

4

Estados semiclássicos para o caso $U(1)$

Neste capítulo, formularemos duas representações para a teoria do campo eletromagnético em $\mathbf{R}^3$: a representação de Fock (ou “canônica”) e a representação QEF (“quantized electric flux”, ou “polimérica”, ou “por laços”), esta última exatamente análoga à LQG. Veremos então como as idéias desenvolvidas no modelo de partícula pontual do Capítulo 3 podem ser transportadas de maneira bastante direta para este caso, dando-nos uma formulação explícita para investigar estados da QEF que “pareçam clássicos” em escalas macroscópicas.

4.1

A representação de Fock

Uma conexão de $U(1)$ é simplesmente uma 1-forma (tomando valores em $\mathbf{R}$)¹ $A_a(x) dx^a$. Seu momento conjugado é o *campo elétrico* $E^b(y)$. A forma mais simples de quantizar esta teoria é obter um espaço de funções em que possamos representar a conexão por um operador de multiplicação, e o campo elétrico por um operador “derivada funcional”.

Considere o espaço $\mathcal{E}_\infty$ de campos vetoriais suaves $\epsilon(x) = \epsilon^a(x) \mathbf{e}_a$, cujos componentes satisfaçam a condição de Schwartz

$$\left| \frac{\partial^b \epsilon^a(x)}{\partial x^b} x^n \right| \leq C_{b,n}$$

para certas constantes $C_{b,n}$. Então podemos definir uma conexão *distribucional* de $U(1)$ como um funcional linear sobre $\mathcal{E}_\infty$, $\phi : \epsilon \mapsto \phi(\epsilon)$. Identificamos a conexão “de fato” A com o funcional linear $\phi_A(\epsilon) = \int_{\mathbf{R}^3} A_a(x) \epsilon^a(x) dx$, e, por um abuso de notação, nos permitimos denotar conexões distribucionais por

$$\epsilon \mapsto \phi(\epsilon) \text{ “} = \int_{\mathbf{R}^3} A_a(x) \epsilon^a(x) dx \text{”}$$

¹Lembramos que $U(1)$ é o grupo dos números complexos unimodulares, ou seja, da forma $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbf{R}$. Logo, a rigor, sua álgebra de Lie, $u(1)$, é o eixo imaginário $i\mathbf{R}$, mas por praticidade identificamo-lo com o eixo real.

Seja $\mathcal{A}^*$ o espaço (linear) de tais conexões distribucionais. Este espaço admite (7) uma *medida gaussiana* $d\mu_F$ dada por

$$\int_{\mathcal{A}^*} e^{i\phi(\epsilon)} d\mu_F(\phi) = e^{-\frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^3} \delta_{ab} \epsilon^a (-\Delta)^{-1/2} \epsilon^b dx}$$

onde Δ é o laplaciano no espaço euclidiano $\mathbf{R}^3$. Em termos da transformada de Fourier² do campo ϵ , o laplaciano é dado por³

$$(\Delta f)(x) = - \int_{\mathbf{R}^3} k^2 \epsilon^a(k) e^{ik \cdot x} dx$$

e logo a integral no lado direito da definição acima vale $\int_{\mathbf{R}^3} \frac{\delta_{ab}}{k} \epsilon^a(k) \epsilon^b(k) dk$.⁴ Com isso, obtemos o *espaço de Fock* $\mathcal{H}_{\text{Fock}} = L^2(\mathcal{A}^*, d\mu_F)$.

Parece justo que neste espaço de funcionais sobre distribuições, os operadores também sejam distribuições. Dado um campo vetorial $\epsilon \in \mathcal{E}_\infty$, definimos o *operador de conexão*

$$(\hat{A}(\epsilon) \Psi)[\phi] = \phi(\epsilon) \Psi[\phi] = \left(\int_{\mathbf{R}^3} A_a(x) \epsilon^a(x) dx \right) \Psi[\phi]$$

Da mesma forma, dada uma conexão λ (no espaço $\mathcal{A}_\infty$ das conexões suaves cujas componentes satisfazem a condição de Schwartz acima), definimos o *operador de campo elétrico*

$$\begin{aligned} (\hat{E}(\lambda) \Psi)[\phi] &= -i \left[\frac{d}{dt} \Psi(\phi + t\lambda) \right]_{t=0} + \frac{i}{2} \phi((-\Delta)^{-1/2} \lambda) \Psi[\phi] \\ &= -i \int_{\mathbf{R}^3} \lambda_b(y) \frac{\delta \Psi}{\delta A_b(y)}[\phi] dy \\ &\quad + \frac{i}{2} \left(\int_{\mathbf{R}^3} A_b(y) (-\Delta)^{-1/2} \lambda^b(y) dy \right) \Psi[\phi] \end{aligned}$$

²Definimos a transformada de Fourier (e inversa) de um campo vetorial ou de uma conexão componente a componente, ou seja,

$$\begin{aligned} \epsilon^a(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{R}^3} \epsilon^a(x) e^{-ik \cdot x} dx \\ \epsilon^a(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{R}^3} \epsilon^a(k) e^{ik \cdot x} dk \end{aligned}$$

³Adotamos a convenção de denotar, quando não há ambiguidade, a norma do vetor v simplesmente por v ; assim, por v^2 entende-se $v \cdot v$, e por $\frac{1}{v}$ entende-se $\frac{1}{\sqrt{v \cdot v}}$.

⁴Esta integral está bem-definida pois, parametrizando $\mathbf{R}^3$ em coordenadas esféricas, $dk = \ell^2 \sin \theta d\theta d\phi d\ell$.

onde $\phi + t\lambda$ é a conexão distribucional $\epsilon \mapsto \phi(\epsilon) + t \int_{\mathbf{R}^3} \lambda_a \epsilon^a dx$, e onde identificamos naturalmente a conexão λ_a com o campo vetorial $\delta^{ab} \lambda_b$. O segundo termo, “multiplicativo”, está presente apenas para garantir que $\hat{E}(\lambda)$ é auto-adjunto num certo domínio apropriado (7) (de fato, é essencialmente auto-adjunto no domínio que nos interessa), e não influi nas propriedades algébricas relevantes do operador.

Os operadores de conexão e campo elétrico satisfazem as relações de comutação

$$\begin{aligned} [\hat{A}(\epsilon), \hat{A}(\eta)] &= 0 \\ [\hat{E}(\lambda), \hat{E}(\kappa)] &= 0 \\ [\hat{E}(\lambda), \hat{A}(\epsilon)] &= -i \int_{\mathbf{R}^3} \lambda_a(x) \epsilon^a(x) dx \end{aligned}$$

Podemos considerar, ao menos formalmente, a existência de “operadores distribucionais” $\hat{A}_a(x), \hat{E}^b(y)$, definidos pela propriedade

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^3} \hat{A}_a(x) \epsilon^a(x) dx &= \hat{A}(\epsilon) \\ \int_{\mathbf{R}^3} \lambda_b(y) \hat{E}^b(y) dy &= \hat{E}(\lambda) \end{aligned}$$

(É importante enfatizar que estes operadores distribucionais só estão definidos formalmente, para simplificar certas manipulações simbólicas mais adiante.)

A “transformada de Fourier dos operadores distribucionais” é então definida simplesmente por

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^3} \hat{A}_a(k) \epsilon^a(k) dk &= \hat{A}(\epsilon) \\ \int_{\mathbf{R}^3} \lambda_b(k) \hat{E}^b(k) dk &= \hat{E}(\lambda) \end{aligned}$$

Considere agora os operadores de aniquilação e criação, respectivamente:

$$\begin{aligned}\hat{a}(\epsilon) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{A} ((-\Delta)^{1/4} \epsilon) + i \hat{E} ((-\Delta)^{-1/4} \epsilon) \right) \\ \hat{a}^\dagger(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{A} ((-\Delta)^{1/4} \eta) - i \hat{E} ((-\Delta)^{-1/4} \eta) \right)\end{aligned}$$

Das relações de comutação entre $\hat{A}$ e $\hat{E}$, segue-se que

$$\begin{aligned}[\hat{a}(\epsilon), \hat{a}(\eta)] &= 0 \\ [\hat{a}^\dagger(\epsilon), \hat{a}^\dagger(\eta)] &= 0\end{aligned}$$

Além do mais,

$$\begin{aligned}[\hat{a}(\epsilon), \hat{a}^\dagger(\eta)] &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} (-\Delta)^{-1/4} \epsilon^a(x) (-\Delta)^{1/4} \eta_a(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} (-\Delta)^{-1/4} \eta^a(x) (-\Delta)^{1/4} \epsilon_a(x) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{\sqrt{k}} \eta^a(k) \sqrt{k} \epsilon_a(k) dk \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} \eta^a \epsilon_a dx\end{aligned}$$

Definimos o vácuo de Fock $|0\rangle$ como o estado que é aniquilado por todos os aniquiladores, ou seja,

$$\hat{a}(\epsilon)|0\rangle = 0$$

É possível mostrar que estados da forma $\hat{a}^\dagger(\epsilon_{(1)}) \cdots \hat{a}^\dagger(\epsilon_{(n)})|0\rangle$ geram o espaço de Fock inteiro.⁵

A *álgebra de Weyl* do espaço de Fock é a $\star$ -álgebra abstrata $\mathbf{W}$ gerada por produtos arbitrários de elementos dos grupos abelianos $\{U(\epsilon) : \epsilon \in \mathcal{E}_\infty\}, \{V(\lambda) : \lambda \in \mathcal{A}_\infty\}$, com involução $U(\epsilon)^\star = U(-\epsilon), V(\lambda)^\star = V(-\lambda)$ e satisfazendo

$$V(\lambda) U(\epsilon) = \exp \left(i \int \lambda_a \epsilon^a dx \right) U(\epsilon) V(\lambda)$$

⁵De fato, o espaço de Fock é frequentemente definido em termos dos operadores de criação e aniquilação. Isto é conveniente no caso de um espaço com uma quantia enumerável de graus de liberdade, mas no nosso caso é mais conveniente partir da representação de Schrödinger.

Assim, um elemento genérico de $\mathbf{W}$ pode ser escrito na forma

$$\sum z_i U(\epsilon_{(i)}) V(\lambda_{(i)})$$

$\mathbf{W}$ age sobre $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$ por

$$\begin{aligned} (\hat{U}(\epsilon) \Psi)(\phi) &= \exp(i \phi(\epsilon)) \Psi[\phi] \\ (\hat{V}(\lambda) \Psi)(\phi) &= \exp\left(\frac{1}{2} \phi((-\Delta)^{-1/2} \lambda)\right) \Psi[\phi + \lambda] \end{aligned}$$

Como os grupos $\hat{U}(\epsilon), \hat{V}(\lambda)$ são fracamente contínuos, se tratam das exponenciais de certos operadores auto-adjuntos; é fácil verificar que se tratam dos operadores $\hat{A}(\epsilon), \hat{E}(\lambda)$ definidos anteriormente.

Se definimos sobre $\mathbf{W}$ o funcional linear

$$\rho(U(\epsilon) V(\lambda)) = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{1}{k} |\epsilon|^2 + 2i \epsilon^a \lambda_a + k |\lambda|^2 \right) dk \right\}$$

então a construção de Gelfand-Naimark-Segal (8) sobre o vácuo $|0\rangle$ define o espaço $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$. Em particular, o conjunto dos estados obtidos começando com $|0\rangle$ e aplicando combinações apropriadas de operadores em $\mathbf{W}$ constitui um subespaço denso de $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$.

4.2

A representação por laços

A holonomia de uma conexão de $U(1)$ é definida simplesmente por

$$U(e, A) = \exp \left(i \int_0^1 A_a(e(s)) \dot{e}^a(s) ds \right)$$

Seja $\mathcal{L}_{p_0}$ o espaço dos laços fechados $e : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ (analíticos por partes) que começam e terminam em p_0 , com inversão denotada por $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s)$ e composição denotada por

$$(e_1 \circ e_2)(s) = \begin{cases} e_1(2s), & s < \frac{1}{2} \\ e_2(2s-1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Definimos a relação de equivalência por holonomias $\sim$ em $\mathcal{L}_{p_0}$ da maneira óbvia: $\alpha \sim \beta$ se $U(\alpha, A) = U(\beta, A)$ para toda conexão A . Nós iremos nos referir à classe de equivalência de α por $\sim$ como $\tilde{\alpha}$, o “hoop” de α . Especificamente, o hoop $\tilde{o}$ do laço trivial ou constante $o : s \mapsto p_0$, consiste de todos os laços da forma $\beta = \alpha \circ (\alpha^{-1}R)$, onde R é uma reparametrização qualquer. Dado

um α qualquer, $\tilde{\alpha}$ consiste de todos os laços que diferem de α apenas por reparametrizações ou por “inserções” de laços equivalentes a o .

O espaço dos hoops, $\mathcal{HG}$, tem uma estrutura natural de grupo se o dotamos do produto $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta} = \widetilde{\alpha \circ \beta}$. Naturalmente, a inversa é dada por $\tilde{\alpha}^{-1} = \tilde{\alpha}^{-1}$, e a identidade é $\tilde{o}$.

Podemos, portanto, definir uma classe de funções-holonomia indexada por $\mathcal{HG}$: $T_{\tilde{\alpha}}(A) = U(\alpha, A)$. Note que $T_{\tilde{\alpha}}T_{\tilde{\beta}} = T_{\widetilde{\alpha \circ \beta}}$; isto só vale porque $U(1)$ é abeliano. Note ainda que os $T_{\tilde{\alpha}}$ são funções invariantes por gauge, e portanto podem ser considerados funções sobre o espaço $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ das conexões módulo transformações de gauge.

A álgebra $\mathcal{HA}$ gerada pelos $T_{\tilde{\alpha}}$ é uma $\star$ -álgebra com a involução

$$\left(\sum_i a_i T_{\tilde{\alpha}_i} \right)^{\star} = \sum_i \overline{a_i} T_{\tilde{\alpha}_i^{-1}}$$

Podemos dotá-la da norma

$$\|f\| = \sup_{A \in \mathcal{A}/\mathcal{G}} |f(A)|$$

O completamento de $\mathcal{HA}$ em relação a esta norma resulta na C^* -álgebra $\overline{\mathcal{HA}}$. Sua identidade é $T_{\tilde{o}}$. Agora, a teoria de C^* -álgebras nos diz que $\overline{\mathcal{HA}}$ é naturalmente isomorfa a $C(\Delta)$, a C^* -álgebra das funções contínuas complexas sobre o espaço (Hausdorff e compacto) de ideais maximais Δ (também referido como *espectro* de $\overline{\mathcal{HA}}$). Note que a cada ideal maximal em Δ corresponde (bijetivamente) um homomorfismo (de C^* -álgebras) $h : \overline{\mathcal{HA}} \rightarrow \mathbf{C}$; o isomorfismo entre $\overline{\mathcal{HA}}$ e $C(\Delta)$ é dado por $a \mapsto \tilde{a}$, onde $\tilde{a}(h) = h(a)$.

De forma análoga ao que foi feito no capítulo 2, definimos uma “conexão generalizada” (módulo transformações de gauge) como um mapa que associa a cada curva e uma “holonomia” $\bar{A}(e) \in U(1)$, satisfazendo $\bar{A}(e^{-1}) = \bar{A}(e)^{-1}$, $\bar{A}(e_1 \circ e_2) = \bar{A}(e_1) \bar{A}(e_2)$ – ou, equivalentemente, um homomorfismo de grupos de $\mathcal{HG}$ para $U(1)$. Dada uma tal $\bar{A}$, podemos construir um elemento h de Δ dado por $h(T_{\tilde{\alpha}}) = \bar{A}(\alpha)$ (em (9) se demonstra que tal h de fato pertence ao espectro). Aliás, é fácil ver que *todos* os homomorfismos de $\overline{\mathcal{HA}}$ em $\mathbf{C}$ admitem tal forma⁶; portanto, Δ também é caracterizado como o espaço das conexões generalizadas. De fato, em (10) se demonstra que Δ é um completamento do

⁶De fato, só precisamos mostrar que os elementos de Δ satisfazem a propriedade $h(T_{\tilde{\alpha}}) \in U(1)$, ou equivalentemente $|h(T_{\tilde{\alpha}})| = 1$. Mas, sabendo que $T_{\tilde{\alpha}}T_{\tilde{\beta}} = T_{\widetilde{\alpha \circ \beta}}$, é fácil ver que qualquer homomorfismo h deve satisfazer $h(T_{\tilde{\alpha}^{-1}}) = h(T_{\tilde{\alpha}})^{-1}$. Por outro lado, $h(T_{\tilde{\alpha}^{-1}}) = \overline{h(T_{\tilde{\alpha}})}$, e logo $|h(T_{\tilde{\alpha}^{-1}})| = |h(T_{\tilde{\alpha}})|$. Combinando estes dois fatos, obtemos $|h(T_{\tilde{\alpha}})^{-1}| = |h(T_{\tilde{\alpha}})|$, o que implica $|h(T_{\tilde{\alpha}})| = 1$.

espaço $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ das conexões módulo transformações de gauge; dado isto, podemos nos referir a Δ como $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, conforme for mais conveniente.

Seja $\wedge$ uma representação contínua de $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$ sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, com vetor cíclico Ω . Então $\rho(a) = \langle \Omega, \hat{a} \Omega \rangle$ define um funcional linear positivo sobre $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$. Equivalentemente, $\tilde{\rho}(\tilde{a}) = \rho(a)$ define um funcional linear positivo sobre $C(\Delta)$. Agora, o lema de Riesz nos diz que existe uma medida regular μ sobre $\Delta = \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ tal que

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}) = \langle \Omega, \hat{a} \Omega \rangle = \int_{\Delta} \tilde{a}(h) d\mu(h) = \int_{\Delta} h(a) d\mu(h)$$

e, em particular (mudando apenas de notação),

$$\langle \Omega, \hat{T}_{\bar{\alpha}} \Omega \rangle = \int_{\Delta} h(T_{\bar{\alpha}}) d\mu(h) = \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \bar{A}(\alpha) d\mu(\bar{A})$$

A representação $\wedge$ de $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$ sobre $\mathcal{H}$ é unitariamente equivalente a uma representação em $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$. A equivalência é dada da seguinte forma: $\mathcal{H}$ é levado em $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$ pelo mapa $\hat{a} \Omega \mapsto \tilde{a}$ (em particular, o vetor cíclico Ω corresponde ao elemento $\omega(\bar{A}) = 1$), e os $\hat{T}_{\bar{\alpha}}$ correspondem aos operadores de multiplicação

$$(\hat{T}_{\bar{\alpha}} \Psi)(\bar{A}) = \bar{A}(\alpha) \Psi(\bar{A})$$

Da mesma forma, no sentido contrário, dada qualquer medida $d\mu$ no espaço $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, a construção de Gelfand-Naimark-Segal determina uma representação de $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$ sobre $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$, onde a ação dos $T_{\bar{\alpha}}$ é dada pela expressão acima e o vetor cíclico é $\omega(\bar{A}) = 1$.

Note que, pela estrutura de $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$, o subespaço Loop gerado pelas funções $\Psi_{\bar{\alpha}} = \hat{T}_{\bar{\alpha}} \omega$ é denso em $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$. (Explicitamente, $\Psi_{\bar{\alpha}}(\bar{A}) = \bar{A}(\alpha)$. Estes estados são, naturalmente, chamados *estados de laços*.)

Há uma medida, em certo sentido, “natural” para $\mathcal{A}/\mathcal{G}$, construída da seguinte forma. Definimos, para cada conjunto finito de laços $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, um espaço $H_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \approx U(1)^n$ e uma medida $d\mu_H^{(n)}$ induzida pela medida de Haar para $U(1)$:

$$\int_{H_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}} f(z_1, \dots, z_n) d\mu_H^{(n)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} f(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) d\theta_1 \dots d\theta_n$$

Marolf e Mourão (11) definem uma noção de espaço-limite projetivo de uma família de espaços de medida, e demonstram que o espaço-limite projetivo da família $\{(H_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}, d\mu_H^{(n)})\}$ é $(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu_0)$, para uma certa medida $d\mu_0$; em

particular, cada espaço $H_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ admite uma projeção natural

$$\begin{aligned} p : \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}} &\rightarrow H_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \\ \bar{A} &\mapsto (\bar{A}(\alpha_1), \dots, \bar{A}(\alpha_n)) \end{aligned}$$

As *funções cilíndricas* são os elementos de $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu_0)$ que fatoram por alguma destas projeções; dito de outra maneira, são as funções da forma $\Psi(\bar{A}) = f(\bar{A}(\alpha_1), \dots, \bar{A}(\alpha_n))$. O conjunto das funções cilíndricas é denotado Cyl_0 .

A medida $d\mu_0$ obtida acima no limite projetivo é induzida pelas medidas de Haar, no sentido de que, para cada função cilíndrica, vale

$$\int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} \Psi(\bar{A}) d\mu_0(\bar{A}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} f(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) d\theta_1 \dots d\theta_n$$

e portanto podemos nos referir a $d\mu_0$ como “medida de Haar” para $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$.

A representação de $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$ sobre $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu_0) = \mathcal{H}_0$ é chamada representação por laços, ou (talvez mais especificamente) representação de Haar. Podemos usar a definição acima de $d\mu_0$ para determinar o funcional linear positivo correspondente a esta representação: caso $\tilde{\alpha} = \tilde{o}$, $\bar{A}(\alpha) = 1 \forall \bar{A}$ e logo

$$\begin{aligned} \rho(T_{\tilde{\alpha}}) &= \int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} \bar{A}(\alpha) d\mu_0(\bar{A}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} d\theta \\ &= 1 \end{aligned}$$

enquanto que, caso $\tilde{\alpha} \neq \tilde{o}$, temos

$$\begin{aligned} \rho(T_{\tilde{\alpha}}) &= \int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} \bar{A}(\alpha) d\mu_0(\bar{A}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} e^{i\theta} d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, vamos definir sobre $\mathcal{H}_0$ operadores “conjugados” $\hat{E}(\Sigma)$, onde Σ são 2-subvariedades (superfícies parametrizadas) em $\mathbf{R}^3$. Sua ação sobre estados de laços é dada da seguinte maneira. Seja $N(p)$ o vetor normal de Σ em p . Sejam $s_1 \dots s_n$ os valores em $[0, 1]$ em que α intercepta Σ *não-tangencialmente*, ou seja, tais que $\alpha(s_j) \in \Sigma$ e $\dot{\alpha}(s_j) \not\perp N(\alpha(s_j))$.⁷ Então

$$\hat{E}(\Sigma) \Psi_{\tilde{\alpha}} = \left(\sum_{j=1}^n \kappa_j \right) \Psi_{\tilde{\alpha}}$$

onde $\kappa_j = \text{sgn}(\dot{\alpha}(s_j) \cdot N(\alpha(s_j)))$ determina a orientação relativa entre α e Σ em cada interseção.

Este operador é essencialmente auto-adjunto em Loop, e portanto admite uma única extensão auto-adjunta (também denotada $\hat{E}(\Sigma)$) para $\mathcal{H}_0$. Por uma construção exatamente análoga àquela feita na seção 2.6, é fácil ver que, formalmente,

$$\hat{E}(\Sigma) = -i \int_{\Sigma} \frac{\delta}{\delta A(x(\sigma))} \cdot dS(\sigma)$$

e, portanto, $\hat{E}(\Sigma)$ é o “operador do fluxo elétrico sobre Σ ”.

4.3

Representações r -Fock

Nosso objetivo é codificar o comportamento da representação de Fock nos mesmos termos da representação por laços – ou seja, codificar os estados de $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$ como funções sobre o espaço de configurações $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. Nesta seção, vamos obter medidas μ_r , chamadas *medidas r -Fock*, que resultam em representações de $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$ (não-equivalentes à representação associada à medida de Haar) que cumprem exatamente este papel.

Começamos definindo o *fator forma* de uma curva e como sendo o campo vetorial (distribucional) X_e^a sobre $\mathbf{R}^3$ tal que, para todo A ,

$$\int_{\mathbf{R}^3} X_e^a(x) A_a(x) dx = \int_0^1 A_a(e(s)) \dot{e}^a(s) ds$$

ou, em termos do delta de Dirac 3-dimensional $\delta^{(3)}$,

$$X_e^a(x) = \int_0^1 \dot{e}^a(s) \delta^{(3)}(x - e(s)) ds$$

⁷Da própria definição do operador $\hat{E}(\Sigma)$, entende-se o porquê de ignorarmos pontos de tangência entre α e Σ . Da analiticidade de α , segue-se que os pontos de interseção não-tangenciais existem apenas em número finito.

Neste sentido, o fator forma contém exatamente a informação sobre a geometria de e que é relevante para o cálculo de holonomias. Agora, para $r > 0$, considere a família de funções em $\mathbf{R}^3$ definida por

$$f_r(x) = \frac{1}{2\pi^{3/2} r^3} e^{-\frac{x^2}{2r^2}}$$

(Escrevemos $x^2 = \|x\|^2$.) Note que $\lim_{r \rightarrow 0} f_r = \delta^{(3)}$. Assim, podemos considerar os campos vetoriais (suaves) definidos substituindo $\delta^{(3)}$ por f_r na fórmula acima, ou seja, *fatores forma borrados*

$$X_{e,r}^a(x) = \int_0^1 \dot{e}^a(s) f_r(x - e(s)) ds$$

Note que a composição de curvas é preservada: $X_{e_1 \circ e_2, r} = X_{e_1, r} + X_{e_2, r}$.

Podemos agora definir, para cada $r > 0$, um mapa mensurável de $\mathcal{A}^*$ para $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ por $\Theta_r(\phi) = \bar{A}_{\phi, r}$, onde

$$\bar{A}_{\phi, r}(e) = \exp(i\phi(X_{e, r})) \in U(1)$$

Tomando o push-forward de $d\mu_F$ por Θ_r , obtemos uma família de medidas $d\mu_r$ em $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, definidas por

$$\mu_r(B) = \mu_F(\Theta_r^{-1} B)$$

para qualquer conjunto mensurável B . Cada $d\mu_r$ é associada a um espaço de Hilbert $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu_r)$ (e, por conseguinte, a uma representação de $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$), com funcional linear associado

$$\begin{aligned} \rho_r(T_{\bar{\alpha}}) &= \int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} \bar{A}(\alpha) d\mu_r(\bar{A}) \\ &= \int_{\mathcal{A}^*} \exp(i\phi(X_{\alpha, r})) d\mu_F(\phi) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^3} \delta_{ab} X_{\alpha, r}^a(x) (-\Delta)^{-1/2} X_{\alpha, r}^b(x) dx\right) \end{aligned}$$

Se consideramos a transformada de Fourier do fator-forma

$$\begin{aligned} X_e^a(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{R}^3} X_e^a(x) e^{-ik \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^1 e^{-ik \cdot e(s)} \dot{e}^a(s) ds \end{aligned}$$

e do fator-forma borrado

$$\begin{aligned} X_{e,r}^a(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{R}^3} X_{e,r}^a(x) e^{-ik \cdot x} dx \\ &= e^{-\frac{k^2 r^2}{2}} X_e^a(k) \end{aligned}$$

então temos

$$\begin{aligned} \rho_r(T_{\tilde{\alpha}}) &= \exp \left(-\frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{k} \delta_{ab} X_{\alpha,r}^a(k) X_{\alpha,r}^b(-k) dk \right) \\ &= \exp \left(-\frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{k} \|X_{\alpha,r}(k)\|^2 dk \right) \end{aligned}$$

Construímos, assim, uma representação “r-Fock” de $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$ em $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu_r)$.

Em (12), é demonstrado que $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$ é naturalmente isomorfa à C^* -álgebra $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}_r}$, onde $\mathcal{H}\mathcal{A}_r$ é a álgebra gerada pelas “holonomias borradas” de laços $T_{\tilde{\alpha},r}(\phi) = \exp(i\phi(X_{\alpha,r}))$. O isomorfismo é dado por $I_r(T_{\tilde{\alpha}}) = T_{\tilde{\alpha},r}$. $\mathcal{H}\mathcal{A}_r$ é uma sub-álgebra própria da álgebra de Weyl $\mathbf{W}$, e no entanto em (12) se demonstra que, aplicando a construção de Gelfand-Naimark-Segal a $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}_r}$, com vetor cíclico Ω e com o funcional linear positivo ρ_F definido na representação de Fock – que, restrito a $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}_r}$, tem a forma $\rho_F(T_{\tilde{\alpha},r}) = \exp(-\frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{k} \|X_{\alpha,r}(k)\|^2 dk) = \rho_r(T_{\tilde{\alpha}})$ – o espaço $\mathcal{H}_r$ obtido é isomorfo a $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$, com o isomorfismo dado por

$$U(\hat{T}_{\tilde{\alpha},r} \Omega) = \exp \left(i \hat{A}(X_{\alpha,r}) \right) |0\rangle$$

(Em particular, os elementos da forma $\exp \left(i \hat{A}(X_{\alpha,r}) \right) |0\rangle$ geram um conjunto denso em $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$.) Podemos, portanto, denotar a ação do operador de holonomia borrada sobre o espaço de Fock por $\hat{T}_{\tilde{\alpha},r} = \exp \left(i \hat{A}(X_{\alpha,r}) \right)$, sem ambiguidade.

Agora, se induzirmos um funcional linear positivo “de Fock” sobre $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$ por $\rho(T_{\tilde{\alpha}}) = \rho_F(I_r(T_{\tilde{\alpha}})) = \rho_F(T_{\tilde{\alpha},r}) = \rho_r(T_{\tilde{\alpha}})$, recuperamos o funcional linear positivo ρ_r obtido acima, o que mostra que a representação r-Fock de $\overline{\mathcal{H}\mathcal{A}}$ em $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu_r)$ é *unitariamente equivalente* à representação de Fock em $L^2(\mathcal{A}^*, d\mu_F)$. O mapa unitário que efetua esta equivalência é dado por

$$\begin{aligned}
U_r(\Psi_{\tilde{\alpha}}) &= U(\widehat{I_r(T_{\tilde{\alpha}})}) \Omega \\
&= U(\hat{T}_{\tilde{\alpha},r}) \Omega \\
&= \hat{T}_{\tilde{\alpha},r} |0\rangle
\end{aligned}$$

Cada operador $\hat{B}$ sobre o espaço de Fock possui uma ação $\mathbf{R}$ induzida sobre o espaço r-Fock $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu_r)$, obtida pela condição $U_r(\mathbf{R}(\hat{B})(\Psi)) = \hat{B}(U_r(\Psi))$ – ou, de forma mais breve (usando o fato de que temos um isomorfismo), $\mathbf{R}(\hat{B}) = U_r^{-1} \circ \hat{B} \circ U_r$. Em particular,

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\hat{T}_{\tilde{\beta},r}) \Psi_{\tilde{\alpha}} &= (U_r^{-1} \circ \hat{T}_{\tilde{\beta},r} \circ U_r) \Psi_{\tilde{\alpha}} \\
&= (U_r^{-1} \circ \hat{T}_{\tilde{\beta},r}) \hat{T}_{\tilde{\alpha},r} |0\rangle \\
&= U_r^{-1} (\hat{T}_{\tilde{\beta} \circ \alpha, r} |0\rangle) \\
&= \widetilde{\Psi_{\tilde{\beta} \circ \alpha}}
\end{aligned}$$

e portanto $\mathbf{R}(\hat{T}_{\tilde{\beta},r}) = \hat{T}_{\tilde{\beta}}$, como era de se esperar.

Para determinar a ação do campo elétrico $\hat{E}(\lambda)$, notamos primeiro que, em $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$,

$$\left([\hat{E}(\lambda), \hat{T}_{\tilde{\alpha},r}] \Psi \right) [\phi] = \left(-i \int_{\mathbf{R}^3} \lambda_b(y) X_{\tilde{\alpha},r}(y) dy \right) e^{i\phi(X_{\tilde{\alpha},r})} \Psi[\phi]$$

e portanto

$$[\hat{E}^a(x), \hat{T}_{\tilde{\alpha},r}] = -i X_{\alpha,r}^a(x) \hat{T}_{\tilde{\alpha},r}$$

(Note que, apesar de $\hat{E}^a(x)$ ser um operador distribucional, seu comutador com a holonomia borrada está bem-definido.) Logo, no espaço r-Fock, devemos exigir

$$\begin{aligned}
[\mathbf{R}(\hat{E}^a(x)), \mathbf{R}(\hat{T}_{\tilde{\alpha},r})] &= [\mathbf{R}(\hat{E}^a(x)), \hat{T}_{\tilde{\alpha}}] \\
&= -i X_{\alpha,r}^a(x) \mathbf{R}(\hat{T}_{\tilde{\alpha},r}) \\
&= -i X_{\alpha,r}^a(x) \hat{T}_{\tilde{\alpha}}
\end{aligned}$$

Se definimos o campo elétrico borrado $\hat{E}_r^a(x) = -i \int_{\mathbf{R}^3} f_r(x-y) \frac{\delta}{\delta A_a(y)} dy$, vemos que

$$\begin{aligned}
 \left[\hat{E}_r^a(x), \hat{T}_{\tilde{\alpha}} \right] \Psi_{\tilde{\beta}} &= -i \int_{\mathbf{R}^3} f_r(x-y) \frac{\delta \widetilde{\Psi_{\alpha\beta}}}{\delta A_a(y)} dy + i \hat{T}_{\tilde{\alpha}} \int_{\mathbf{R}^3} f_r(x-y) \frac{\delta \Psi_{\tilde{\beta}}}{\delta A_a(y)} dy \\
 &= -i \int_{\mathbf{R}^3} f_r(x-y) X_{\alpha\beta}^a(y) \widetilde{\Psi_{\alpha\beta}} dy \\
 &\quad + i \hat{T}_{\tilde{\alpha}} \int_{\mathbf{R}^3} f_r(x-y) X_{\tilde{\beta}}^a(y) \Psi_{\tilde{\beta}} dy \\
 &= -i \left(\widetilde{X_{\alpha\beta,r}^a}(x) - X_{\tilde{\beta},r}^a(x) \right) \widetilde{\Psi_{\alpha\beta}} \\
 &= -i X_{\alpha,r}^a(x) \hat{T}_{\tilde{\alpha}} \Psi_{\tilde{\beta}}
 \end{aligned}$$

e logo $\mathbf{R}(\hat{E}^a(x)) = \hat{E}_r^a(x)$. Portanto, naturalmente,

$$\mathbf{R}(\hat{E}(\lambda)) = \int_{\mathbf{R}^3} \lambda_a(x) \hat{E}_r^a(x) dx$$

Com isso temos uma álgebra de Lie definida por

$$\left[\hat{E}_r^a(x), \hat{T}_{\tilde{\alpha}} \right] = -i X_{\alpha,r}^a(x) \hat{T}_{\tilde{\alpha}}$$

4.4

Redes de carga

As redes de carga são o análogo exato das redes de spin e, da mesma forma, fornecem uma base ortonormal para $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu_0)$. Tome um grafo fechado orientado $\gamma = \{e_i\}$, com cada aresta e_i analítica por partes. Definimos laços

$$\beta_i = Q(e(1))^{-1} \circ e_i \circ Q(e(0))$$

onde o $Q(p)$ é qualquer caminho do ponto-base p_0 até p que tenha apenas um número finito de interseções com γ . “Colorimos” as arestas com números inteiros q_{e_i} (correspondendo a representações irreduzíveis de $U(1)$) sujeitos à seguinte condição: em cada vértice v , sejam e_i^+ as arestas que chegam a v e sejam e_k^- as arestas que saem de v ; então $\sum q_{e_j^+} = \sum q_{e_k^-}$. Definimos então o laço correspondente à rede de carga $s = (\gamma, q)$ por

$$\beta = \beta_1^{q_{e_1}} \circ \dots \circ \beta_n^{q_{e_n}}$$

(onde β^r é o laço obtido percorrendo-se β r vezes). Então o estado de rede de carga s é definido por

$$\Psi_s = \hat{T}_{\beta} \omega$$

É possível mostrar que, de fato, $(\Psi_s, \Psi_{s'}) = \delta_{s,s'}$, ou seja, o produto interno é não nulo apenas se s, s' tiverem o mesmo grafo e mesma coloração.

Definimos o fator-forma de s por $X_s^a = \sum_i q_{e_i} X_{e_i}^a$, e o fator-forma borrado de s por $X_{s,r}^a = \sum_i q_{e_i} X_{e_i,r}^a$.

Sejam $s = (\gamma, q)$ e $s' = (\gamma', q')$ duas redes de carga arbitrárias. Se definimos $\hat{T}_s = \hat{T}_{\beta}$ seguindo a construção acima, vemos que

$$\hat{T}_s \Psi_{s'} = \Psi_{s \cup s'}$$

onde $s \cup s' = (\gamma \cup \gamma', q + q')$. (Ou seja, e é aresta de $s \cup s'$ se e somente se é aresta de s ou se s' ; neste caso, a carga associada a e é $q_e + q'_e$.)

Podemos calcular a ação dos operadores de fluxo elétrico sobre estados de redes de carga. Da ação definida acima para estados de laços, temos diretamente

$$\hat{E}(\Sigma) \Psi_s = \left(\sum \kappa_j q_j \right) \Psi_s$$

Note que os estados de redes de carga são autofunções; isto ocorre apenas porque $U(1)$ é abeliano.

No que se segue, será importante considerar o operador campo elétrico borrado

$$\hat{E}_r^a(x) \Psi_s = X_{s,r}^a(x) \Psi_s$$

Formalmente, $\hat{E}_r^a(x) = -i \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\delta}{\delta A_a(x)} X_{s,r}^a(x) dx$. Note que $[\hat{E}_r^a(x), \hat{T}_{\tilde{\alpha}}] = -i X_{\alpha,r}^a(x) \hat{T}_{\tilde{\alpha}}$. Este comutador tem a mesma forma que tem na representação r-Fock. Logo, se tratam de duas representações diferentes da *mesma* álgebra de Lie.

4.5

O vácuo no espaço dual

Nesta seção, iremos definir um estado candidato para corresponder ao vácuo de Fock na representação QEF. Da mesma forma que no capítulo anterior, este estado não pode ser um elemento de $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu_0)$: tem de ser um elemento de seu dual. Especificamente, seja $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_0$ o subespaço (denso) das combinações *finitas* de estados de redes de carga. Seja então $\mathcal{D}^*$ o espaço

dos funcionais lineares complexos $\sigma : \Psi \mapsto \langle \sigma | \Psi \rangle$. Os operadores de holonomia e campo elétrico borrado herdam naturalmente uma ação sobre $\mathcal{D}^*$ por

$$\begin{aligned} \left[\langle \sigma | \hat{T}_{\tilde{\alpha}} \right] | \Psi_s \rangle &= \langle \sigma | \left[\hat{T}_{\tilde{\alpha}}^\dagger | \Psi_s \rangle \right] \\ &= \langle \sigma | \left[\hat{T}_{\tilde{\alpha}^{-1}} | \Psi_s \rangle \right] \\ \left[\langle \sigma | \hat{E}_r^a(x) \right] | \Psi_s \rangle &= \langle \sigma | \left[\hat{E}_r^a(x)^\dagger | \Psi_s \rangle \right] \\ &= \langle \sigma | \left[\hat{E}_r^a(x) | \Psi_s \rangle \right] \end{aligned}$$

Lembramos que, para qualquer campo ϵ , o vácuo de Fock $|0\rangle$ satisfaz

$$\hat{a}(\epsilon) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{A}((-\Delta)^{1/4}\epsilon) + i\hat{E}((-\Delta)^{-1/4}\epsilon) \right) |0\rangle = 0 \quad (4-1)$$

Usando a identidade de Baker-Hausdorff-Campbell, obtemos

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{2}i\hat{a}(\epsilon)} &= e^{i\hat{A}((-\Delta)^{1/4}\epsilon)} e^{-\hat{E}((-\Delta)^{-1/4}\epsilon)} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}((-\Delta)^{1/4}\epsilon), \hat{E}((-\Delta)^{-1/4}\epsilon)]} \\ &= e^{i\hat{A}((-\Delta)^{1/4}\epsilon)} e^{-\hat{E}((-\Delta)^{-1/4}\epsilon)} e^{-\frac{1}{2}\int \|\epsilon\|^2 dx} \end{aligned}$$

Se tomamos uma rede de carga arbitrária s e escolhemos $\epsilon^a = (-\Delta)^{-1/4} X_{s,r}^a$, a fórmula acima se torna

$$e^{\sqrt{2}i\hat{a}(\epsilon)} = \hat{T}_{s,r} e^{-\hat{E}((-\Delta)^{-1/2} X_{s,r}^a)} \rho(T_{s,r})^2$$

Podemos considerar a ação deste operador no espaço r-Fock por

$$\mathbf{R} \left(e^{\sqrt{2}i\hat{a}(\epsilon)} \right) = \hat{T}_s e^{-\int (-\Delta)^{-1/2} X_{a,s,r} \hat{E}_r^a dx} \rho_r(T_s)^2$$

O operador $\mathbf{R} \left(e^{\sqrt{2}i\hat{a}(\epsilon)} \right)$ está definido apenas em termos de elementos da álgebra de Lie gerada pelas holonomias e campos elétricos borrados; portanto, isto nos permite considerar sua ação sobre a representação no espaço dual $\mathcal{D}^*$:

$$\langle \sigma | \mathbf{R} \left(e^{\sqrt{2}i\hat{a}(\epsilon)} \right) = \langle \sigma | \hat{T}_{s^{-1}} e^{-\int (-\Delta)^{-1/2} X_{a,s,r} \hat{E}_r^a dx} \rho_r(T_s)^2$$

Assim, a condição (4.1) sobre o vácuo equivale à seguinte condição em $\mathcal{D}^*$:

$$\langle \sigma_0 | \hat{T}_s = \langle \sigma_0 | e^{-\int (-\Delta)^{-1/2} X_{a,s,r} \hat{E}_r^a dx} \rho_r(T_s)^2$$

Aplicando ambos os lados da equação ao estado de rede de carga $\Psi_{s'}$, obtemos

$$\langle \sigma_0 | \hat{T}_s | s' \rangle = \langle \sigma_0 | e^{-\int (-\Delta)^{-1/2} X_{a,s,r} \hat{E}_r^a dx} \rho_r(T_s)^2 | s' \rangle$$

e logo

$$\langle \sigma_0 | s' \cup s \rangle = \rho_r(T_s)^2 e^{-\int (-\Delta)^{-1/2} X_{a,s,r} X_{s',r}^a dx} \langle \sigma_0 | s' \rangle \quad (4.2)$$

Em particular, tomando s' como a rede de carga vazia o , temos

$$\langle \sigma_0 | s \rangle = \rho_r(T_s)^2 \langle \sigma_0 | o \rangle$$

O valor $\langle \sigma_0 | o \rangle$ é uma constante arbitrária C ; portanto, a equação acima define um funcional $\sigma_0 : s \mapsto C \rho_r(T_s)^2$, onde

$$\begin{aligned} \rho_r(T_s)^2 &= \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{k} \|X_{s,r}(k)\|^2 dk \right) \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{e_1, e_2 \in \gamma} q_{e_1} q_{e_2} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{k} \delta_{ab} X_{e_1,r}^a(k) X_{e_2,r}^b(k) dk \right) \end{aligned}$$

Para mostrar que este elemento de $\mathcal{D}^*$ corresponde ao vácuo de Fock, falta apenas verificar que ele é solução de (4.2). Agora, note primeiro que, se $s = (\gamma, q)$ e $s' = (\gamma', q')$, então

$$\rho_r(T_{s \cup s'}) = \exp -\frac{1}{2} \sum_{e_1 \in \gamma \cup \gamma'} \sum_{e_2 \in \gamma \cup \gamma'} (q_{e_1} + q'_{e_1}) (q_{e_2} + q'_{e_2}) \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{k} \delta_{ab} X_{e_1,r}^a(k) X_{e_2,r}^b(k) dk$$

onde, claramente, $q_e = 0$ se $e \notin \gamma$ e vice-versa. Portanto, o somatório dentro da exponencial pode ser decomposto como

$$\begin{aligned} &\sum_{e_1 \in \gamma \cup \gamma'} \sum_{e_2 \in \gamma \cup \gamma'} (q_{e_1} + q'_{e_1}) (q_{e_2} + q'_{e_2}) \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{k} \delta_{ab} X_{e_1,r}^a(k) X_{e_2,r}^b(k) dk = \\ &= \sum_{e_1 \in \gamma} \sum_{e_2 \in \gamma} q_{e_1} q_{e_2} \int \dots + \sum_{e_1 \in \gamma'} \sum_{e_2 \in \gamma'} q'_{e_1} q'_{e_2} \int \dots + 2 \sum_{e_1 \in \gamma} \sum_{e_2 \in \gamma'} q_{e_1} q'_{e_2} \int \dots \end{aligned}$$

e, portanto, para qualquer rede de carga s' , temos

$$\langle \sigma_0 | s' \cup s \rangle = C \rho_r(T_s)^2 \rho_r(T_{s'})^2 \exp \left(-\int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{k} \delta_{ab} X_{s,r}^a(k) X_{s',r}^b(k) dk \right)$$

$$= \rho_r(T_s)^2 \langle \sigma_0 | s' \rangle \exp \left(- \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{k} \delta_{ab} X_{s,r}^a(k) X_{s',r}^b(k) dk \right)$$

como desejávamos. Portanto, σ_0 representa o vácuo de Fock no espaço dual da representação QEF. A partir de σ_0 , a ação da álgebra $\mathcal{HA}$ define um subespaço $\mathcal{F}_D \subset \mathcal{D}^*$. Podemos definir naturalmente (13) um produto interno sobre $\mathcal{F}_D$ tal que seu completamento resulta num espaço de Hilbert $\mathcal{H}_D \subset \mathcal{D}^*$ isomorfo a $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$. No entanto, este produto interno não coincide com o produto interno definido em $\mathcal{H}_0$; portanto, para entender a relação entre os estados “físicos” da representação QEF e os estados “de Fock” de $\mathcal{H}_D$, temos que apelar para outras ferramentas, no análogo exato da situação obtida no capítulo 3.

4.6

Conclusão e comentários

Aqui, como no capítulo 3, podemos definir uma noção de “shadow states” e definir noções de s -expectância e s -variância para redes de carga. Com base nisso, deve haver alguma classe de redes de carga “regulares” s (não está imediatamente claro quais seriam) para as quais poderíamos obter explicitamente a expectância, digamos, de $\hat{T}_\alpha$ no estado σ_0 .

Nesta dissertação, nos restringimos a considerar a construção de estados semiclássicos para a teoria de $U(1)$, um grupo abeliano, sobre o espaço euclidiano $\mathbf{R}^3$, uma variedade com estrutura métrica predefinida. Em (14), é feita uma “tradução” do resultado apresentado acima para o caso da LQG. Em resumo, os autores primeiro redefinem o vácuo acima em termos da aplicação de um operador “núcleo de calor” (obtido como um limite projetivo); repetem esta construção no espaço de estados da LQG tomando um operador supostamente análogo (dependente de um “gauge fixing”), e obtêm assim um estado que propõem como candidato ao vácuo de Minkowski.

Neste ponto, é necessário tecer um comentário final. A abordagem utilizada por esta dissertação – derivada dos papers de Ashtekar *et. al.* e de Varadarajan (12), (13), (14) – admite uma alternativa, resumida por Rovelli em (4). Lembrando que, como mencionado no capítulo 2, uma rede de spin s é uma autofunção dos operadores de área e volume referentes a superfícies e regiões arbitrárias na 3-variedade; os autovalores associados são a área da superfície, ou volume da região, na geometria definida por s . Podemos então selecionar uma escala macroscópica ℓ (maior do que o comprimento de Planck ℓ_P) e uma métrica g , e definir uma classe de “weaves”: redes de spin que definem, para toda região ou superfície macroscópicas, o mesmo volume ou área que g , a menos de erros pequenos em ℓ/ℓ_P . Estados físicos

seriam, portanto, superposições de classes de equivalência de weaves. Em particular, podemos definir uma weave plana (não-única, note-se) aproximando a geometria plana. Rovelli então sugere que o elemento do dual associado ao vácuo de Minkowski aproximaria o vácuo da teoria linearizada. Uma série de considerações heurísticas levam, finalmente, a um funcional gaussiano concentrado na weave plana.

As propostas de Ashtekar e Rovelli têm o mesmo formato (sugerindo uma possibilidade de redescrever mais rigorosamente as duas propostas nos mesmos termos), mas aparentemente não coincidem. Será interessante no futuro investigar o porquê desta divergência.