

2

A gravidade quântica em laços

Este capítulo é dedicado a um panorama geral da teoria da gravitação quântica por laços. Como dito na Introdução, o que se pretende aqui não é dar uma descrição completa e autocontida da LQG partindo dos primeiros princípios de relatividade geral e mecânica quântica, mas apenas prover algum tipo de embasamento que dê propósito ao que é feito no restante da dissertação. Portanto, neste capítulo não nos preocuparemos com o rigor e completude, favorecendo uma visão esquemática do assunto.

2.1

Introdução

É possível obter soluções das equações de Einstein tomando uma “fatia” do espaço-tempo – uma 3-variedade tipo-espaço M – e a analisando como um sistema mecânico infinito-dimensional. Este sistema é derivado de forma rigorosa no Apêndice A; para os propósitos deste capítulo, basta a seguinte descrição “pictórica”, apresentada sem demonstrações.

Definimos uma *conexão do grupo de rotações* $SO(3)$ sobre M como uma 1-forma $A(x) = A_a(x) dx^a$ assumindo valores na álgebra de Lie de $SO(3)$.¹ Como este grupo admite um recobrimento (universal) por $SU(2)$, suas álgebras de Lie são isomorfas, e logo podemos expressar a conexão em termos dos geradores da álgebra $su(2)$ – que são, a menos de um fator de $-\frac{1}{2}$, as matrizes

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tau_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Assim, podemos escrever $A(x) = A_a^i(x) \tau_i dx^a$. Os valores $A_a^i(x)$ são as coordenadas deste sistema mecânico². Seu momento conjugado consiste da

¹Utilizaremos ao longo de todo o texto a *convenção de somatório*: quando um índice aparece repetido numa expressão, subentende-se um somatório sobre todos seus valores possíveis. Assim, $T_{abc} S^{abd} \equiv \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 T_{abc} S^{abd}$.

²Note que A pode ser considerada um objeto com um índice “curvo” a (cada valor de a corresponde a uma direção em M), um índice “plano” i (cada valor de i corresponde a uma direção em $T_e SU(2) = su(2)$), e um “índice contínuo” x com uma gama não-enumerável de valores.

chamada *tríade densitizada*, composta por três campos vetoriais³ $E_j^b(y)$. A partir deles, podemos definir o *tensor métrica* g_{ab} por $E_i^a E_j^b \delta^{ij} = (\det g) g^{ab}$ (onde g^{ab} é a inversa definida por $g_{ac} g^{ab} = \delta_c^b$ – note que $\det g$ é o determinante de g_{ab} , não o da inversa!). Estes observáveis constituem uma álgebra com colchete de Poisson

$$\begin{aligned}\{A_a^i(x), A_b^j(y)\} &= 0 \\ \{E_i^a(x), E_j^b(y)\} &= 0 \\ \{A_a^i(x), E_j^b(y)\} &= \delta_a^b \delta_j^i \delta^{(3)}(x, y)\end{aligned}$$

($\delta^{(3)}$ é o delta de Dirac em M , definido por $\int_M f(x) \delta^{(3)}(x, y) dx = f(y)$. Para uma definição mais rigorosa desta álgebra, veja o apêndice A.)

A “receita de bolo” da quantização canônica nos aconselha a encontrar um espaço de Hilbert sobre o qual estejam definidos operadores $\hat{A}_a^i(x), \hat{E}_j^b(y)$ satisfazendo

$$\begin{aligned}[\hat{A}_a^i(x), \hat{A}_b^j(y)] &= 0 \\ [\hat{E}_i^a(x), \hat{E}_j^b(y)] &= 0 \\ [\hat{A}_a^i(x), \hat{E}_j^b(y)] &= -i\hbar \delta_a^b \delta_j^i \delta^{(3)}(x, y) \hat{I}\end{aligned}$$

Normalmente se toma algum espaço $\mathcal{H}$ de funções $\Psi(A)$ sobre o espaço de configurações – no caso, $\mathcal{A}$, o espaço das conexões suaves de $SO(3)$ em M . Então definiríamos, sobre estas funções, os operadores

$$\begin{aligned}(\hat{A}_a^i(x) \Psi)[A] &= A_a^i(x) \Psi[A] \\ (\hat{E}_j^b(y) \Psi)[A] &= -i\hbar \frac{\delta \Psi}{\delta A_b^j(y)}[A]\end{aligned}$$

Aqui, a operação $\frac{\delta \Psi}{\delta A_b^j(y)}$ seria definida formalmente como a “derivada direcional” de Ψ na direção da “variação” $\delta A_b^j(x) = “\delta^{ij} \delta_{ab} \delta^{(3)}(x, y) \tau^i”$:

³A rigor, cada E_j é uma densidade vetorial de peso 1.

$$\frac{\delta\Psi}{\delta A_b^j(y)}[A] = \left. \frac{d}{dt} \Psi[A + t \delta A] \right|_{t=0}$$

Infelizmente, esta “derivada funcional” em geral só está bem-definida como uma distribuição, e tem de ser “borrada sobre M ”. Ou seja, para cada Ψ , podemos definir uma medida sobre M , denotada $\frac{\delta\Psi}{\delta A_b^j(y)} dy$, e assim, para cada “função-teste” $f(x)$, podemos calcular a integral $\int_M f(y) \frac{\delta\Psi}{\delta A_b^j(y)} dy$.

No caso da teoria do campo eletromagnético, que estudaremos em detalhe no capítulo 4, é possível tomar como espaço de configurações um espaço de conexões *distribucionais*. A presença da métrica euclidiana em $\mathbf{R}^3$ permite definir uma medida privilegiada, dita “gaussiana”, sobre este espaço de distribuições, e com relação a esta medida se obtém um espaço L^2 de funcionais sobre o qual é possível definir os operadores correspondentes à conexão e a seu momento conjugado. No entanto, no presente caso da teoria da gravitação, a abordagem análoga se mostra um tanto impraticável (entre outros motivos, por falta de uma métrica “de fundo”; veja (1)). Portanto, a quantização canônica se mostra impraticável e somos levados a procurar formatos alternativos.

2.2

A representação por laços

Na representação por laços, passamos a considerar, como variáveis básicas, as *holonomias*. A holonomia da conexão A ao longo da curva⁴ $e : [0, 1] \rightarrow M$ é definida da seguinte maneira. Tome, no ponto $e(0)$, a matriz $I \in SU(2)$, e aplique a ela o transporte paralelo definido por A , ou seja, defina uma curva de matrizes $U(s)$ que satisfaça a EDO

$$\frac{dU(s)}{ds} + \frac{de^a(s)}{ds} A_a(e(s)) U(s) = 0 \quad (2-1)$$

(com condição inicial $U(0) = I$). A matriz $U(e, A) \stackrel{\text{def}}{=} U(1)$ assim obtida pode ser representada formalmente como uma *exponencial ordenada*:

$$U(e, A) = T \exp \int_0^1 \frac{de^a(s)}{ds} A_a(e(s)) ds$$

(A notação “ $T \exp \int$ ” não se refere propriamente à exponencial de nenhum elemento de $su(2)$. De fato, uma exponencial ordenada é o limite de um produto de Riemann, da mesma forma em que integrais são limites de somas de Riemann.)

No que se segue, será importante notar as seguintes propriedades da exponencial ordenada:

$$- T \exp \int_a^c f(s) ds = \left(T \exp \int_a^b f(s) ds \right) \left(T \exp \int_b^c f(s) ds \right)$$

⁴Neste capítulo, consideraremos apenas curvas suaves por partes.

– Se $a \approx c$, então $T \exp \int_a^c f(s) ds \approx \exp \int_a^c f(s) ds$

O grupo $SU(2)$ possui uma única medida (normalizada) $d\mu_H$, chamada medida de Haar, que é invariante por translações à esquerda – ou seja, $\mu_H(U \cdot B) = \mu_H(B)$ para todo conjunto mensurável $B \subset SU(2)$ e para todo elemento $U \in SU(2)$. De fato, a medida de Haar para grupos compactos como $SU(2)$ também é invariante por translações à direita (ver (2)). Considere $\mu_H^{(n)}$ a medida-produto em $SU(2)^n$: $d\mu_H^{(n)}(U_1, \dots, U_n) = d\mu_H(U_1) \cdots d\mu_H(U_n)$.

Considere um grafo γ sobre M – ou seja, uma coleção de vértices p_r , ligados por arestas e_i (curvas como acima).⁵ Seja Cyl_γ o espaço de todas as funções da forma

$$\Psi(A) = f(U(e_1, A), \dots, U(e_n, A))$$

onde f é uma função Haar-quadrado-integrável qualquer sobre $SU(2)^n$. Uma função que pertence a Cyl_γ para algum grafo γ é dita cilíndrica. Cada um destes espaços é idêntico a um $L^2(SU(2)^n, d\mu_H^{(n)})$, e portanto é dotado do produto interno induzido pela medida de Haar:

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int_{SU(2)^n} \overline{f_1(U_1, \dots, U_n)} f_2(U_1, \dots, U_n) d\mu_H^{(n)}$$

Se γ' é um grafo contendo γ (ou seja, se todas as arestas de γ são arestas de γ'), então claramente $\text{Cyl}_\gamma \subset \text{Cyl}_{\gamma'}$. Seja agora $\text{Cyl} = \bigcup_\gamma \text{Cyl}_\gamma$ o conjunto de todas as funções cilíndricas. Dados quaisquer grafos γ_1, γ_2 , considere um grafo γ' que os contém; assim, $\text{Cyl}_{\gamma_i} \subset \text{Cyl}_{\gamma'}$. Portanto, dadas $\Psi_i \in \text{Cyl}_{\gamma_i} \subset \text{Cyl}$ ($i = 1, 2$), o produto interno (Ψ_1, Ψ_2) é aquele definido pela fórmula acima em $\text{Cyl}_{\gamma'}$.

Este produto interno provém uma norma, com respeito à qual podemos completar Cyl , obtendo um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$. De fato, este espaço pode ser escrito como

$$\mathcal{H}_{\text{Poly}} = L^2(\bar{\mathcal{A}}, d\mu_{\text{Poly}})$$

onde $\bar{\mathcal{A}}$ é um completamento de $\mathcal{A}$. Este completamento consiste das *conexões generalizadas* $\bar{A}$ – funções que associam a cada curva e em M uma “holonomia” $\bar{A}(e)$. No entanto, diferentemente do que ocorreria se esta fosse de fato a holonomia ao longo de e de uma conexão em $\mathcal{A}$, a aplicação $\bar{A}$ pode ser descontínua. De fato, conexões generalizadas precisam satisfazer apenas as restrições

⁵Nossa definição de grafos não admite vértices “soltos”, ou seja, que não tenham arestas os alcançando.

$$\bar{A}(e^{-1}) = \bar{A}(e)^{-1}, \bar{A}(e_1 \circ e_2) = \bar{A}(e_1) \bar{A}(e_2)$$

e a dita “condição de hoop”: se $U(e_1, A) = U(e_2, A)$ para toda conexão regular em $\mathcal{A}$, então $\bar{A}(e_1) = \bar{A}(e_2)$.

A medida μ_{Poly} mencionada acima é uma medida regular sobre $\bar{\mathcal{A}}$ definida pelas medidas de Haar nos Cyl_γ . (No Capítulo 4, discutiremos mais em detalhe esta medida. Por enquanto, vale mencionar que $\mathcal{A}$ é um conjunto denso e de medida zero em $\bar{\mathcal{A}}$; μ_{Poly} -quase todo elemento de $\mathcal{A}$ é generalizado.)

2.3

A ação do grupo de gauge

Dada uma função (digamos suave) $V : M \rightarrow SU(2)$, definimos uma *transformação de gauge* sobre a conexão $A = A_a^i(x) \tau_i dx^a$ por

$$A_V = V(x)^{-1} (A_a^i(x) \tau_i) V(x) dx^a + V(x)^{-1} \frac{\partial V(x)}{\partial x^a} dx^a$$

ou simplesmente $A_V = V^{-1} A V + V^{-1} dV$. No primeiro termo, cada matriz de $su(2)$ $A_a(x) = A_a^i(x) \tau_i$ é conjugada pela matriz de $SU(2)$ $V(x)$, resultando num elemento de $su(2)$

$$\begin{aligned} (V^{-1} A_a^i \tau_i V) &= A_a^i (V^{-1} \tau_i V) \\ &= A_a^i (R_i^j \tau_j) \end{aligned}$$

É fácil verificar que a matriz $R_i^j = \delta^{jk} \text{Tr}(\tau_i V^{-1} \tau_k V)$ assim obtida é uma rotação – especificamente a rotação definida pelo recobrimento universal de $SO(3)$ por $SU(2)$.

Para estender tais transformações a conexões generalizadas, devemos primeiro ver sua ação sobre holonomias, pela definição natural $U_V(e, A) = U(e, A_V)$. De fato, se tomamos $U(s)$ a curva de matrizes que satisfaz a equação do transporte paralelo para a conexão A , e escrevemos $V(s) = V(e(s))$, $U_V(s) = V(s)^{-1} U(s) V(0)$, então

$$\begin{aligned} \frac{dU_V}{ds}(s) &= \dot{V}^{-1}(s) U(s) V(0) + V(s)^{-1} \dot{U}(s) V(0) \\ &= -V(s)^{-1} \dot{V}(s) V(s)^{-1} U(s) V(0) \\ &\quad + V(s)^{-1} (-\dot{e}^a(s) A_a(e(s)) U(s)) V(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -V(s)^{-1} \left(\dot{e}^a(s) \frac{\partial V}{\partial x^a} V(s)^{-1} + \dot{e}^a(s) A_a(e(s)) \right) U(s) V(0) \\
&= -V(s)^{-1} \left(\dot{e}^a(s) \frac{\partial V}{\partial x^a} V(s)^{-1} + \dot{e}^a(s) A_a(e(s)) \right) V(s) U_V(s) \\
&= - \left(V(s)^{-1} A_a(e(s)) V(s) + V(s)^{-1} \frac{\partial V}{\partial x^a} \right) \dot{e}^a(s) U_V(s)
\end{aligned}$$

Portanto, $U_V(s)$ satisfaz a equação do transporte paralelo para a conexão A_V , e logo $U_V(e, A) = V(e(1))^{-1} U(e, A) V(e(0))$. Esta ação se estende naturalmente a conexões generalizadas por $\bar{A}_V(e) = V(e(1))^{-1} \bar{A}(e) V(e(0))$.

Podemos também estender as transformações de gauge a triádes $E = E_i^a(x) \tau^i \frac{\partial}{\partial x^a}$. Os τ^i aqui são geradores do dual $su(2)^*$, a saber, a base dual de matrizes 2×2 definida por $\text{Tr}(\tau_i \tau^j) = \delta_i^j$; é fácil verificar que $\tau^i = -\delta^{ij} \tau_j$. A ação da transformação de gauge sobre $su(2)^*$ será a ação dual: se $u \in su(2)$ e $w \in su(2)^*$, então $\text{Tr}(u w_V) = \text{Tr}(V^{-1} u V w)$.

Pelas propriedades do traço, vemos que $w_V = V w V^{-1}$ e, portanto, se $w = w_i \tau^i$, $w_V = w_i V \tau^i V^{-1} = w_i S_j^i \tau^j$. Ora, então

$$\begin{aligned}
S_j^i &= \delta_{jk} \text{Tr}(V \tau^i V^{-1} \tau^k) \\
&= \delta_{jk} \text{Tr}(\tau^i V^{-1} \tau^k V) \\
&= \delta_{jk} \text{Tr}((-\delta^{il} \tau_l) V^{-1} (-\delta^{km} \tau_m) V) \\
&= \delta_{jk} \delta^{il} \delta^{km} \text{Tr}(\tau_l V^{-1} \tau_m V) \\
&= \delta_{jk} \delta^{il} R_l^k
\end{aligned}$$

Em termos matriciais, isto significa $S = R^T = R^{-1}$ (pois $R \in SO(3)$). Definimos $(E_V)_j^a = S_j^k E_k^a$. Agora, note que

$$\begin{aligned}
(E_V)_i^a (E_V)_j^b \delta^{ij} &= S_i^k E_k^a S_j^m E_m^b \delta^{ij} \\
&= E_k^a E_m^b (S_i^k S_j^m \delta^{ij}) \\
&= E_k^a E_m^b \delta^{km}
\end{aligned}$$

onde a última linha segue do fato de que $S \in SO(3)$ (de fato, a expressão $S_i^k S_j^m \delta^{ij} = \delta^{km}$ é a propriedade $S^T S = I$ expressa tensorialmente). Portanto, a métrica é invariante por transformações de gauge – o que é de se esperar,

dado estas agem sobre graus de liberdade não presentes na formulação original da GR.

As considerações do parágrafo acima indicam que nossa teoria, como quantização da GR, deve conter apenas estados invariantes por gauge, ou seja, apenas estados Ψ tais que $\Psi(\bar{A}) = \Psi(\bar{A}_V)$.⁶ Chamamos de $\mathcal{H}_0$ o subespaço de tais estados em $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$. De fato, este espaço também pode ser definido como

$$\mathcal{H}_0 = L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, \mu_0)$$

onde $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ é o espaço das conexões generalizadas módulo transformações de gauge (obtida de forma análoga à construção da seção anterior). μ_0 é uma medida regular induzida pelas medidas de Haar. Veremos este assunto em mais detalhes no Capítulo 4.

2.4

Redes de spin

Agora definiremos certos estados, chamados estados de rede de spin, que formam uma base ortonormal para $\mathcal{H}_0$. Vamos primeiro dar a definição num exemplo simples, e depois utilizar as mesmas idéias no caso geral.

Considere o grafo γ formado por dois vértices p_1, p_2 , ligados por três arestas e_1, e_2, e_3 . Associe a cada aresta uma representação irredutível de $SU(2)$ (ou “cor”)⁷ j_1, j_2, j_3 (como no diagrama abaixo), satisfazendo a condição de Clebsch-Gordon $|j_a - j_b| \leq j_c \leq j_a + j_b$ (onde a, b, c é qualquer permutação de $1, 2, 3$).

⁶Esta ação do grupo de transformações de gauge sobre $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$ é unitária, pois o produto interno em $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$ é invariante – o que basta verificar para funções cilíndricas, efetuando a substituição $(U_i)_V = V(e_i(1))^{-1} U_i V(e_i(0))$ e observando que $d\mu_H(U_i) = d\mu_H((U_i)_V)$, pela invariância da medida de Haar.

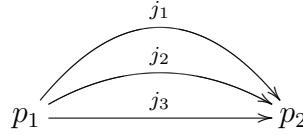
⁷As representações irredutíveis de $SU(2)$ são exatamente as seguintes: para cada “spin” $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, o espaço de Hilbert é o produto tensorial simetrizado

$$H_{(j)} = \bigotimes_{n=1}^{2j} \mathbf{C}^2$$

ou seja, o espaço dos tensores completamente simétricos com $2j$ índices $u^{A_1 \dots A_{2j}}$. A representação de $SU(2)$ em $H_{(j)}$ é então definida pelo produto totalmente simetrizado de $2j$ cópias de U :

$$\begin{aligned} j[U]_{B_1 \dots B_{2j}}^{A_1 \dots A_{2j}} &= U_{(B_1}^{(A_1} \dots U_{B_{2j})}^{A_{2j})} \\ &= \frac{1}{(2j)!^2} \sum_{\pi, \sigma \in \mathbf{S}_n} U_{B_{\sigma(1)}}^{A_{\pi(1)}} \dots U_{B_{\sigma(2j)}}^{A_{\pi(2j)}} \end{aligned}$$

Para simplificar nossas expressões, utilizaremos a “notação de índices abstratos”, em que se denota um elemento de $H_{(j)}$ por u^A , onde A é um “índice na representação j ”.



Isto é equivalente a pedir que cada um dos j_a, j_b, j_c esteja no produto tensorial dos outros dois, como se vê do teorema da soma de momentos angulares:

$$H_{(j_a)} \otimes H_{(j_b)} \approx H_{(|j_a-j_b|)} \oplus H_{(|j_a-j_b|+1)} \oplus \dots \oplus H_{(j_a+j_b)}$$

Então tome o produto tensorial $\tilde{H} = H_{(j_1)} \otimes H_{(j_2)} \otimes H_{(j_3)}$. Os vetores deste espaço são da forma u^{A_1, A_2, A_3} , onde cada A_a é um índice na representação j_a . É possível mostrar que o subespaço dos vetores invariantes por $SU(2)$ em $\tilde{H}$ é unidimensional, gerado por um vetor v^{A_1, A_2, A_3} . Chamamos este vetor de “entrelaçador”.

Imagine que associamos a cada um dos dois vértices p_i uma cópia $v_i^{A_1, A_2, A_3}$ do entrelaçador. Definimos então um estado de rede de spin da seguinte forma. Cada $j_a[U]$ pode ser considerado um operador linear de $H_{(j_a)}$ em $H_{(j_a)}$, por $u^A \mapsto j_a[U]_B^A u^B$. Assim, dada uma conexão generalizada $\bar{A}$, podemos contrair cada $j_a[\bar{A}(e_a)]$ com os índices na representação j_a presentes nos entrelaçadores dos dois vértices, obtendo o escalar

$$\Psi_s(\bar{A}) = j_1[\bar{A}(e_1)]_{lp} j_2[\bar{A}(e_2)]_{mq} j_3[\bar{A}(e_3)]_{nr} v_1^{lmn} v_2^{pqr}$$

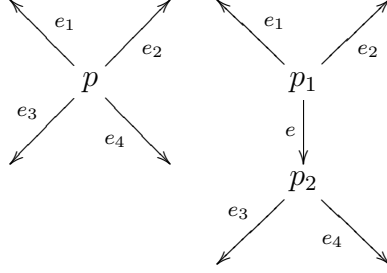
Definiremos agora uma rede de spin para um grafo contendo apenas vértices trivalentes⁸, por meio de uma generalização simples da definição dada acima. Associe a cada aresta e_i de γ uma cor j_{e_i} (agindo no espaço $H_{(e_i)}$), com a seguinte restrição. Para cada vértice p do grafo, as cores das três arestas que nele se encontram deve a condição de Clebsch-Gordon, e portanto define um entrelaçador com três índices, cada um associado a uma das arestas. Assim, podemos definir uma função cilíndrica da seguinte maneira. Dada uma conexão generalizada $\bar{A}$, contraímos cada $j_a[\bar{A}(e_a)]$ com os índices na representação j_a presentes nos entrelaçadores das extremidades de e_a ; cada aresta assim se contrai dois índices de entrelaçadores, resultando num escalar que representamos por

$$\Psi_s(\bar{A}) = \left(\bigotimes_i j_i[\bar{A}(e_i)] \right) \cdot \left(\bigotimes_r v_r \right)$$

⁸Valências menores não nos interessam: podemos considerar vértices univalentes proibidos, e podemos eliminar um vértice bivalente que liga duas arestas e_1 e e_2 , substituindo-as pela composta $e_1 \circ e_2$.

(onde o $\cdot$ representa contração de índices de acordo com a topologia do grafo.)

Agora, só falta considerar o que acontece com vértices de valência $n > 3$. De fato, cada tal vértice pode ser decomposto como um “grafo virtual” que contém, ele próprio, apenas “vértices virtuais” trivalentes, conforme ilustrado no diagrama abaixo.



Neste diagrama, um vértice quadrivalente p , onde se encontram as arestas $e_1, \dots, e_4$, é decomposto como dois vértices trivalentes p_1, p_2 , ligados por uma “aresta virtual” e . Note que aqui há uma ambiguidade – podemos ligar e_1 e e_2 a p_1 , e e_3 e e_4 a p_2 ; mas igualmente, podemos ligar e_1 e e_3 a p_1 , e e_2 e e_4 a p_2 , e assim por diante. Por enquanto, faça uma escolha arbitrária de decomposição. Esta escolha impõe uma condição de Clebsch-Gordon sobre a coloração da aresta virtual e . Em geral, um vértice n -valente pode ser decomposto como um grafo virtual com $n - 2$ vértices virtuais trivalentes; a decomposição pode ser feita de forma arbitrária. Cada uma das arestas virtuais assim geradas está sujeita a uma condição de Clebsch-Gordon.

Assim, seja p_r um vértice de γ no qual se encontram as arestas $e_1, \dots, e_n$ (com representações associadas $j_{e_1}, \dots, j_{e_n}$ respectivamente). Tome o produto tensorial $H_{(e_1)} \otimes \dots \otimes H_{(e_n)}$. Os vetores deste espaço são da forma $u^{A_1 \dots A_n}$, onde cada A_i é um índice na representação j_{e_i} . Seja H_{p_r} o subespaço de vetores invariantes por $SU(2)$ em $H_{(e_1)} \otimes \dots \otimes H_{(e_n)}$. Como vimos acima, se p_r for trivalente, H_{p_r} tem dimensão 1; caso a valência seja maior, é possível mostrar que a dimensão de H_{p_r} é igual ao número de colorações possíveis (compatíveis com as condições de Clebsch-Gordon) das arestas virtuais na decomposição trivalente de p_r . É possível ver que cada uma destas colorações define um vetor em H_{p_r} , e que os vetores associados a diferentes colorações são ortogonais entre si. Obtemos assim uma base ortonormal formada por possíveis entrelaçadores de p_r . Escolha um entrelaçador v_{p_r} para cada vértice.

Um grafo ao qual associamos cores e entrelaçadores é chamado uma *rede de spin*. A cada rede de spin s fazemos corresponder uma função cilíndrica $\Psi_s(\bar{A})$, invariante por gauge, da mesma forma como fizemos acima. A coloração associa à aresta e_i (ligando p_r a p_s , digamos) um operador linear $j_{e_i}[\bar{A}(e_i)]$:

$H_{(e_i)} \rightarrow H_{(e_i)}$. Pela construção acima, está definido em p_r um espaço-produto que contém $H_{(e_i)}$; idem para p_s . Logo, o entrelaçador v_r possui um índice na representação j_{e_i} ; o mesmo vale para v_s . Assim, podemos contrair $j_i[\bar{A}(e_i)]$ com os índices apropriados de v_r e v_s . Por construção, cada v_r tem justamente os índices certos para contrair com todos os operadores associados às arestas que nele chegam, e assim obtemos um escalar que depende apenas da rede de spin e da conexão generalizada $\bar{A}$, representado simbolicamente pela mesma expressão dada acima. (Na verdade, este escalar depende também das escolhas de decomposição virtual em cada vértice de valência $n > 3$: cada decomposição topologicamente distinta de um vértice p_r induz uma base ortonormal distinta para o subespaço H_{p_r} , e portanto um conjunto de entrelaçadores distinto para cada vértice.)

É possível mostrar (3) que (fixadas as decomposições dos vértices) os estados Ψ_s formam uma base ortogonal para $\mathcal{H}_0$, que pode ser normalizada de forma simples. (Vale enfatizar que $(\Psi_s, \Psi_{s'}) \neq 0$ se e somente se s e s' têm *a mesma grafo* e a mesma coloração!) Note que esta base é não-enumerável, e de fato não existe base enumerável para $\mathcal{H}_0$; em outras palavras, este espaço é não-separável. No que vem a seguir, consideraremos também o subespaço Cyl_0 das funções cilíndricas invariantes por gauge, ou seja, das combinações finitas de estados de redes de spin; este espaço é denso em $\mathcal{H}_0$.

2.5

Estados invariantes por difeomorfismos

Vamos considerar agora o grupo $\widetilde{\text{Diff}}$ de “difeomorfismos estendidos” em M , ou seja, funções diferenciáveis com inversa diferenciável, exceto talvez em um número finito de pontos. (Veremos à frente por que não é suficiente tomar simplesmente o grupo Diff de difeomorfismos.) Sob a ação de $\widetilde{\text{Diff}}$, conexões em $\mathcal{A}$ se comportam como 1-formas, ou seja:

$$(\phi^* A)(x) v = A(\phi(x)) (d\phi(x) \cdot v)$$

Assim, podemos definir a ação de $\widetilde{\text{Diff}}$ sobre o espaço $\mathcal{H}_0$ por $U_\phi \Psi(A) = \Psi(\phi^* A)$. Novamente, é fácil ver que o produto interno em $\mathcal{H}$ é invariante por difeomorfismos, usando o fato de que as holonomias se transformam por

$$\begin{aligned} U(e, A) &\mapsto U(e, \phi^* A) \\ &= T \exp \int_0^1 (\phi^* A)(e(s)) \dot{e}(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T \exp \int_0^1 A(\phi(e(s))) (d\phi(e(s)) \cdot \dot{e}(s)) ds \\
&= T \exp \int_0^1 A(\phi(e(s))) \frac{d}{ds}(\phi \circ e)(s) ds \\
&= U(\phi \circ e, A)
\end{aligned}$$

Infelizmente, $\mathcal{H}_0$ não contém nenhum estado não-trivial que seja invariante por $\widetilde{\text{Diff}}$. Isto é de se esperar intuitivamente: como vimos, todo estado em $\mathcal{H}_0$ pode ser escrito como combinação linear (possivelmente infinita, mas enumerável) de estados de rede de spin Φ_{s_i} , mas o grafo de cada rede de spin s_i pode ser levado por $\widetilde{\text{Diff}}$ numa quantidade não-enumerável de grafos diferentes.

Precisamos então procurar elementos invariantes em outro espaço, Cyl_0^* . Este é o espaço dos funcionais lineares σ que levam $\Psi \in \text{Cyl}_0$ em $\langle \sigma | \Psi \rangle \in \mathbb{C}$. $\widetilde{\text{Diff}}$ tem uma ação natural sobre Cyl_0^* por dualidade:

$$\langle U_\phi \sigma | \Psi \rangle = \langle \sigma | U_{\phi^{-1}} \Psi \rangle$$

Considere agora a aplicação $P_{\text{diff}} : \text{Cyl}_0 \rightarrow \text{Cyl}_0^*$ definida por

$$\langle P_{\text{diff}} \Psi | \Psi' \rangle = \sum_{\Psi'' = U_\phi \Psi} (\Psi'', \Psi')$$

(onde somamos sobre todos os $\Psi'' \in \text{Cyl}_0$ tais que existe $\phi \in \widetilde{\text{Diff}}$ com $\Psi'' = U_\phi \Psi$). Ora, a soma acima terá, sempre, apenas um número finito de termos não-nulos, e logo está bem-definida para todo Ψ' . De fato, basta ver isso para estados de rede de spin $\Psi_s, \Psi_{s'}$. O produto interno $(U_\phi \Psi_s, \Psi_{s'})$ só é não-nulo quando ϕ leva cada aresta e_i de s numa aresta e'_j de s' , e se todos os pares e_i, e'_j têm a mesma coloração. Logo, as redes s que contribuem para a soma estão fixadas a menos de variações de ordenação e orientação das arestas. Ou seja, P_{diff} é uma aplicação bem-definida que “toma a média” sobre todo o grupo $\widetilde{\text{Diff}}$.

É evidente que os estados $P_{\text{diff}} \Psi$ são invariantes por $\widetilde{\text{Diff}}$. Por outro lado, se definimos, em $P_{\text{diff}}(\text{Cyl}_0)$,

$$(P_{\text{diff}} \Psi, P_{\text{diff}} \Psi') = \langle P_{\text{diff}} \Psi | \Psi' \rangle$$

então é fácil verificar que este é um produto interno, o que faz de $P_{\text{diff}}(\text{Cyl}_0)$ um espaço pré-Hilbert – e este espaço é gerado pela base ortonormal $\{P_{\text{diff}} \Psi_{[s]}\}$, onde cada $[s]$ é uma classe de equivalência por $\widetilde{\text{Diff}}$ de redes de spin. (É possível verificar (4) que o conjunto $\{[s]\}$ é *enumerável* – e que isto acontece

apenas porque nos permitimos tomar difeomorfismos *estendidos*.⁹⁾ Assim, o completamento deste espaço na norma definida pelo produto interno acima constitui um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$, que é o espaço de todos os estados físicos (ou seja, de norma finita) invariantes por $\widetilde{\text{Diff}}$.

2.6 Operadores

Assim como na abordagem canônica vista anteriormente, caso tentássemos definir um campo de operadores correspondente à conexão A , descobriríamos que ele teria de ser um campo distribuicional, e, logo, precisa ser “borrado” (integrado) para resultar num operador bem-definido. A graça do espaço $\mathcal{H}_0$ é que nele podemos definir um operador correspondente à holonomia da conexão sobre uma curva e (ou mais exatamente, quatro operadores correspondendo aos seus componentes matriciais), agindo por multiplicação:

$$\left(\hat{U}(e, A)_b^a \Psi \right) [A] = U(e, A)_b^a \Psi[A]$$

Do operador holonomia, derivamos operadores (invariantes por gauge) chamados *laços de Wilson*: $\hat{T}_\alpha(A) = \frac{1}{2} \text{Tr} \hat{U}(\alpha, A)$, onde α é um laço fechado. Se s é uma rede de spin cujo grafo não intercepta α , então

$$\hat{T}_\alpha \Psi_s = \Psi_{s \cup \alpha}$$

onde $s \cup \alpha$ é a rede de spin formada adicionando a s o laço α com a representação de spin $\frac{1}{2}$. Note que os laços de Wilson são operadores unitários.

Definimos também, de maneira apenas formal, um operador “derivada funcional” $-i \frac{\delta}{\delta A_a^i(x)}$. Este operador também precisa ser borrado, mas apenas sobre duas dimensões, como veremos agora. Tome uma superfície $\Sigma : \sigma \mapsto x^a(\sigma)$ em M e considere

$$E_i(\Sigma) = -i \int_\Sigma \frac{\delta}{\delta A^i(x(\sigma))} \cdot dS(\sigma)$$

⁹⁾De fato, considere um vértice p do qual partem n arestas $e_1, \dots, e_n$. Seu espaço tangente $T_p M$ possui n tangentes $\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_n$; gostaríamos de que a nossa equivalência entre grafos fosse capaz de tomar como equivalentes vizinhanças de quaisquer vértices n -valentes, e portanto deveríamos ter mapas capazes de levar qualquer configuração de n tangentes em qualquer outra. No entanto, um difeomorfismo (não-estendido) ϕ induz uma transformação linear (tridimensional) $D\phi(p) : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M$. Assim, uma escolha de ϕ nos dá apenas três escolhas de tangentes; se $n > 3$, as outras tangentes estarão automaticamente determinadas. Assim, consideramos que a classe de difeomorfismos deixa graus de liberdade “artificiais” no conjunto de classes de equivalência de grafos; claramente, tomar difeomorfismos estendidos é suficiente para eliminar esta liberdade extra.

$$= -i \int_{\Sigma} \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a(\sigma)}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b(\sigma)}{\partial \sigma^2} \frac{\delta}{\delta A_c^i(x(\sigma))} d\sigma^1 d\sigma^2$$

onde ϵ_{abc} é o símbolo totalmente antissimétrico¹⁰. Vamos ver que o operador $E_i(\Sigma)$ está bem-definido sobre um estado de rede de spin $\Psi_s(A)$, definindo assim um operador de “fluxo gravitacional” sobre a superfície Σ . Para fazer isso, precisamos antes entender o que a “derivada funcional” $-i \frac{\delta}{\delta A_a^i(x)}$ faz com uma holonomia $U(e, A)$. Tome a variação $\delta A_b^j(y) = \delta^{ij} \delta_{ab} \delta^{(3)}(y, x) \tau_i$. Suponha que há apenas um $s_0 \in [0, 1]$ com $e(s_0) = x$. Então, pelas propriedades da exponencial ordenada,

$$\begin{aligned} U(e, A + t \delta A) &= T \exp \int_0^1 \dot{e}^a(s) (A_a^i(e(s)) + t \delta^{ij} \delta_{ab} \delta^{(3)}(e(s), x)) \tau_i ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(T \exp \int_{s_0 + \frac{\epsilon}{2}}^1 \dots \right) \left(T \exp \int_{s_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{s_0 + \frac{\epsilon}{2}} \dots \right) \\ &\quad \times \left(T \exp \int_0^{s_0 - \frac{\epsilon}{2}} \dots \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} U(e|_{s_0 + \frac{\epsilon}{2}}^1, A + t \delta A) \left(T \exp \int_{s_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{s_0 + \frac{\epsilon}{2}} \dots \right) \\ &\quad \times U(e|_0^{s_0 - \frac{\epsilon}{2}}, A + t \delta A) \end{aligned}$$

(Aqui, $e|_a^b$ denota a curva obtida restringindo o domínio de e ao intervalo $[a, b]$.)

Para $\epsilon \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} &T \exp \int_{s_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{s_0 + \frac{\epsilon}{2}} \dot{e}^a(s) (A_a^i(e(s)) + t \delta^{ij} \delta_{ab} \delta^{(3)}(e(s), x)) \tau_i ds \\ &\approx \exp \left(\dot{e}^a(s_0) (\epsilon A_a^i(x) + t \delta^{ij} \delta_{ab}) \tau_i \right) \\ &\approx \exp \left(t \dot{e}^b(s_0) \tau_j \right) \end{aligned}$$

Portanto, como $\delta A(y) = 0$ para $y \neq x$,

$$\frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} U(e, A) = \left[\frac{d}{dt} U(e, A + t \delta A) \right]_{t=0}$$

¹⁰ $\epsilon_{abc} = 1$ se abc é uma permutação par de 123, -1 se abc é uma permutação ímpar, e 0 se abc tem elementos iguais.

$$= \dot{e}^a(s_0) U(e|_{s_0}^1, A) \tau_i U(e|_0^{s_0}, A)$$

Em geral, se $e(s_1) = e(s_2) = \dots = e(s_n) = x$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A_i^a(x)} U(e, A) &= \sum_k \dot{e}^a(s_k) U(e|_{s_k}^1, A) \tau_i U(e|_0^{s_k}, A) \\ &= \int_0^1 \dot{e}^a(s) U(e|_s^1, A) \tau_i U(e|_0^s, A) \delta^{(3)}(e(s), x) ds \end{aligned}$$

Agora, chame de “punções” os pontos de interseção entre Σ e o grafo de s . Vamos considerar primeiramente o caso em que Σ e s se interceptam em uma única punção p , que fica no meio da aresta e . Seja j_e a cor de e , ou seja, a representação de $SU(2)$ associada a e . Então, se os geradores infinitesimais de j_e são $\tau_i^{(j_e)}$,

$$\frac{\delta}{\delta A_i^a(x)} j_e[U(e, A)] = \int_0^1 \dot{e}^a(s) j_e[U(e|_s^1, A)] \tau_i^{(j_e)} j_e[U(e|_0^s, A)] \delta^{(3)}(e(s), x) ds$$

Lembramos que os estados de rede de spin são definidos por contrações das holonomias, nas representações associadas às arestas. Assim, podemos isolar o termo correspondente à representação j_e , obtendo coeficientes $\Psi_{(s-e)}^{lm}(A)$:

$$\Psi_s(A) = \Psi_{(s-e)}^{lm}(A) j_e[U(e, A)]_{lm}$$

onde l, m são índices em $H_{(e)}$. Como e é a única aresta que atravessa Σ , podemos considerar estes coeficientes constantes na derivação funcional:

$$\begin{aligned} E_i(\Sigma) \Psi_s(A) &= -i \int_{\Sigma} \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a(\sigma)}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b(\sigma)}{\partial \sigma^2} \Psi_{(s-e)}^{lm}(A) \\ &\quad \times \left(\frac{\delta}{\delta A_c^i(x(\sigma))} j_e[U(e, A)]_{lm} \right) d\sigma^1 d\sigma^2 \\ &= -i \int_{\Sigma} \int_0^1 \Psi_{(s-e)}^{lm}(A) \left(j_e[U(e|_s^1, A)] \tau_i^{(j_e)} j_e[U(e|_0^s, A)] \right)_{lm} \\ &\quad \times \delta^{(3)}(e(s), x(\sigma)) \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a(\sigma)}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b(\sigma)}{\partial \sigma^2} \frac{de^c(s)}{ds} ds d\sigma^1 d\sigma^2 \end{aligned}$$

Reconhecemos aí o jacobiano da mudança de variáveis

$(\sigma^1, \sigma^2, s) \mapsto (x^a, x^b, e^c)$. Caso a curva e não seja tangente a Σ , o jacobiano será não-nulo e poderemos calcular a integral tridimensional sobre $\Sigma \times [0, 1]$:

$$\begin{aligned} E_i(\Sigma) \Psi_s(A) &= -i \int_{\Sigma \times [0,1]} \Psi_{(s-e)}^{lm}(A) \left(j_e[U(e|_s^1, A)] \tau_i^{(j_e)} j_e[U(e|_0^s, A)] \right)_{lm} \\ &\quad \times \delta^{(3)}(e(s), x(\sigma)) dV \\ &= -i \Psi_{(s-e)}^{lm}(A) \left(j_e[U(e|_s^1, A)] \tau_i^{(j_e)} j_e[U(e|_0^s, A)] \right)_{lm} \end{aligned}$$

Caso o jacobiano seja nulo, a integral vale zero. Em particular, apenas punções não-tangenciais contribuem para $E_i(\Sigma) \Psi_s(A)$. Em resumo, o efeito dos operadores $E_i(\Sigma)$ sobre $\Psi_s(A)$ é simplesmente “interromper” a holonomia das curvas que cruzam Σ e inserir uma matriz $-i \tau_i^{(j_e)}$ nas punções. No caso de uma punção num vértice p do grafo, é possível mostrar (5) que o efeito de $E_i(\Sigma)$ é o seguinte. Escolha uma orientação arbitrária para Σ . Separe as arestas que encontram p em três classes – “para cima”, “para baixo” e “tangencial” – de acordo com sua posição em relação à orientação escolhida. Decomponha p num grafo virtual (veja a seção 2.4) tal que todas as arestas “para cima” se ligam (talvez indiretamente) a uma aresta virtual “para cima”, todas as arestas “para baixo” a uma aresta virtual “para baixo”, e todas as arestas tangenciais a uma aresta virtual “tangencial”. Sejam j^u, j^d, j^t , respectivamente, as cores destas arestas. Então $E_i(\Sigma)$ insere uma matriz $-i \tau_i^{(j^u)}$ na aresta “para cima”, e uma matriz $-i \tau_i^{(j^d)}$ na aresta “para baixo”.

Note que $E_i(\Sigma) \Psi_s(A)$ não é um estado de rede de spin, e de fato não pertence a $\mathcal{H}_0$; logo, os $E_i(\Sigma)$ não são operadores invariantes por gauge. No entanto, é fácil ver que $E(\Sigma) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 E_i(\Sigma) E_i(\Sigma)}$ é invariante por gauge quando age em estados com *uma só* punção. De fato, para um tal Ψ_s , temos¹¹

$$\begin{aligned} E^2(\Sigma) \Psi_s(A) &= -\Psi_{(s-e)}^{lm}(A) \left(j_e[U(e|_s^1, A)] \left(\sum_{i=1}^3 \tau_i^{(j_e)} \tau_i^{(j_e)} \right) j_e[U(e|_0^s, A)] \right)_{lm} \\ &= \Psi_{(s-e)}^{lm}(A) \left(j_e[U(e|_s^1, A)] (j_e(j_e + 1) \mathbf{I}_{(j_e)}) j_e[U(e|_0^s, A)] \right)_{lm} \\ &= j_e(j_e + 1) \Psi_s(A) \end{aligned}$$

¹¹Lembramos que o vetor de operadores do spin j , $\mathbf{j} = (\tau_1^{(j)}, \tau_2^{(j)}, \tau_3^{(j)})$, satisfaz

$$\mathbf{j}^2 = j(j+1) \mathbf{I}$$

Logo $E(\Sigma) \Psi_s(A) = \sqrt{j_e(j_e + 1)} \Psi_s(A)$. A idéia agora é procurar um operador que seja invariante por gauge para *qualquer* estado de rede de spin. Para fazer isso, basta dividir Σ em pedaços suficientemente pequenos para que cada punção caia em um pedaço diferente. Ou seja, considere uma sequência $\Sigma^{(n)} = \left(\Sigma_k^{(n)}\right)_{k=1}^n$ de partições “cada vez mais finas” de Σ e o operador

$$\mathbf{A}(\Sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k E(\Sigma_k^{(n)})$$

Dada uma rede de spin s , existe uma partição $\Sigma^{(n)}$ tal que cada punção cai num pedaço diferente Σ_k . Para estes k , vale $E(\Sigma_k) \Psi_s(A) = \sqrt{j(j+1)} \Psi_s(A)$; os outros pedaços não contribuem. Deste n em diante, o valor do operador fica estacionado, e portanto o limite é trivial. Em resumo,

$$\mathbf{A}(\Sigma) \Psi_s = \sum_{p_i \in (\gamma \cap \Sigma)} \sqrt{j_i(j_i + 1)} \Psi_s$$

Para o caso em que ocorrem punções em vértices do grafo de s , é possível mostrar que

$$\mathbf{A}(\Sigma) \Psi_s = \frac{1}{2} \sum_{p_i \in (\gamma \cap \Sigma)} \sqrt{2j_i^u(j_i^u + 1) + 2j_i^d(j_i^d + 1) - j_i^t(j_i^t + 1)} \Psi_s$$

Note que esta fórmula pode ser considerada como o caso geral, pois um ponto interior de uma aresta sempre pode ser considerado como um vértice bivalente ligando duas arestas. Neste caso, $j_i^t = 0$ e $j_i^u = j_i^d$, e portanto a raiz se reduz a $\sqrt{4j_i^u(j_i^u + 1)}$.

Vamos agora obter o limite clássico de $\mathbf{A}(\Sigma)$. Substituamos de volta o operador derivada $-i \frac{\delta}{\delta A_i^c(x)}$ por sua correspondente clássica, o momento conjugado $E_i^c(x)$. Para partições suficientemente finas, $\Sigma_k^{(n)}$ é arbitrariamente pequeno, e logo podemos tomar o valor de E_i^c constante, obtendo

$$\begin{aligned} E_i(\Sigma_k^{(n)}) &= \int_{\Sigma_k^{(n)}} \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a(\sigma)}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b(\sigma)}{\partial \sigma^2} E_i^c(x(\sigma)) d\sigma^1 d\sigma^2 \\ &\approx a(\Sigma_k^{(n)}) \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2} E_i^c(x_k) \end{aligned}$$

onde $a(\Sigma_k^{(n)})$ é a área de $\Sigma_k^{(n)}$ em termos dos parâmetros σ^1, σ^2 . Logo

$$\mathbf{A}(\Sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a(\Sigma_k^{(n)}) \sqrt{\sum_i \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2} E_i^c(x_k) \epsilon_{def} \frac{\partial x^d}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^e}{\partial \sigma^2} E_i^f(x_k)}$$

Mas esta é precisamente a definição da soma de Riemann para a integral sobre Σ :

$$\mathbf{A}(\Sigma) = \int_{\Sigma} \sqrt{\sum_i \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2} E_i^c(x(\sigma)) \epsilon_{def} \frac{\partial x^d}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^e}{\partial \sigma^2} E_i^f(x(\sigma))} d\sigma^1 d\sigma^2$$

Fazendo $x^1 = \sigma^1$, $x^2 = \sigma^2$, $x^3 = 0$, obtemos

$$\mathbf{A}(\Sigma) = \int_{\Sigma} \sqrt{\sum_i E_i^3(x(\sigma)) E_i^3(x(\sigma))} d\sigma^1 d\sigma^2$$

Lembrando da definição da tríade densitizada, temos

$$\sum_i E_i^3(x(\sigma)) E_i^3(x(\sigma)) = (\det g) g^{33} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$$

Mas, se imaginarmos que a 3-variedade M está parametrizada localmente por $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, então $\Sigma = \{p \in M : \sigma_3 = 0\}$ e o valor $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ é precisamente o determinante da métrica bidimensional η definida como a restrição de g a Σ . Temos, portanto,

$$\mathbf{A}(\Sigma) = \int_{\Sigma} \sqrt{\det \eta} d\sigma^1 d\sigma^2$$

que é precisamente a área de Σ .

Da mesma forma, como se vê, por exemplo, em (4), podemos definir um operador $\mathbf{V}(\mathcal{R})$ cujo limite clássico é o volume dentro da região $\mathcal{R}$. Da mesma forma que $\mathbf{A}(\Sigma)$, o operador $\mathbf{V}(\mathcal{R})$ tem as redes de spin como autovetores; especificamente, ele consiste de uma soma de termos correspondentes aos vértices da rede que estão dentro de $\mathcal{R}$.

Estas propriedades induzem uma interpretação física para a representação por laços. Cada vértice de uma rede de spin representa um quantum de volume, um “pedaço elementar de espaço”; se dois vértices são ligados por uma aresta, isto significa que os dois pedaços são contíguos, e a superfície de contato entre estes dois pedaços é um quantum de área.

Mais ainda, os estados $\widetilde{\text{Diff}}$ -invariantes são gerados por classes de equivalência de redes de spin, ou seja, estes estados eliminam toda a informação sobre a posição dos vértices e arestas em relação a qualquer parametrização específica da variedade M , retendo apenas a informação geométrica. Assim, a

ação induzida dos operadores de área e volume sobre $\mathcal{H}_{\text{diff}}$ define uma teoria de excitações do espaço em M que não faz referência alguma a uma métrica “de fundo”.