

**Alex Laier Bordignon**

## **Navier-Stokes em GPU**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Geovan Tavares dos Santos

Rio de Janeiro  
Março de 2006



**Alex Laier Bordignon**

## **Navier-Stokes em GPU**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Geovan Tavares dos Santos**

Orientador

Departamento de Matemática - PUC-Rio

**Prof. Bruno Feijó**

Departamento de Informática – PUC-Rio

**Prof. Waldemar Celes Filho**

Departamento de Informática – PUC-Rio

**José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 23 de fevereiro de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Alex Laier Bordignon**

Graduou-se em Matemática na Universidade Estadual de Maringá (UEM).

Ficha Catalográfica

Bordignon, Alex Laier

Navier-Stokes em GPU / Alex Laier Bordignon; orientador: Geovan Tavares dos Santos. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2006.

v., 60 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Unidade de Processamento Gráfica. 3. Equação de Navier-Stokes. 4. Matemática Discreta. 5. Computação Gráfica. I. Santos, Geovan Tavares dos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

Ao meu orientador Geovan Tavares, pelo apoio, simpatia de sempre, e incentivo para a realização deste trabalho.

Aos meus colegas da PUC-Rio, quem me fizeram adorar esse lugar.

## Resumo

Bordignon, Alex Laier; Santos, Geovan Tavares dos. **Navier-Stokes em GPU**. Rio de Janeiro, 2006. 60p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesse trabalho, mostramos como simular um fluido em duas dimensões em um domínio com fronteiras arbitrárias. Nosso trabalho é baseado no esquema stable fluids desenvolvido por Joe Stam. A implementação é feita na GPU (Graphics Processing Unit), permitindo velocidade de interação com o fluido. Fazemos uso da linguagem Cg (C for Graphics), desenvolvida pela companhia NVidia. Nossas principais contribuições são o tratamento das múltiplas fronteiras, onde aplicamos interpolação bilinear para atingir melhores resultados, armazenamento das condições de fronteira usa apenas um canal de textura, e o uso de confinamento de vorticidade.

## Palavras-chave

Unidade de Processamento Gráfica. Equação de Navier-Stokes. Matemática Discreta. Computação Gráfica.

## Abstract

Bordignon, Alex Laier; Santos, Geovan Tavares dos. **Navier-Stokes in GPU**. Rio de Janeiro, 2006. 60p. MsC Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work we show how to simulate fluids in two dimensions in a domain with arbitrary boundaries. Our work is based on the stable fluid scheme developed by Jos Stam. The implementation is done in GPU (Graphics Processing Unit), thus allowing fluid interaction speed. We use the language Cg (C for Graphics) developed by the company Nvída. Our main contributions are the treatment of domains with multiple boundaries, where we apply bilinear interpolation to obtain better results, the storage of the boundary conditions in a unique texture channel, and the use of vorticity confinement.

## Keywords

Graphics Processing Unit. Navier-Stokes Equation. Discrete Math. Computer Graphics.

# Sumário

1	Introdução	10
2	Trabalhos anteriores	11
3	As Equações de Navier-Stokes	14
3.1	Modelos de Fluxo	14
3.2	A Derivada Material	15
3.3	O Divergente da Velocidade	17
3.4	Equação de Conservação de Massa	18
3.5	A Equação do Momentum	22
3.6	As Equações de Euler	27
3.7	As Equações de Navier-Stokes para fluidos Incompressíveis	27
4	Hardware Gráfico Programável	30
4.1	Historia do Hardware Gráfico	30
4.2	O Pipeline do Hardware Gráfico	32
4.3	O Pipeline do Hardware Gráfico Programável	33
5	Fluidos Estáveis	39
5.1	Navier-Stokes para fluidos incompressíveis e o método da projeção	39
5.2	Método numérico na Resolução da Equação de Navier-Stokes	42
5.3	Implementação	46
5.4	Condições de fronteira	51
6	Resultados e Conclusão	54
7	Trabalhos futuros	57
	Referências Bibliográficas	58

## Lista de figuras

2.1	Simulação obtida no trabalho (foster1997)	11
2.2	Resultado obtido no trabalho (stam1999).	12
2.3	Simulação obtida no trabalho (harris2004), a tinta sendo carregada por um fluido. Esse aplicativo atinge taxas interativas.	13
3.1	Elemento infinitesimal movendo-se com o fluido, somente com as forças na direção $x$	23
4.1	A evolução do pipeline	31
4.2	O pipeline hardware gráfico	32
4.3	O Pipeline do Hardware Gráfico Programável	34
4.4	Como a biblioteca Cg Runtime se comunica com a API 3D	38
5.1	Uma simulação com domínio de 65536 células de fluido, com condição de fronteira definida pelo bordo da figura do peixe dourado e pelo bordo da estrela do mar	43
5.2	Um exemplo de visualização dos campos de divergência e pressão. Em vermelho as altas pressões, e em verde as altas divergências	45
5.3	Pipeline de uma etapa da simulação, como os pixels são reutilizados a cada etapa.	47
5.4	Representação da condição de fronteira com normal	51
5.5	Valores da textura para o fragment program da fronteira.	52
5.6	Interpolação bilinear para suavizar o erro na fronteira.	52
6.1	Velocidades do algoritmo para diferentes domínios e número de iterações de Jacobi	55
6.2	Velocidade determinada pelo número de iterações de Jacobi	56
6.3	Velocidade determinada pelo tamanho do domínio	56

*A maioria das disciplinas não se destina a libertar e sim a limitar. Não pergunte por quê. Seja cauteloso com o como. O por quê conduz inexoravelmente ao paradoxo. O como o aprisiona num universo de causa e efeito. Ambos negam o infinito.*

**Os Apócrifos de Arrakis, .**