades* -, não há como garantir que os cardinais sejam autênticos conjuntos sem tomá-los como *emparelhados* aos segmentos da seqüência dos ordinais; a suposta ausência de ordem interna nos cardinais revela-se como algo insustentável, caso se queira legitimar os cardinais como autênticos conjuntos. Encerrando o capítulo dois há uma seção que trata especificamente da hipótese do contínuo e da natureza conjuntística dos números reais.

O capítulo três trata do problema da boa ordenação dos conjuntos enumeráveis no pensamento de Deus. Em primeiro lugar, há uma breve discussão do que é contar ou enumerar o infinito. Nesta breve intróito, vem à luz o nome de Bernard Bolzano, para quem o infinito, embora possa ser compreendido como atual, não admite uma enumeração de seus termos. A partir da questão de como enumerar os conjuntos infinitos consistentemente, aparecem os números ordinais transfinitos de Cantor introduzidos como limites, nos mesmos moldes como os irracionais são introduzidos como limites de seqüências de racionais. Sob tal enfoque, os ordinais transfinitos determinariam *cortes contínuos* nos conjuntos infinitos; eis, então, a primeira aproximação entre as concepções cantoriana e dedekindiana, posto que Dedekind introduz os números irracionais de forma análoga à introdução que Cantor faz dos ordinais transfinitos limites.

Mostra-se no capítulo três que o teorema de Cantor sobre a existência de conjuntos não enumeráveis, de 1891, parte do pressuposto de que o pensamento de Deus intui de *maneira perfeita* a totalidade dos cardinais finitos, assim como *todas as permutações possíveis entre tais cardinais*. Aduz-se aqui a tese de que *qualquer conjunto enumerável*, na mente divina, pode ser bem ordenado sem os *cortes contínuos* inerentes aos ordinais limites. A seqüência completa dos cardinais finitos, perfeita e inteiramente dada na intuição de Deus, basta para que a boa ordenação dos conjuntos enumeráveis se dê só mediante *saltos*; estes, por seu turno, são característicos da boa ordenação dos conjuntos finitos – de fato, o infinito na mente de Deus, conforme princípio de Santo Agostinho, *finitiza-se* de maneira incompreensível ao intelecto humano. Por último, o terceiro capítulo aborda os tipos ordinais de Cantor e o princípio norteador da teoria dos números ordinais transfinitos de que todo conjunto pode ser bem ordenado – o famigerado *princípio de boa ordem.*

O quarto e último capítulo consiste na essência da tese, propriamente dita. Neste capítulo final, o pensamento de Dedekind sobre a aritmética e os números inteiros é introduzido. Procura-se aqui apresentar as concepções filosóficas que pairam subjacentemente ao conceito dedekindiano de número para, a partir disto, introduzir o conceito de número ordinal de Cantor, até onde é possível, como uma extensão da noção de número inteiro de Dedekind. Uma vez que esta interpretação dedekindiana da noção de ordinal transfinito é feita, passa-se ao estudo dos paradoxos inerentes à hipótese da compleição da totalidade dos ordinais. Em tais paradoxos – como o de Burali-Forti -, o que gera contradição é a tese de que existe um ordinal transfinito que não admite ser estendido ou continuado, isto é, postula-se uma classe para cuja enumeração *todos os números ordinais, em todo o seu estoque no pensamento divino,* foram utilizados. Segundo Cantor, isto é equivalente a limitar a capacidade absolutamente infinita de enumeração que possui o intelecto divino, o que é inadmissível. Assim como não há como limitar o que é *finitamente contável* com o postulado do maior número finito, também o escopo da contagem transfinita é ilimitado. Uma tradução da essência dos paradoxos envolvendo a compleição da totalidade dos ordinais é feita, nesta tese, para a linguagem dedekindiana.