

7 Modelo transiente para a formação do reboco externo

Inicialmente, durante o processo de filtração, as partículas capturadas formam um “reboco interno”. Após o “tempo de transição” (Pang e Sharma, 1987), ocorre somente filtração externa. Esta primeira camada é alimentada por novas partículas depositadas, crescendo e servindo de filtro para as partículas subsequentemente injetadas.

Neste capítulo, um modelo na micro-escala para a formação e crescimento do reboco externo é desenvolvido e soluções analíticas para o caso em que a distribuição de partículas injetadas é constante são obtidas.

7.1. Distribuição de raio de poros e crescimento do reboco externo

A distribuição de tamanho de poros no reboco externo é determinada pela distribuição de partículas retidas:

$$f_p(r_p, t) = PP[f_T(r_s, t)]. \quad (7.1)$$

Na eq. (7.1), PP é um funcional que transforma a função de distribuição de partículas retidas na função de distribuição de poros do reboco.

O número de partículas, com raio r_s , capturadas na face de entrada durante o intervalo de tempo Δt é igual à:

$$c^0 f_s(r_s, t) U(1 - \alpha[f_p(r_p, t)]) \Delta t. \quad (7.2)$$

Normalizando este número, obtém-se a distribuição de partículas capturadas por unidade de tempo:

$$f_T(r_s, t) = \frac{f_s(r_s, t)(1 - \alpha[f_p(r_p, t)])}{\int_0^{\infty} f_s(r_s, t)(1 - \alpha[f_p(r_p, t)]) dr_p}. \quad (7.3)$$

Substituindo (7.3) em (7.1), resulta em:

$$f_p(r_p, t) = PP \left[\frac{f_s(r_s, t)(1 - \alpha[f_p(r_p, t)])}{\int_0^{\infty} f_s(r_s, t)(1 - \alpha[f_p(r_p, t)]) dr_s} \right]. \quad (7.4)$$

Resolvendo a equação funcional (7.4) em relação à f_p , obtém-se outro funcional:

$$f_p(r_p, t) = P_\alpha[f_s(r_s, t)], \quad (7.5)$$

onde o funcional P_α transforma a distribuição de partículas injetadas f_s na distribuição de poros do reboco f_p .

No caso da injeção de partículas de raio único (r_{s2}), por exemplo, o reboco externo também será constituído de poros de tamanho único. Neste caso, o raio dos poros é aproximadamente igual a 0.1547 do raio da partícula retida (ver Figura 19). Portanto:

$$P_\alpha[\delta(r_s - r_{s2})] = \delta(r_p - 0.1547r_{s2}). \quad (7.6)$$

Sendo assim, da eq. (3.20), o fator de redução de fluxo do reboco α_c é igual à 0. Ou seja, após o tempo de transição, todas as partículas são capturadas na face do reboco, contribuindo para o crescimento do mesmo.

Se a suspensão injetada consiste de uma fração “ κ ” de partículas grandes, com raio r_{s2} , e uma fração $1 - \kappa$ de partículas com raio r_{s1} (onde $r_{s1} < 0.1547r_{s2}$), tem-se:

$$f_s(r_s, t) = \kappa\delta(r_s - r_{s2}) + (1 - \kappa)\delta(r_s - r_{s1}), \quad r_{s1} < 0.1547r_{s2}. \quad (7.7)$$

Neste caso, todas as partículas grandes são retidas e formam poros com raio $r_p = 0.1547r_{s2}$ (ver Figura 19) e todas as partículas pequenas são transportadas através destes poros:

$$f_p(r_p, t) = P[\kappa\delta(r_s - r_{s2}) + (1 - \kappa)\delta(r_s - r_{s1})] = \delta(r_p - 0.1547r_{s2}). \quad (7.8)$$

Portanto, da eq. (3.20), segue que:

$$\alpha_c(r_s) = \begin{cases} 1, & \text{se } r_s < 0.1547r_{s2} \\ 0, & \text{se } r_s \geq 0.1547r_{s2} \end{cases} \quad (7.9)$$

A distribuição de poros do reboco externo é determinada pela distribuição de partículas capturadas, que por sua vez, depende da distribuição de partículas injetada. Sendo assim, as propriedades (porosidade, permeabilidade, fator de redução de fluxo, acessibilidade) do reboco externo dependem da distribuição de partículas injetadas:

$$\phi_c = \phi_c[f_s(r_s, t)], \quad (7.10)$$

$$\alpha_c = \alpha_c[f_s(r_s, t)]. \quad (7.11)$$

Lembrando que a porção $(1 - a_c)Uc^{(0)}$ do fluxo de partículas é retida na face de entrada e fazendo o balanço de massa na face do reboco externo, obtém-se a equação para o crescimento da espessura do reboco l_c :

$$\{1 - \phi_c[f_s(r_s, t)]\} \frac{dl_c}{dt} = \tilde{c}^{(0)}U(1 - \alpha_c[f_s(r_s, t)]), \quad (7.12)$$

onde \tilde{c} é o volume de partículas por unidade de volume do fluido, ou seja:

$$\tilde{c}^{(0)} = c^{(0)} \frac{4}{3} \pi \int_0^{\infty} r_s^3 f_s(r_s) dr_s. \quad (7.13)$$

A eq. (7.12) relaciona o volume de partículas injetadas $\tilde{c}^{(0)}$ com a espessura do reboco externo $l_c(t)$. O transporte de partículas no interior do reboco externo é descrito pelo modelo estocástico para filtração profunda (3.30).

7.2. Exemplo: fator de redução de fluxo e porosidade constantes

Inicialmente, além de ocorrer filtração profunda, os poros da face de entrada da rocha são obstruídos pelas partículas injetadas. Num determinado tempo de transição t_{tr} (Pang e Sharma, 1987), o fator de redução de fluxo α é igual à zero e o reboco externo começa a crescer. A partir do tempo de transição, não há mais filtração profunda no meio poroso. As partículas injetadas são capturadas formando um reboco externo com um fator de redução de fluxo igual à α_c . Portanto, a fração $(1-\alpha_c)UC^0$ das partículas subsequentemente injetadas é capturada na face do reboco externo. A fração restante $\alpha_c UC^0$ será transportada através do reboco, ocorrendo filtração profunda no interior do reboco externo.

Considerando que o fator de redução de fluxo da rocha α permanece constante antes do tempo de transição, a concentração de partículas capturadas é dada pela eq. (6.5). Portanto:

$$\sigma(0,t) = \lambda'(1-\alpha)c^{(0)}Ut, \quad t \leq t_{tr}. \quad (7.14)$$

Da eq. (3.36), tem-se que quanto maior o número de partículas capturadas menor o número de poros. Definindo o tempo de transição t_{tr} como sendo o tempo necessário para que o número total de poros diminua até um valor crítico h_{cr} ; da eq. (3.36), obtém-se:

$$t = t_{tr} : \sigma_{cr} = h_0 - h_{cr}. \quad (7.15)$$

Substituindo (7.15) na eq. (7.14), resulta em:

$$\frac{h_0}{c^{(0)}} \frac{(1-\varepsilon_{cr})}{\lambda'(1-\alpha)U} = t_{tr}. \quad (7.16)$$

$$\text{onde: } \varepsilon_{cr} = \frac{h_{cr}}{h_0}. \quad (7.17)$$

Ou seja, $1-\varepsilon_{cr}$ é a fração de poros que devem ser obstruídos para que todos os caminhos possíveis para a entrada de partículas sejam fechados.

Da teoria de percolação, temos $\varepsilon_{cr} \cong 0,25$ para o limite de percolação de “ligações” (*bond percolation threshold*) numa rede cúbica simples (Seljakov e Kadet, 1996). Neste caso, 75% das “ligações” devem ser obstruídas para que o tempo de transição seja atingido.

Assumindo que o meio poroso é um conjunto de capilares com uma distribuição de tamanho de raios f_p , resulta em:

$$\frac{\phi_{cr}}{\phi_0} = \frac{h_{cr} \int_0^{\infty} r_p^2 f_p(r_p, t_{tr}) dr_p}{h_0 \int_0^{\infty} r_p^2 f_p(r_p, t=0) dr_p}. \quad (7.18)$$

Considerando que a função de distribuição de poros é constante com o tempo, das eqs. (7.17) e (7.18), segue que:

$$\varepsilon_{cr} = \frac{\phi_{cr}}{\phi_0}. \quad (7.19)$$

Wennberg e Sharma (1997) assumiram que, com o aumento do número de partículas capturadas, a porosidade diminui até um valor crítico ϕ_{cr} . Quando a porosidade atinge o valor ϕ_{cr} , não existe mais penetração de partículas no meio poroso. Todas as partículas são capturadas alimentando o reboco externo. Eles também sugeriram que um valor razoável para a porosidade crítica seria $\phi_{cr} = \phi_0/2$ (onde ϕ_0 é o valor da porosidade inicial), ou seja, $\varepsilon_{cr} = 0.5$ (ver eq. (7.19)).

Com o intuito de determinar a espessura do reboco externo, é feito o balanço de massa na entrada do meio poroso. Por conveniência, as coordenadas dimensionais (x, t) são utilizadas.

Assumindo que a concentração injetada $c^{(0)}$ e a distribuição de partículas injetadas $f_s(r_s, t)$ são constantes com o tempo, da eq. (7.12), tem-se:

$$(1-\phi_c)\frac{d(l_c)}{dt} = (1-\alpha_c)U\tilde{c}^{(0)}. \quad (7.20)$$

Antes do tempo de transição, as partículas acumuladas não restringem o acesso das partículas subseqüentemente injetadas para o interior da rocha. Neste caso é assumido que:

$$l_c(t_{tr}) = 0. \quad (7.21)$$

A solução da eq. (7.20), sujeita à condição (7.21), é dada por:

$$l_c(t) = \left(\frac{U\tilde{c}^{(0)}}{1-\phi_c}\right)(1-\alpha_c)(t-t_{tr}); \quad t \geq t_{tr}. \quad (7.22)$$

Com o intuito de descrever o processo de filtração no interior do reboco, as propriedades do reboco externo são consideradas diferentes das propriedades da rocha. Substituindo a segunda eq. (6.1) na primeira, resulta em:

$$\gamma_c\phi_c\frac{\partial c}{\partial t} + \alpha_c U\frac{\partial c}{\partial x} = -\lambda'_c(1-\alpha_c)Uc. \quad (7.23)$$

A eq. (7.23) é válida para $t > t_{tr}$ e $x < 0$.

Considerando que a concentração injetada na face do reboco externo é constante, segue que:

$$c(-l_c(t), t) = c^{(0)}. \quad (7.24)$$

Resolvendo a eq. (7.23), considerando a condição de contorno (7.24), obtém-se o perfil de concentração no interior do reboco externo:

$$c(x, t) = c^{(0)} \exp\left[-\lambda'_c\left(\frac{1-\alpha_c}{\alpha_c}\right)(x+l_c(t))\right]; \quad -l_c(t) \leq x \leq 0 \quad \text{e} \quad t > t_{tr}. \quad (7.25)$$

Note que, com o tempo, $l_c(t)$ aumenta e a concentração na entrada da amostra $c(0, t)$ diminui (ver Al-Abduwani et al., 2005). A Figura 48 mostra o gráfico da concentração de partículas em suspensão na entrada da amostra ($x = 0$).

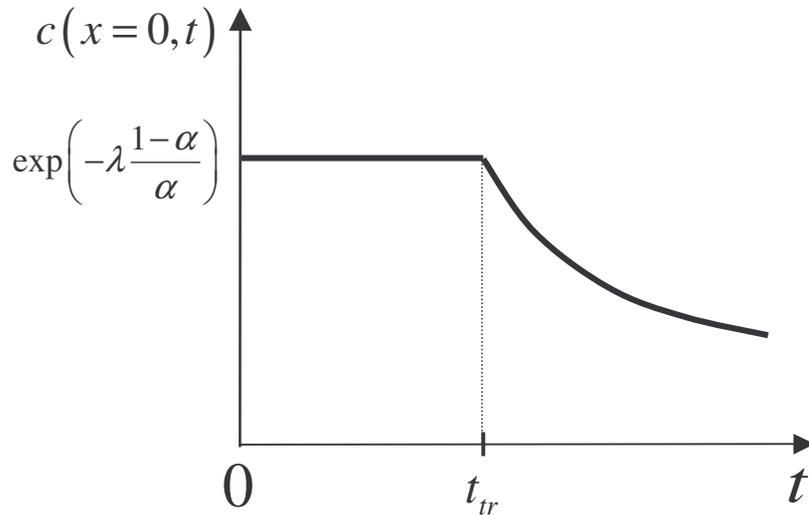


Figura 48: Concentração de partículas em suspensão na interface reboco externo e meio poroso ($x=0$) em função do tempo.

No tempo de transição t_{tr} , tem-se:

$$t = t_{tr} : \sigma_{cake} = 0. \tag{7.26}$$

Substituindo a solução (7.25) na segunda equação do sistema (6.1) e resolvendo a equação resultante, considerando a condição (7.26), obtém-se a concentração de partículas capturadas no reboco externo após o tempo de transição:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{cake}(x, t) = & \frac{\alpha_c(1-\phi_c)}{(1-\alpha_c)} \exp\left[-\frac{\lambda'_c(1-\alpha_c)}{\alpha_c} x\right] \times \\ & \times \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{\lambda'_c(1-\alpha_c)^2}{\alpha_c(1-\phi_c)} U\tilde{c}^{(0)}(t-t_{tr})\right] \right\}; -l_c(t) \leq x \leq 0 \end{aligned} \tag{7.27}$$

Como já mencionado, após o tempo de transição, o fator de redução de fluxo α na face de entrada do meio poroso é igual a zero. Sendo assim, todas as

partículas que chegam na interface reboco externo–amostra são capturadas, ou seja:

$$\frac{d\sigma(0,t)}{dt} = \lambda' U c(0,t) , t > t_{tr}. \quad (7.28)$$

Antes do tempo de transição t_{tr} , a concentração de partículas capturadas na entrada do meio poroso é dada pela eq. (6.8). Portanto,

$$\sigma(0,t_{tr}) = \lambda'(1-\alpha)c^{(0)}Ut_{tr}. \quad (7.29)$$

Resolvendo a eq. (7.28), considerando a condição (7.29), resulta em:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(0,t) = \tilde{\sigma}(0,t_{tr}) + \frac{\lambda'(1-\phi_c)\alpha_c}{\lambda'_c(1-\alpha_c)^2} \times \\ \times \left[1 - \exp\left(-\lambda'_c \frac{(1-\alpha_c)^2 U \tilde{c}^{(0)}}{\alpha_c(1-\phi_c)}(t-t_{tr})\right) \right], t > t_{tr} \end{aligned} \quad (7.30)$$

Até o tempo de transição, o perfil de concentração de partículas em suspensão é dado pela eq. (6.4). Sendo assim,

$$t = t_{tr} : c = c^{(0)} \exp\left(-\lambda' \frac{1-\alpha}{\alpha} x\right). \quad (7.31)$$

A partir do tempo de transição, somente a água penetra no meio poroso. Portanto, tem-se a seguinte condição de contorno:

$$x = 0^+ : c = 0 \quad (7.32)$$

Substituindo a segunda equação do sistema (6.1) na primeira e resolvendo a equação resultante sob as condições (7.31) e (7.32), obtém-se a concentração de partículas em suspensão no interior da amostra ($x > 0$):

$$c(x,t) = \begin{cases} c^{(0)} \exp\left[-\lambda'(1-\alpha)\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{U}{\gamma\phi}(t-t_{tr})\right)\right], & t_{tr} < t \leq t_{tr} + \frac{\gamma\phi}{\alpha U}x \\ 0, & t > t_{tr} + \frac{\gamma\phi}{\alpha U}x \end{cases} \quad (7.33)$$

A Figura 49 mostra os perfis de concentração para diferentes tempos. A Figura 50 mostra a curva de concentração de partículas em suspensão na saída da amostra ($x = L$) em função do tempo t .

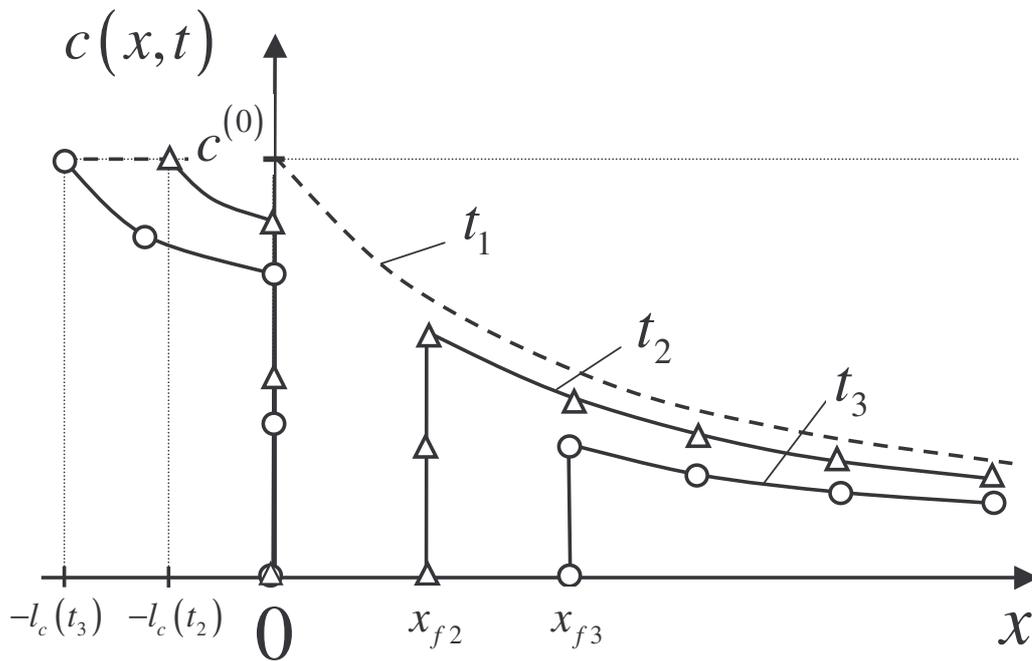


Figura 49: Perfis de concentração para um tempo t_1 menor que o tempo de transição ($t_1 < t_{tr}$) e dois tempos t_2 e t_3 maiores que o tempo de transição ($t_{tr} < t_2 < t_3$).

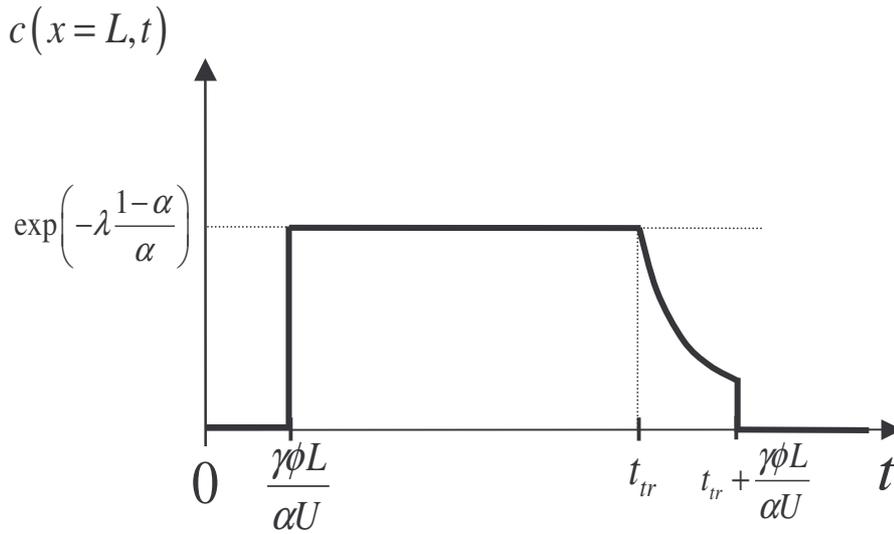


Figura 50: Concentração de partículas em suspensão na saída da amostra ($x = L$).

Substituindo a solução (7.33) na segunda eq. (6.1) e resolvendo a equação resultante, resulta no perfil de concentração de partículas depositadas no interior do meio poroso após o tempo de transição:

$$\sigma(x, t) = \sigma(x, t_{tr}) + \gamma\phi c^{(0)} \exp\left[-\lambda' \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) x\right] \times \left\{1 - \exp\left[-\lambda' \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \frac{\alpha U}{\gamma\phi} (t - t_{tr})\right]\right\}, \quad t < t_{tr} + \frac{\gamma\phi}{\alpha U} x, \tag{7.34}$$

onde $\sigma(x, t_{tr})$ é obtido substituindo $t = t_{tr}$ na solução (6.5).

Depois do tempo de transição, somente a água penetra no meio poroso. Portanto, a concentração de partículas capturadas numa determinada posição x continua aumentando até a frente de água chegar naquela posição. A partir deste momento ($t = t_{tr} + (\gamma\phi/\alpha U)x$), a concentração de partículas em suspensão na posição x é igual a zero e a concentração de partículas capturadas permanece constante com o tempo:

$$\sigma(x, t) = \sigma(x, t_{tr}) + \gamma\phi c^{(0)} \exp\left[-\lambda' \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) x\right] \times \left\{1 - \exp\left[-\lambda' \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) x\right]\right\}, \quad t > t_{tr} + \frac{\gamma\phi}{\alpha U} x \tag{7.35}$$

A Figura 51 mostra o perfil de partículas depositadas antes e depois do tempo de transição. Como as partículas não entram no meio poroso após o tempo de transição, a concentração de partículas capturadas tem um comportamento assintótico (ver a eq. (7.35) e a linha pontilhada na Figura 51).

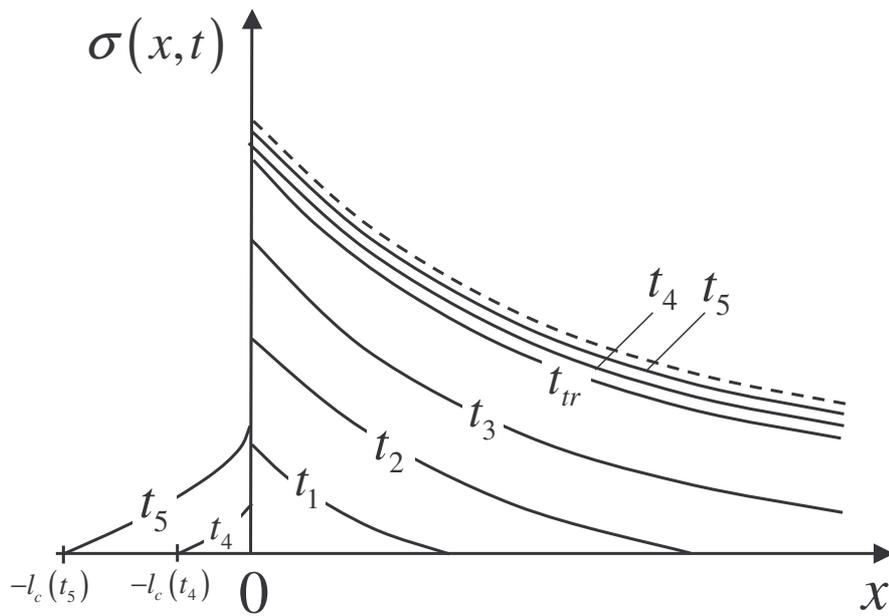


Figura 51: Perfis de concentração de partículas capturadas para diversos tempos ($t_1 < t_2 < t_3 < t_{tr} < t_4 < t_5$).