

1

Introdução

Desde a década de setenta, com o crescimento explosivo do mercado de derivativos, a interação da prática financeira com a pesquisa acadêmica vem se estreitando consideravelmente. Muita atenção vem sendo dada ao desenvolvimento de modelos matemáticos extremamente sofisticados para descrever instrumentos financeiros cada vez mais complexos, tendo em vista as possíveis vantagens que esta modelagem possa trazer no competitivo mundo das finanças.

Assim, uma questão central é o problema do apreçamento: qual é o preço “justo” de um ativo financeiro, por exemplo, uma opção escrita sobre uma ação? A este problema se dirige o trabalho pioneiro de 1973 (e ganhador do Nobel de economia de 1997) de Black-Scholes-Merton, considerado um clássico da matemática financeira contemporânea, no qual diversos conceitos importantes, tais como arbitragem, replicação, hedging, completamento são discutidos.

Dentre os conceitos acima, o de *arbitragem* é fundamental para esta dissertação. Uma arbitragem é uma oportunidade que um agente econômico encontra no mercado de obter ganhos sem correr riscos. Pensamos ser natural não ser possível selecionar ativos cujos preços são tais que alguma compra e/ou venda simultânea deles resulte em ganhos sem risco, i.e., uma hipótese razoável em modelagem é a ausência de oportunidades de arbitragem. De fato, em mercados competitivos, uma tal oportunidade tende a desaparecer no momento que é percebida pelos agentes. Na realidade essa hipótese é violada por curtos períodos de tempo até que o acesso a informação seja equalizado ou mesmo com tal discrepância, os custos de transação são tão próximos ao ganho da arbitragem que ela de fato não ocorre.

Um dos importantes desenvolvimentos da década de oitenta é a clarificação da profunda conexão entre o conceito econômico de arbitragem (ou melhor, de sua ausência) e a *teoria de martingais*, um dos tópicos centrais da moderna teoria dos processos estocásticos. Esta surpreendente ligação, estabelecida inicialmente nos trabalhos de Harrison, Kreps e Pliska (ver [11] e [10]), é um dos grandes pilares da teoria de finanças moderna, sendo a base

dos vários desenvolvimentos ulteriores. Por sua posição central, tal conexão recebeu o nome de *Teorema Fundamental do Apreçamento* que é o tema dessa dissertação. Ele também é chamado de Primeiro Teorema Fundamental, sendo um resultado preliminar para o problema do apreçamento. O Segundo Teorema Fundamental é aquele que efetivamente produz uma fórmula de apreçamento. No capítulo 2, daremos um exemplo do uso do conceito de arbitragem.

Este teorema, afirma que em certos modelos idealizados para o mercado financeiro a ausência de oportunidades de arbitragem equivale a existência de medidas de martingal equivalentes, e é o tópico desta dissertação. Vamos nos restringir aos modelos em tempo discreto que, apesar de não triviais, não exigem o aparato técnico da teoria de processos estocásticos em tempo contínuo (particularmente do cálculo estocástico) e permitem ter uma clara visão das idéias centrais e das hipóteses básicas do modelo utilizado. Em particular, para a demonstração da necessidade, seguimos o método da *Transformada de Esscher*, proposto por L.C.G. Rogers [6] que evita o uso de resultados de análise funcional usados nas primeiras demonstrações.

O capítulo 1 está dividido em duas partes: na primeira, faremos uma breve revisão de probabilidade envolvendo definições e resultados importantes que usaremos ao longo da dissertação e na segunda, dos conceitos de finanças e algum resultados obtidos com o ferramental probabilístico.

No capítulo 2, trataremos do modelo binomial uniperiódico como exemplo para várias idéias definidas anteriormente e em seguida, trataremos do Teorema Fundamental do Apreçamento no caso de um espaço de probabilidade finito e finalmente, no capítulo 3, no caso geral.

1.1

Revisão de Probabilidade

Na maioria dos modelos atuais de finanças, o risco financeiro é modelado através da teoria da Probabilidade. Assim precisamos rever alguns conceitos fundamentais da teoria da probabilidade. Seja Ω espaço amostral, i.e., um conjunto não vazio qualquer e $\Pi = \{0, 1, 2, \dots, N\}$.

Definição 1.1 Uma álgebra é uma coleção de subconjuntos de $\Omega \neq \emptyset$, fechada sob complementos e uniões finitas de subconjuntos. Já uma σ -álgebra é uma álgebra fechada sob uniões enumeráveis.

Definição 1.2 A σ -álgebra gerada por uma coleção ζ de subconjuntos de Ω é a menor σ -álgebra contendo esta coleção, isto é, a interseção de todas as σ -álgebras contendo ζ .

Exemplo: Se $\Omega = \mathbb{R}$, a σ -álgebra de borel é

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\{\text{intervalos } (a, b)\}), \text{ (isto é, a } \sigma\text{-álgebra gerada pelos abertos de } \mathbb{R}) \\ &= \sigma(\{\text{intervalos semi-abertos } (a, b]\}) \\ &= \sigma(\{\text{intervalos fechados } [a, b]\}) \\ &= \sigma(\{\text{intervalos semi-infinitos da forma } (-\infty, a]\})\end{aligned}$$

Definição 1.3 *Seja $\Omega \neq \emptyset$ e $\mathcal{F}$ uma σ -álgebra em Ω . Uma medida de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma função de conjunto*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}: \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \mathbf{P}(A),\end{aligned}$$

t.q.:

- (i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$;
- (ii) Se $\{A_n\}_{n \geq 1}$ é coleção de eventos disjuntos, então:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) \quad (\sigma\text{-aditividade}),$$

A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ é chamada de espaço de probabilidade. Chamaremos de eventos os elementos de $\mathcal{F}$ (que são chamados em teoria da medida de conjuntos mensuráveis).

Propriedades Básicas:

1. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
2. $A, B \in \mathcal{F}$ e $A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$ (Monotonicidade).
3. $\mathbf{P}(\bigcup_{n \geq 1} A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(A_n)$ (σ -sub aditividade).

Seja $\mathbf{P}$ uma medida de probabilidade em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ e defina a função real

$$\begin{aligned}F: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) \equiv \mathbf{P}(-\infty, x].\end{aligned}$$

Não é difícil verificar que F satisfaz:

1. F é monótona não-decrescente;
2. F é contínua à direita com limites à esquerda;
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

Definição 1.4 Uma função que satisfaz as 3 condições acima chama-se uma função de distribuição.

Prova-se que uma função de distribuição determina biunivocamente uma medida de probabilidade em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, i.e. existe uma bijeção entre funções de distribuição e medidas de probabilidade em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (ver [7]).

Definição 1.5 Diz-se que uma propriedade S em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vale $\mathbf{P}$ -q.c. (lê-se quase certamente) ou com $\mathbf{P}$ -probabilidade um se $\{\omega \in \Omega : S(\omega)\}^c \subset N, N \in \mathcal{F}$ e $\mathbf{P}(N) = 0$.

Definição 1.6 Dados $(\Omega, \mathcal{F})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, chama-se uma variável aleatória

Observação: Em teoria da medida essas funções são chamadas $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mensuráveis. A condição de ser variável aleatória (v.a.), garante que faz sentido calcular a probabilidade de $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ já que é um evento. A σ -álgebra gerada por X , denotada por $\sigma(X)$ é a menor σ -álgebra com respeito a qual X é mensurável, i.e., $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Denotaremos por $f \in \mathcal{F}$ uma função $\mathcal{F}$ -mensurável.

Definição 1.7 Um vetor aleatório n -dimensional é um conjunto ordenado de variáveis aleatórias: $(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

Definição 1.8 Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ espaço de probabilidade e $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ variável aleatória, então X induz uma medida de probabilidade $\mathbf{P}_X$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definida para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ por:

$$\mathbf{P}_X(B) \equiv \mathbf{P}(X^{-1}(B)) = \mathbf{P}(X \in B) = (\mathbf{P} \circ X^{-1})(B),$$

e é chamada de distribuição ou lei de X . A função $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F_X(x) = \mathbf{P}(-\infty, x] = \mathbf{P}(X \leq x)$ para todo x em $\mathbb{R}$ é uma função de distribuição, chamada função de distribuição de X .

Lembre que a *esperança* ou *valor esperado* ou *valor médio* de uma v.a. X é definida como a integral de Lebesgue em relação a medida de probabilidade $\mathbf{P}$, i.e., $\mathbb{E}[X] \equiv \int_{\Omega} X(\omega) \mathbf{P}(d\omega) = \int_{\Omega} X d\mathbf{P}$. Como referência veja [7].

Obs: Se $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, X é dita integrável.

Obs: Noções análogas valem para vetores aleatórios.

Iremos enunciar resultado muito usado chamado Teorema de transformação ou de mudança de variáveis:

Lema 1 (Teorema de Mudança de Variáveis) Se $(\Omega, \mathcal{F})$ e $(S, \mathcal{S})$ são espaços mensuráveis e $X : \Omega \rightarrow S$ função $\mathcal{F}/\mathcal{S}$ -mensurável. Suponha que $\mathbf{P}$ é uma medida de probabilidade em $\mathcal{F}$ e $\mathbf{P}_X$ a medida de probabilidade induzida em $\mathcal{S}$. Então se $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{S}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mensurável temos:

$$\int_{X^{-1}(A)} g(X(\omega)) \mathbf{P}(d\omega) = \int_A g(x) \mathbf{P}_X(dx)$$

Assim, se uma das integrais existe, a outra também existe e são iguais.

Note que se tomarmos $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função de Borel, tomando $A = \mathbb{R}$ temos

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\Omega} g(X(\omega)) \mathbf{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \mathbf{P}_X(dx)$$

A demonstração desse Teorema encontra-se em [7].

Definição 1.9 Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, X uma variável aleatória integrável e $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{F}$, então a esperança condicional de X com respeito a $\mathcal{G}$ é aquela variável aleatória, denotada por $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, tal que

- a) $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ é $\mathcal{G}$ -mensurável;
- b) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]1_D] = \mathbb{E}[X1_D], \forall D \in \mathcal{G}$.

Pode-se mostrar que tal variável aleatória existe (ver [7]). Note que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ é definida a menos de um conjunto de probabilidade zero e qualquer variável aleatória Z que satisfaz a definição acima chama-se uma *versão* de $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

Algumas propriedades básicas da esperança condicional são listadas a seguir:

- (i) Se Z é qualquer versão de $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, então $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Z]$;
- (ii) $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}] = \alpha \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \beta \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$
 $\mathbf{P} - q.c., \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (linearidade);
- (iii) Se X é $\mathcal{G}$ -mensurável, então $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ $\mathbf{P} - q.c.$.
- (iv) Se $X \geq 0$ $\mathbf{P} - q.c.$, então $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$ $\mathbf{P} - q.c.$ (positividade);
- (v) Se X é $\mathcal{G}$ -mensurável, Y e XY integráveis, então $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ $\mathbf{P} - q.c.$;
- (vi) Se $\mathcal{A}, \mathcal{G}$ são sub- σ -álgebras com $\mathcal{A} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, então $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$ $\mathbf{P} - q.c.$ (propriedade de iteração ou da torre);

Definição 1.10 Uma sequência de variáveis aleatórias (ou vetores aleatórios) $X = \{\xi_n\}_{n \in \Pi}$ onde $\Pi = \{0, 1, 2, \dots\}$, é chamada de um processo estocástico em tempo discreto ou uma sequência aleatória.

Em finanças, usualmente tratamos de modelos com horizonte finito, i.e. $\Pi = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ uma vez que os contratos expiram em um instante final que chamaremos de N .

O conceito abaixo é extremamente importante no que se segue pois podemos interpretá-lo nos modelos como uma forma de sistematizar o acúmulo de “informações” de um processo de acordo com o passar do tempo.

Definição 1.11 Uma filtração $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N$ é uma família crescente de sub-álgebras:

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$$

A monotonicidade dessas álgebras equivale a idéia de que não há perda de informação ao longo do tempo.

Definição 1.12 Dizemos que um processo $\{\xi_n\}_{n \in \Pi}$ é adaptado à filtração $\mathbb{F}$ se $\xi_n \in \mathcal{F}_n$ para todo $n \in \Pi$.

Quando $\mathcal{F}_n$ for a σ -álgebra gerada por $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$, denotada por $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$, a filtração é dita *natural*.

A seguir revemos a noção de martingal, que é central na moderna teoria da probabilidade e em suas aplicações, particularmente em finanças.

Definição 1.13 Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ um espaço de probabilidade munido de uma filtração $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$. Uma sequência de variáveis aleatórias $M = \{M_n\}_{n \geq 0}$ adaptado à filtração e com $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ é um $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$ -martingal quando, para todo $n \geq 0$

$$\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n \quad \mathbf{P} - q.c.$$

Observação: A definição acima equivale a $\mathbb{E}[M_m | \mathcal{F}_n] = M_n, m > n$. Note que se M é martingal, então como M_n é $\mathcal{F}_n$ -mensurável e usando as propriedades de esperança condicional:

$$\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n \Leftrightarrow \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[\Delta M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0.$$

e dizemos que $Y_n = \Delta M_n$ é martingal diferença. Tomando a esperança:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\Delta M_{n+1} | \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[\Delta M_{n+1}] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[M_n]; \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

ou seja, um martingal é um processo “constante em média” e pode ser pensado como um modelo de um jogo justo. Como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 1 Considere X_n a variável aleatória associada ao lançamento de uma moeda honesta, onde cara representa o ganho de uma unidade monetária e coroa a perda. Associe então $X_n = 1$ a cara e $X_n = -1$ a coroa. Nesse caso, $\{X_n\}_{n \geq 1}$ são v.a.'s i.i.d (independentes e identicamente distribuídas) de Bernoulli com $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1/2$, $\mathbf{P}(X_n = -1) = 1/2$ e $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ e considere o ganho acumulado $S_n \equiv \sum_{k=1}^n X_k$, com $S_0 = 0$. Então $S = \{S_n\}_{n \geq 0}$ é um $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ -martingal. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n | \mathcal{F}_m] &= \mathbb{E}[S_m + (S_n - S_m) | \mathcal{F}_m] \\ &= S_m + \mathbb{E}[(S_n - S_m) | \mathcal{F}_m] \\ &= S_m + \mathbb{E}\left[\sum_{k=m+1}^n X_k | \mathcal{F}_m\right] \\ &= S_m + \sum_{k=m+1}^n \mathbb{E}[X_k] \\ &= S_m. \end{aligned}$$

Vamos precisar mais adiante, de uma outra caracterização de martingais, que discutimos a seguir:

Definição 1.14 Dada uma filtração $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \in \Pi}$, um processo estocástico $\theta = \{\theta_n = (\theta_n^0, \theta_n^1, \theta_n^2, \dots, \theta_n^d); n \in \Pi\}$ é predizível se $\theta_{n+1}^i \in \mathcal{F}_n, i = 0, 1, \dots, d$ e $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Definição 1.15 Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{F}, \Pi)$. Dado um $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$ -martingal $M = \{M_n : n \in \Pi\}$ e um processo $\phi = \{\phi_n; n \geq 1\}$ predizível e limitado, a transformada de martingal de M por ϕ é o processo:

$$(\phi \cdot M)_n = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n = 0 \\ \sum_{m=1}^n \phi_m \Delta M_m & , \text{ se } n \geq 1 \end{cases}$$

Proposição 1.16 (Caracterização de Martingais) Um processo $M = \{M_n : n \in \Pi\}$, $\mathbb{F}$ -adaptado é um $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$ -martingal se e somente se para todo $\phi = \{\phi_n; n \geq 1\}$ predizível e limitado, $\mathbb{E}[(\phi \cdot M)_n] = 0 \quad \forall n \geq 1$.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Seja M um $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$ -martingal e ϕ um processo predizível limitado, então temos que $\mathbb{E}[(\phi \cdot M)_n] < \infty, (\phi \cdot M)_n \in \mathcal{F}_n$. Além disso,

$$\mathbb{E}[(\phi \cdot M)_{n+1} - (\phi \cdot M)_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\phi_{n+1} \cdot \Delta M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \phi_{n+1} \mathbb{E}[\Delta M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Logo, $(\phi \cdot M)$ é um $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$ - martingal. Notemos que, por definição, $\mathbb{E}[(\phi \cdot M)_0] = 0 = \mathbb{E}[(\phi \cdot M)_n]$, $\forall n \geq 1$.

($\Leftarrow$) Fixe $m \in 1, \dots, N$ e $A \in \mathcal{F}_m$. Defina $\phi = \phi_n$; $n \geq 1$ por:

$$\phi_n = \begin{cases} 0 & , \text{se } n \neq m+1 \\ 1_A & , \text{se } n = m+1 \end{cases}$$

Então ϕ é predizível. Para $n \geq m$:

$$0 = \mathbb{E}[(\phi \cdot M)_n] = \mathbb{E}[\phi_{m+1} \Delta M_{m+1}] = \mathbb{E}[1_A (M_{m+1} - M_m)].$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[1_A M_{m+1}] = \mathbb{E}[1_A M_m] \quad \forall A \in \mathcal{F}_m.$$

Como $A \in \mathcal{F}_m$ é arbitrário, M_m é uma versão de $\mathbb{E}[M_{m+1} | \mathcal{F}_m]$, i.e.,

$$M_m = \mathbb{E}[M_{m+1} | \mathcal{F}_m] \quad \mathbf{P} - q.c., \quad \forall m < N.$$

$\Rightarrow M$ é $(\mathbb{F}, \mathbf{P})$ -martingal. □

1.2

Conceitos de finanças e introdução do modelo

Para modelarmos como o investidor se comporta ao investir seu dinheiro, por exemplo, quanto quer investir em ações e quanto numa caderneta de poupança, precisamos da noção de um ativo de risco. Um ativo de risco é um ativo que varia de valor aleatoriamente e que iremos modelar como uma variável aleatória, enquanto o ativo sem risco muda com uma taxa de juros suposta por simplicidade determinística (não aleatória). Uma poupança seria um exemplo de ativo sem risco e as ações, de ativos de risco.

Enunciaremos as hipóteses do modelo e definiremos os instrumentos financeiros matematicamente. Para maiores detalhes veja [9]. Um exemplo específico será visto no capítulo 2.

Seguimos o modelo usual do “mercado sem atrito” que pressupõe as seguintes hipóteses simplificadoras:

- (1) Existe uma taxa de juros livre de risco $r > 0$;
- (2) Não existem custos de transação;
- (3) Não há pagamento de dividendos;
- (4) Transações instantâneas;

- (5) É permitido a venda a descoberto, ou seja, vender ativos que não possui no momento, como por exemplo, tomar emprestado ativos;
- (6) Os ativos são arbitrariamente fracionáveis;
- (7) Liquidez, ou seja, dado um ativo, sempre existem compradores e vendedores.

As hipóteses acima, além de viabilizar as contas, permitem que se montem as carteiras sem maiores problemas como é o caso das hipóteses 4,5 e 7. Dadas as hipóteses acima, começaremos a transformar as idéias intuitivas desse modelo em definições.

Definição 1.17 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{F})$. Uma estratégia de investimento é um processo estocástico $\theta = \{\theta_n\}_{n=0}^N$ de vetores $\theta_n = (\theta_n^0, \theta_n^1, \dots, \theta_n^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ que é predizível, isto é, para $i=0,1,\dots,d$, $\theta_0^i \in \mathcal{F}_0$ e $\theta_n^i \in \mathcal{F}_{n-1}$. O vetor θ_n é dito portfólio ou carteira do investidor no instante n , sendo θ_n^i a quantidade de ativos do tipo i que o investidor possui no instante n . Os ativos onde $i=1,2,\dots,d$ são ativos de risco e quando $i=0$ é um ativo sem risco.*

Definição 1.18 *O vetor de preços no instante n é dado pelo vetor aleatório em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{F}, \Pi)$:*

$$S_n = (S_n^0, S_n^1, S_n^2, \dots, S_n^d) \in \mathbb{R}_+^{d+1},$$

onde S_n^i é o preço do i -ésimo ativo no instante n . $S = \{S_n\}_{n \in \Pi}$ é o processo de preços. Consideraremos normalmente $S_0^0 = 1$.

Definição 1.19 *O valor da carteira θ no instante n , $0 \leq n \leq N$ é dada por*

$$V_n(\theta) = \begin{cases} \langle \theta_n, S_n \rangle \equiv \sum_{i=0}^d \theta_n^i S_n^i & , \text{ se } 1 \leq n \leq N \\ \langle \theta_1, S_0 \rangle & , \text{ se } n = 0 \end{cases}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual.

Definição 1.20 *O vetor de preços atualizado ou descontado no instante n , é o vetor*

$$\bar{S}_n \equiv \beta_n S_n = \frac{1}{\bar{S}_n^0} S_n = \frac{1}{(1+r)^n} S_n = (1, \beta_n S_n^1, \dots, \beta_n S_n^d),$$

onde $\beta_n = (1+r)^{-n}$ é chamado fator de desconto. Analogamente define-se o valor atualizado no instante n por:

$$\bar{V}_n(\theta) \equiv \frac{1}{\bar{S}_n^0} V_n(\theta).$$

Agora definiremos uma importante classe de estratégias que iremos utilizar.

Definição 1.21 *Uma estratégia é auto-financiadora se*

$$\langle \theta_n, S_{n-1} \rangle = \langle \theta_{n-1}, S_{n-1} \rangle \text{ para } 2 \leq n \leq N.$$

No caso de um vetor descontado a condição se escreve:

$$\langle \theta_n, \bar{S}_{n-1} \rangle = \langle \theta_{n-1}, \bar{S}_{n-1} \rangle \text{ para } 2 \leq n \leq N, \quad (1-1)$$

e denotamos por Θ o conjunto das estratégias auto-financiadoras.

Note que uma estratégia constante $\theta_n = c$ é auto-financiadora.

Proposição 1.22 *Se a estratégia é auto-financiadora, não há entrada nem saída de capital, ou seja, a variação no valor da carteira só depende da variação dos preços dos ativos, mais precisamente:*

$$\Delta V_n(\theta) = \langle \theta_n, \Delta S_n \rangle.$$

ou seja, pode-se trocar a forma, mas não o quanto investir .

Demonstração:

$$\Delta V_n(\theta) = \langle \theta_n, S_n \rangle - \langle \theta_{n-1}, S_{n-1} \rangle$$

adicionando e subtraindo $\langle \theta_n, S_{n-1} \rangle$ temos:

$$\Delta V_n(\theta) = \langle \theta_n, S_n - S_{n-1} \rangle + \langle \theta_n - \theta_{n-1}, S_{n-1} \rangle.$$

Note que a condição de auto-financiamento nos diz que $\langle \Delta \theta_n, S_{n-1} \rangle = 0$, logo

$$\Delta V_n(\theta) = \langle \theta_n, S_n - S_{n-1} \rangle.$$

□

Para medir o ganho obtido pelo investimento em certa carteira num certo instante é conveniente termos a seguinte:

Definição 1.23 *O processo de ganhos para a carteira θ é dado por:*

$$G_0(\theta) = 0 \text{ e } G_n(\theta) = \sum_{m=1}^n \langle \theta_m, \Delta S_m \rangle, \quad n \geq 1$$

e o correspondente descontado:

$$\overline{G}_n(\theta) = \sum_{m=1}^n \langle \theta_m, \Delta \overline{S}_m \rangle.$$

A proposição a seguir nos dá um critério para a caracterização de carteiras auto-financiadoras:

Proposição 1.24 *Seja θ uma estratégia de investimento. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) θ é auto-financiadora;
- (ii) $V_n(\theta) = V_0(\theta) + G_n(\theta) \quad n = 1, \dots, N;$
- (iii) $\overline{V}_n(\theta) = \overline{V}_0(\theta) + \overline{G}_n(\theta) \quad n = 1, \dots, N.$

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

A condição de auto-financiamento equivale a

$$\Delta V_m(\theta) = V_m(\theta) - V_{m-1}(\theta) = \langle \theta_m, \Delta S_m \rangle, m = 1, \dots, N.$$

então somando:

$$\sum_{m=1}^n V_m(\theta) - V_{m-1}(\theta) = V_n(\theta) - V_0(\theta) = \sum_{m=1}^n \langle \theta_m, \Delta S_m \rangle = G_n(\theta).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$$V_n(\theta) - V_{n-1}(\theta) = G_n(\theta) - G_{n-1}(\theta) = \langle \theta_n, \Delta S_n \rangle.$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) é análoga usando (1-1). $\square$

Observação: A proposição acima diz que, se o investidor segue uma estratégia $\theta \in \Theta$, o valor descontado é completamente determinado pelo valor inicial $V_0(\theta)$ e pelo processo $(\theta_n^1, \theta_n^2, \dots, \theta_n^d)$ uma vez que na expressão de $\overline{G}_n(\theta) = \sum_{m=1}^n \langle \theta_m, \Delta \overline{S}_m \rangle$, o termo θ_n^0 é zero pois:

$$\Delta \overline{S}_m^0 = \overline{S}_m^0 - \overline{S}_{m-1}^0 = \beta_m S_m^0 - \beta_{m-1} S_{m-1}^0 = 1 - 1 = 0.$$

Definição 1.25 *Uma variável aleatória $X \in \mathcal{F}_N$ é dita duplicável (replicável) se existir uma estratégia auto-financiadora θ tal que*

$$V_N(\theta) = X \quad \mathbf{P} - q.c.$$

A noção de arbitragem é fundamental em finanças uma vez que vai nos ajudar a dizer qual é o preço justo de um certo ativo, i.e., trata-se daquele preço obtido sob hipótese de ausência de arbitragem. A noção de oportunidade de arbitragem é de que se pode obter lucros sem arriscar um valor inicial. Isto é formalizado a seguir:

Definição 1.26 *Uma oportunidade de arbitragem é uma estratégia auto-financiadora θ tal que*

- (i) $\mathbf{P}(V_0(\theta) = 0) = 1$;
- (ii) $\mathbf{P}(V_N(\theta) \geq 0) = 1; \mathbf{P}(V_N(\theta) > 0) > 0$,

Quando ocorre a ausência de oportunidade de arbitragem (A.O.A.) o mercado é dito viável.

A proposição a seguir, que será importante no capítulo 3, mostra que se existe oportunidade de arbitragem no modelo, então existe oportunidade de arbitragem em ao menos um dos períodos $[n-1, n)$.

Proposição 1.27 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \Pi, \mathbb{F}, S)$ modelo de mercado em tempo discreto, onde $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ é espaço de probabilidade com $\Pi = \{0, 1, \dots, N\}$ conjunto de tempo discreto, $\mathbb{F}$ uma filtração e $S = \{S_n\}_{n \in \Pi}$, processo de preços. São equivalentes:*

- (i) *O modelo admite uma oportunidade de arbitragem.*
- (ii) *Para algum $n = 1, 2, \dots, N$ existe $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$, $\mathcal{F}_{n-1}$ - mensurável t.q. $\langle \phi, \Delta S_n \rangle \geq 0$ e $\mathbf{P}(\langle \phi, \Delta S_n \rangle > 0) > 0$.*
- (iii) *Para algum $n = 1, 2, \dots, N$ existe $\bar{\phi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}_{n-1}$ - mensurável t.q. $\langle \bar{\phi}, \Delta \bar{S}_n \rangle \geq 0$ e $\mathbf{P}(\langle \bar{\phi}, \Delta \bar{S}_n \rangle > 0) > 0$.*

Demonstração: Entre (ii) e (iii) a equivalência é clara. Então sem perda de generalidade podemos supor $S_n^0 = 1, n \in \Pi$. Se (ii) vale com certa ϕ e tomando $A = \{\omega \in \Omega : \langle \phi, \Delta S_n \rangle(\omega) > 0\}$ então podemos construir uma oportunidade de arbitragem θ como se segue:

Para $\omega \notin A$, tome $\theta_m(\omega) = 0$ para todo $m \in \Pi$. Para $\omega \in A$, tome $\theta_m(\omega) = 0$, para todo $m < n$ e, no instante n , tome:

$$\theta_n(\omega) = \left(- \sum_{i=1}^d \phi_i(\omega) S_{n-1}^i(\omega), \phi_1(\omega), \phi_2(\omega), \dots, \phi_d(\omega) \right).$$

Finalmente se $m > n$

$$\theta_m(\omega) = (V_n(\theta)(\omega), 0, 0, \dots, 0).$$

Note que por construção, θ é predizível (lembre que por hipótese ϕ é $\mathcal{F}_{n-1}$ -mensurável). Para vermos que θ é auto-financiadora, note que o processo de valores $V(\theta)$ só se altera quando $\omega \in A$ e então $\Delta V_m(\theta) = 0$ a menos que $m = n$. Além disso,

$$\begin{aligned} \Delta V_n(\theta) &= \langle \theta_n, S_n \rangle - \langle \theta_{n-1}, S_{n-1} \rangle \\ &= \langle \theta_n, S_n \rangle (= V_n(\theta)) \\ &= - \sum_{i=1}^d \phi_i S_{n-1}^i S_n^0 + \sum_{i=1}^d \phi_i S_n^i (= \langle \phi, \Delta S_n \rangle) \\ &= - \sum_{i=1}^d \phi_i S_{n-1}^i S_n^0 + \sum_{i=1}^d \phi_i S_{n-1}^i S_{n-1}^0 - \sum_{i=1}^d \phi_i S_{n-1}^i S_{n-1}^0 + \sum_{i=1}^d \phi_i S_n^i \\ &= - \sum_{i=1}^d \phi_i S_{n-1}^i \Delta S_n^0 + \sum_{i=1}^d \phi_i \Delta S_n^i \\ &= \langle \theta_n, \Delta S_n \rangle. \end{aligned}$$

Agora, $V_0(\theta) = 0$, enquanto que para $m > n$ temos $V_m(\theta) = 0$ em $\Omega \setminus A$. Como $S^0 = 1$ e portanto $\Delta S_m^0 = 0$, vem que em A para $m > n$,

$$\begin{aligned} V_m(\theta) &= (V_m(\theta) - V_{m-1}(\theta)) + \dots + (V_n(\theta) - V_{n-1}(\theta)) \\ &= \Delta V_m(\theta) + \Delta V_{m-1}(\theta) + \dots + V_n(\theta) \\ &= V_n(\theta), \end{aligned}$$

uma vez que $V_{n-1} = 0$ por ser anterior a n . Assim, para todo $m > n$,

$$V_m(\theta) = V_n(\theta) = \langle \theta_n, \Delta S_n \rangle = \langle \phi, \Delta S_n \rangle > 0.$$

Portanto, em particular,

$$V_N(\theta) \geq 0 \quad \mathbf{P} - q.c.$$

Mas pela definição de A ,

$$A \subseteq \{V_N(\theta) > 0\},$$

logo θ é uma oportunidade de arbitragem já que $\mathbf{P}(A) > 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $G_N(\theta) \geq 0$ q.c. e $\mathbf{P}(G_N(\theta) > 0) > 0$ para alguma $\theta \in \Theta$. Assuma sem perda de generalidade que $\langle \theta, S_0 \rangle = 0$. Deve existir para caracterizarmos a arbitragem, um primeiro instante $m \geq 1$ em Π tal que

$$\langle \theta_m, S_m \rangle \geq 0 \quad \mathbf{P} - q.c. \text{ e } \quad \mathbf{P}(\langle \theta_m, S_m \rangle > 0) > 0.$$

Considere $\langle \theta_{m-1}, S_{m-1} \rangle : \text{ ou } \langle \theta_{m-1}, S_{m-1} \rangle = 0 \text{ q.c. ou } A = \{\langle \theta_{m-1}, S_{m-1} \rangle < 0\}$ tem probabilidade positiva. Caso $\langle \theta_{m-1}, S_{m-1} \rangle > 0$ q.c., m não seria o primeiro instante a ser positivo. No primeiro caso, por θ ser auto-financiadora, i.e., $\langle \theta_{m-1}, S_{m-1} \rangle = \langle \theta_m, S_{m-1} \rangle$, temos:

$$\langle \theta_m, S_m \rangle = \langle \theta_m, S_m \rangle - \langle \theta_{m-1}, S_{m-1} \rangle = \langle \theta_m, \Delta S_m \rangle \geq 0,$$

e da mesma forma,

$$\mathbf{P}(\langle \theta_m, \Delta S_m \rangle > 0) > 0$$

logo vale (ii). No segundo caso, em $B = \{\langle \theta_{m-1}, S_{m-1} \rangle < 0\}$, temos

$$\langle \theta_m, \Delta S_m \rangle = \langle \theta_m, S_m \rangle - \langle \theta_{m-1}, S_{m-1} \rangle \geq -\langle \theta_{m-1}, S_{m-1} \rangle > 0,$$

logo a v.a. $\phi = 1_B \theta_m$ é predizível e vai satisfazer (ii).