

2

Cargas Móveis, Linhas de Influência e Envoltórias de Esforços

2.1.

Introdução

Para o dimensionamento de qualquer estrutura é necessário conhecer os esforços máximos e mínimos que ela apresentará ao ser submetida ao carregamento que será destinada. Para estruturas submetidas a cargas móveis existe um diagrama, denominado de envoltória de esforços, que determina os valores limites, máximo ou mínimo, para as seções transversais da estrutura.

A seguir, serão apresentados conceitos, relacionados a cargas móveis e traçado de linhas de influência, necessários ao cálculo das envoltórias de esforços, bem como será exemplificada a determinação de uma envoltória de esforços e discutida as maneiras de obtê-la.

2.2.

Classificação das ações atuantes nas estruturas

De acordo com a NBR – 8681 (1984), as ações atuantes nas estruturas, que são as causas que provocam esforços ou deformações, podem ser classificadas segundo sua variabilidade no tempo em três categorias:

- **Ações permanentes**

São as cargas que ocorrem com valores constantes ou de pequena variação em torno de sua média, durante praticamente toda a vida da construção. As ações permanentes são divididas em diretas, tais como os pesos próprios dos elementos da construção, incluindo-se o peso próprio da estrutura e de todos os elementos construtivos permanentes, e indiretas, como protensão, recalques de apoio e a retração dos materiais.

- **Ações variáveis**

São as cargas que ocorrem com valores que apresentam variações significativas em torno de sua média, durante a vida da construção. São

as cargas móveis ou acidentais das construções, isto é, cargas que atuam nas construções em função de seu uso (pessoas, mobiliário, veículos, materiais diversos, etc.).

Elas podem ser normais, quando possuem probabilidade de ocorrência suficientemente grande para que sejam obrigatoriamente consideradas no projeto das estruturas de um dado tipo de construção, ou especiais, como ações sísmicas ou cargas acidentais de natureza ou de intensidade especiais.

- **Ações excepcionais**

São as cargas que têm duração extremamente curta e muito baixa probabilidade de ocorrência durante a vida da construção, mas que devem ser consideradas nos projetos de determinadas estruturas. Por exemplo, ações excepcionais podem ser decorrentes de explosões, choques de veículos, incêndios, enchentes ou sismos excepcionais.

2.3. Cargas Móveis

Diversas estruturas são solicitadas por cargas móveis. Exemplos são pontes rodoviárias e ferroviárias ou pórticos industriais que suportam pontes rolantes para transporte de cargas. Os esforços internos nestes tipos de estrutura não variam apenas com a magnitude das cargas aplicadas, mas também com a posição de atuação das mesmas. Portanto, o projeto de um elemento estrutural, como uma viga de ponte, envolve a determinação das posições das cargas móveis que produzem valores extremos dos esforços nas seções do elemento.

No projeto de estruturas submetidas a cargas fixas, a posição de atuação de cargas acidentais de ocupação também influencia na determinação dos esforços dimensionantes. Por exemplo, o momento fletor máximo em uma determinada seção de uma viga contínua com vários vãos não é determinado pelo posicionamento da carga acidental de ocupação em todos os vãos. Posições selecionadas de atuação da carga acidental vão determinar os valores limites de momento fletor na seção. Assim, o projetista terá que determinar, para cada seção a ser dimensionada e para cada esforço dimensionante, as posições de atuação das cargas acidentais que provocam os valores extremos (máximos e mínimos de um determinado esforço).

Uma alternativa para este problema seria analisar a estrutura para várias posições das cargas móveis ou acidentais e selecionar os valores extremos. Este procedimento não é prático nem eficiente de uma maneira geral, exceto para estruturas e carregamentos simples. O procedimento geral e objetivo para determinar as posições de cargas móveis e acidentais que provocam valores extremos de um determinado esforço em uma seção de uma estrutura é feito com auxílio de Linhas de Influência.

2.4. Linhas de Influência

Linhas de Influência (*LI*) descrevem a variação de um determinado efeito (por exemplo, uma reação de apoio, um esforço cortante ou um momento fletor em uma seção) em função da posição de uma carga vertical unitária que passeia sobre a estrutura. Assim, a *LI* de momento fletor em uma seção é a representação gráfica ou analítica do momento fletor, na seção de estudo, produzida por uma carga concentrada vertical unitária, geralmente de cima para baixo, que percorre a estrutura. Isso é exemplificado na Figura 2.1, que mostra a *LI* de momento fletor em uma seção *S* indicada. Nesta figura, a posição da carga unitária $P = 1$ é dada pelo parâmetro x , e uma ordenada genérica da *LI* representa o valor do momento fletor em *S* em função de x , isto é, $LIM_S = M_S(x)$. Em geral, os valores positivos dos esforços nas linhas de influência são desenhados para baixo e os valores negativos para cima.

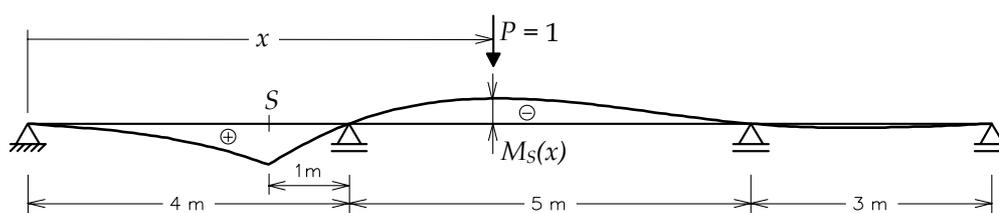


Figura 2.1 – Linha de influência de momento fletor em uma seção de uma viga contínua.

Com base no traçados de LI_s , é possível obter as chamadas envoltórias limites de esforços que são necessárias para o dimensionamento de estruturas submetidas a cargas móveis ou acidentais.

2.4.1. Traçado de LI

O FTOOL calcula a linha de influência de um esforço E utilizando o Princípio de Müller-Breslau (SÜSSEKIND, 1997), também conhecido como método cinemático para o traçado de LI , que foi formulado por Müller-Breslau no final do século 19.

Este método pode ser demonstrado através do Princípio dos Deslocamentos Virtuais - PDV (Martha, 2005) e pode ser aplicado para qualquer tipo de estrutura, isostática ou hiperestática. Embora este método possa ser utilizado para obtenção de LI de esforços e reações, o FTOOL não calcula LI de reações.

De uma maneira resumida, para se traçar a linha de influência de um efeito E (esforço ou reação), procede-se da seguinte forma (SÜSSEKIND, 1997):

- rompe-se o vínculo capaz de transmitir o efeito E cuja linha de influência se deseja determinar;
- na seção onde atua o efeito E , atribui-se à estrutura, no sentido oposto ao de E positivo, um deslocamento generalizado unitário, que será tratado com sendo muito pequeno;
- a configuração deformada (elástica) obtida é a linha de influência.

O deslocamento generalizado que se faz referência depende do efeito em consideração, tal como indicado na Figura 2.2. No caso de uma reação de apoio, o deslocamento generalizado é um deslocamento absoluto da seção do apoio. Para um esforço normal, o deslocamento generalizado é um deslocamento axial relativo na seção de esforço normal. Para um esforço cortante, o deslocamento generalizado é um deslocamento transversal relativo na seção do esforço cortante. E para um momento fletor, o deslocamento generalizado é uma rotação relativa entre as tangentes à elástica adjacentes à seção do momento fletor.

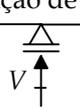
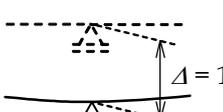
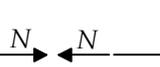
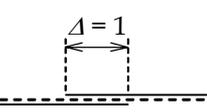
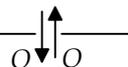
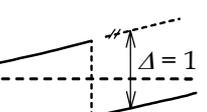
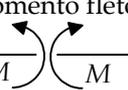
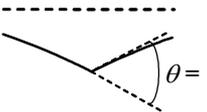
Efeito	Deslocamento generalizado
Reação de apoio 	
Esforço normal 	
Esforço cortante 	
Momento fletor 	

Figura 2.2 – Deslocamentos generalizados utilizados no método cinemático.

2.5.

Determinação de esforço extremo com base em LI

A determinação de valores máximo e mínimo de um esforço interno em uma seção de estudo é exemplificada para o caso do momento fletor na seção S da Figura 2.1. O carregamento permanente, constituído do peso próprio da estrutura, é representado por uma carga uniformemente distribuída g , tal como indica a Figura 2.3.

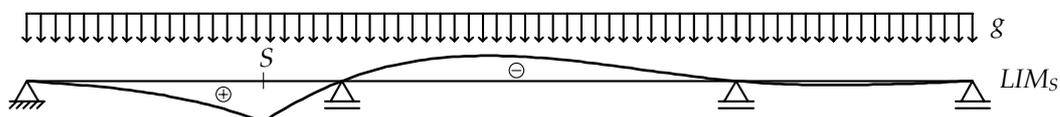


Figura 2.3– Carga permanente uniformemente distribuída atuando em uma viga contínua.

Considerando que a ordenada de $LIM_S (= M_S(x))$ é função de uma carga concentrada unitária, o valor do momento fletor em S devido ao carregamento permanente pode ser obtido por integração do produto da carga infinitesimal gdx por $M_S(x)$ ao longo da estrutura (Equação 2.1):

$$M_s^g = \int_0^{12} M_s(x) \cdot g dx = \int_0^{12} LIM_s \cdot g dx \quad (2.1)$$

Considere que existe uma carga móvel atuando sobre a estrutura, que é composta por uma carga concentrada P e por um carregamento accidental de ocupação que é representado por uma carga uniformemente distribuída q . Por ser accidental, a carga q pode atuar parcialmente ao longo da estrutura. O que se busca são as posições de atuação das cargas P e q que maximizam ou minimizam o momento fletor em S . O valor máximo de M_s é obtido quando a carga q está posicionada sobre ordenadas positivas da LIM_s e a carga P está sobre a maior ordenada positiva, e o valor mínimo é obtido quando a carga q está posicionada sobre ordenadas negativas da LIM_s e a carga P está sobre a maior ordenada negativa. Isso é mostrado nas Figuras 2.4 e 2.5.

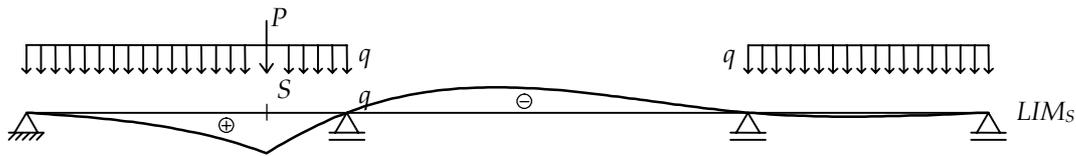


Figura 2.4 – Posicionamento da carga móvel para provocar máximo momento fletor em uma seção.

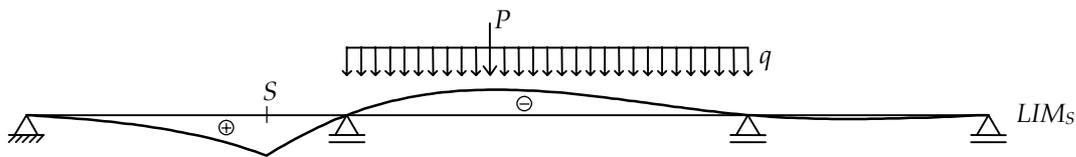


Figura 2.5 – Posicionamento da carga móvel para provocar mínimo momento fletor em uma seção.

Os valores máximo e mínimo de M_s devidos somente ao carregamento accidental podem ser obtidos por integração do produto $LIM_s \cdot q dx$ nos trechos positivos e negativos, respectivamente, da linha de influência, conforme equações 2.2 e 2.3:

$$\left(M_S^q\right)_{\max} = \int_0^4 LIM_S \cdot q dx + \int_9^{12} LIM_S \cdot q dx \quad (2.2)$$

$$\left(M_S^q\right)_{\min} = \int_4^9 LIM_S \cdot q dx \quad (2.3)$$

Os valores máximo e mínimo de M_S devidos à carga concentrada podem ser obtidos pelo produto $LIM_S \cdot P$, onde LIM_S é a maior ordenada positiva ou negativa da linha de influência, respectivamente :

$$\left(M_S^P\right)_{\max} = LIM_S^{\max} \cdot P \quad (2.4)$$

$$\left(M_S^P\right)_{\min} = LIM_S^{\min} \cdot P \quad (2.5)$$

Assim, os valores máximos e mínimos finais de M_S provocados pelo carregamento permanente e pela carga móvel são :

$$\left(M_S\right)_{\max} = M_S^g + \left(M_S^q\right)_{\max} + \left(M_S^P\right)_{\max} \quad (2.6)$$

$$\left(M_S\right)_{\min} = M_S^g + \left(M_S^q\right)_{\min} + \left(M_S^P\right)_{\min} \quad (2.7)$$

Observe que, no caso geral, o valor máximo final de um determinado esforço em uma seção não é necessariamente positivo, nem o valor mínimo final é necessariamente negativo. Isto vai depender da magnitude dos valores provocados pelos carregamentos permanente e acidental. Quando máximo e mínimo tiverem o mesmo sinal, o esforço dimensionante será o que tiver a maior magnitude. Quando máximo e mínimo tiverem sentidos opostos, principalmente no caso de momento fletor, ambos podem ser dimensionantes.

2.6. Envoltória Limite de Esforços

As envoltórias limites de um determinado esforço em uma estrutura descrevem para um conjunto de cargas móveis ou acidentais, os valores máximos e mínimos deste esforço em cada uma das seções da estrutura, de forma análoga a que descreve o diagrama de esforços para um carregamento fixo. Assim, o objetivo da Análise Estrutural para o caso de cargas móveis ou acidentais é a determinação de envoltórias de máximos e mínimos de momentos fletores, esforços cortantes, etc., o que possibilitará o dimensionamento da

estrutura submetida a este tipo de solicitação. As envoltórias são, em geral, obtidas por interpolação de valores máximos e mínimos, respectivamente, de esforços calculados em determinado número de seções transversais ao longo da estrutura.

A seguir é mostrado um exemplo de determinação de envoltória de esforços internos de uma viga bi-apoiada com balanços, carga permanente e carga móvel (Figura 2.6). Na figura também estão indicadas as seções adotadas para o cálculo dos valores limites e para o traçado das envoltórias. Devido a simetria da estrutura em relação à seção D , a obtenção dos valores limites será demonstrada apenas para as seções A , B , C e D , visto que a envoltória de esforço cortante será anti-simétrica e a de momento fletor será simétrica.

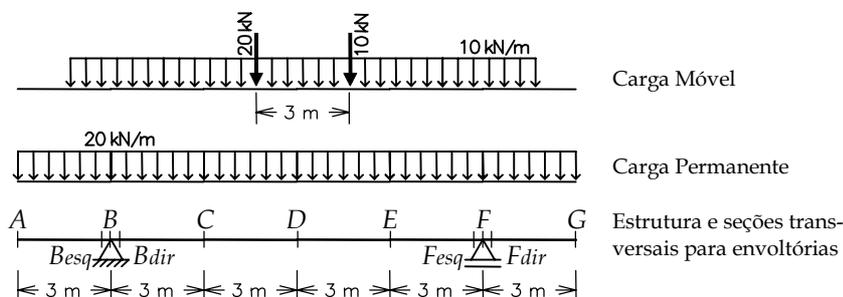


Figura 2.6 – Viga bi-apoiada com balanços, carga permanente e carga móvel.

Os esforços devidos à carga permanente foram primeiramente calculados, ou seja, determinaram-se os diagramas de esforço cortante e de momento fletor (Figura 2.7).

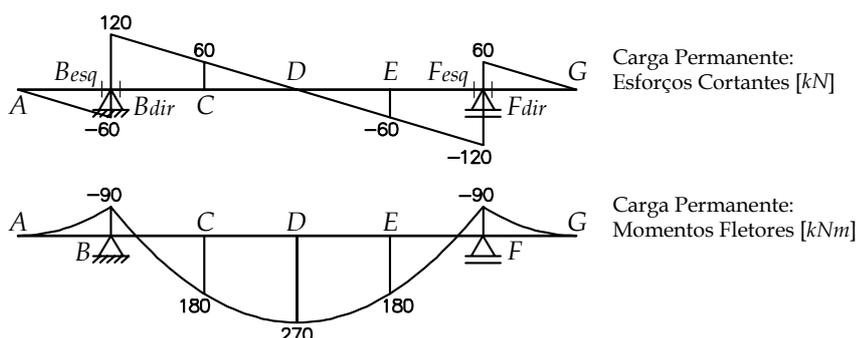
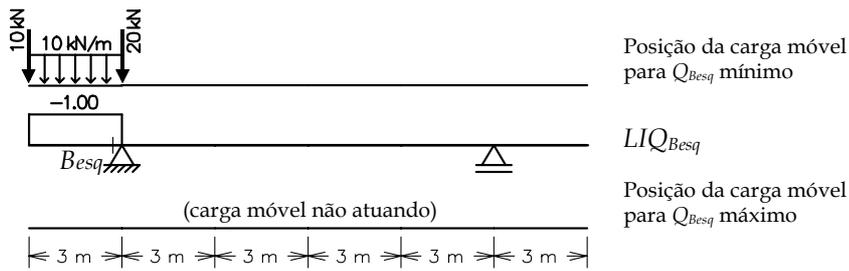


Figura 2.7 – Esforços internos da carga permanente.

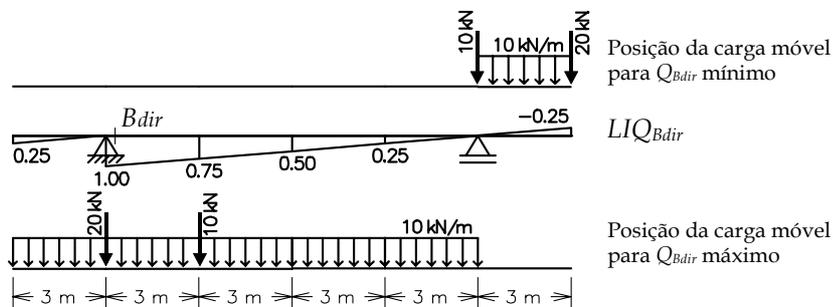
Em seguida, determinaram-se os esforços cortantes máximos e mínimos devidos à carga móvel para cada seção transversal adotada da estrutura (Figuras 2.8 a 2.11). O posicionamento do trem-tipo para determinar os valores limites em cada seção segue o procedimento mostrado na seção 2.5.



$$(Q_{Besq})_{mín.}^{c.m.} = [20 \cdot (-1.00) + 10 \cdot (-1.00) + 10 \cdot 3 \cdot (-1.00)] = -60.00 kN$$

$$(Q_{Besq})_{máx.}^{c.m.} = 0$$

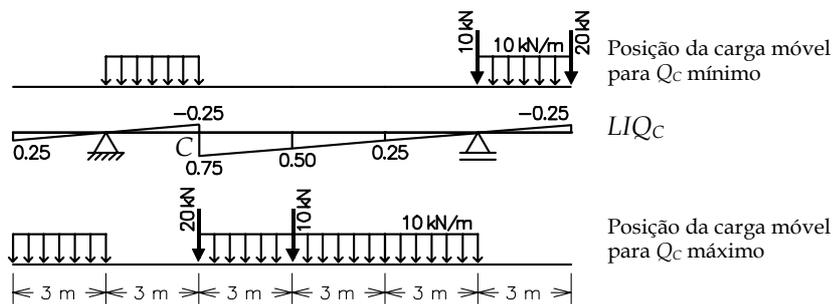
Figura 2.8 – Esforço cortante máximo e mínimo na seção B^{esq} .



$$(Q_{Bdir})_{mín.}^{c.m.} = [20 \cdot (-0.25) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (-0.25)] = -8.75 kN$$

$$(Q_{Bdir})_{máx.}^{c.m.} = [20 \cdot (1.00) + 10 \cdot (0.75) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (0.25) + 10 \cdot 0.5 \cdot 12 \cdot (1.00)] = +91.25 kN$$

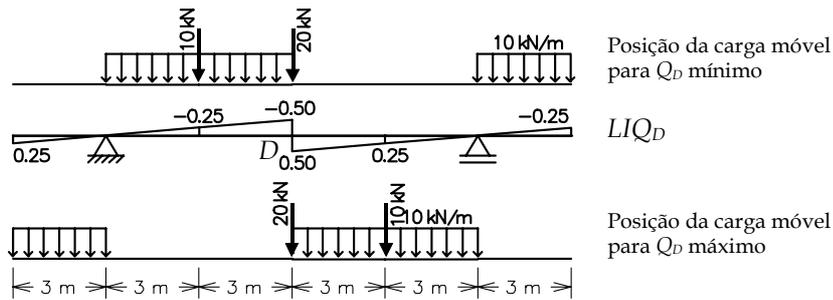
Figura 2.9 – Esforço cortante máximo e mínimo na seção B^{dir} .



$$(Q_C)_{mín.}^{c.m.} = [20 \cdot (-0.25) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (-0.25) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (-0.25)] = -12.50 kN$$

$$(Q_C)_{máx.}^{c.m.} = [20 \cdot (0.75) + 10 \cdot (0.50) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (0.25) + 10 \cdot 0.5 \cdot 9 \cdot (0.75)] = +57.50 kN$$

Figura 2.10 – Esforço cortante máximo e mínimo na seção C .



$$(Q_D)_{\min.}^{c.m.} = [20 \cdot (-0.50) + 10 \cdot (-0.25) + 10 \cdot 0.5 \cdot 6 \cdot (-0.50) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (-0.25)] = -31.25 \text{ kN}$$

$$(Q_D)_{\max.}^{c.m.} = [20 \cdot (0.50) + 10 \cdot (0.25) + 10 \cdot 0.5 \cdot 6 \cdot (0.50) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (0.25)] = +31.25 \text{ kN}$$

Figura 2.11 – Esforço cortante máximo e mínimo na seção D .

A Tabela 2.1 mostra os resultados do esforço cortante máximo e mínimo nas seções da estrutura devido a cada carregamento atuante e o valor final das envoltórias de esforço cortante, que estão representadas na Figura 2.12. O esforço cortante devido à carga móvel na extremidade livre do balanço corresponde à carga de 20 kN posicionada sobre esta seção.

Tabela 2.1 – Envoltórias de Esforço Cortante [kN].

Seção	Carga	Carga Móvel		Envoltórias	
		mínimo	máximo	mínimo	máximo
A	0	-20.00	0	-20.00	0
B_{esq}	-60	-60.00	0	-120.00	-60.00
B_{dir}	+120	-8.75	+91.25	+111.25	+211.25
C	+60	-12.50	+57.50	+47.50	+117.50
D	0	-31.25	+31.25	-31.25	+31.25
E	-60	-57.50	+12.50	-117.50	-47.50
F_{esq}	-120	-91.25	+8.75	-211.25	-111.25
F_{dir}	+60	0	+60.00	+60.00	+120.00
G	0	0	+20.00	0	+20.00

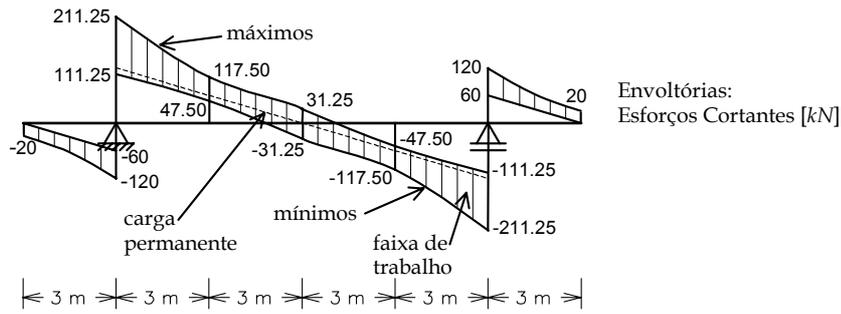
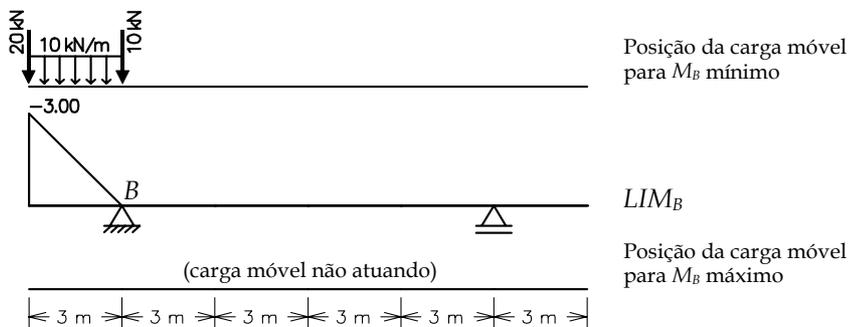


Figura 2.12 – Envolvórias de Esforço Cortante.

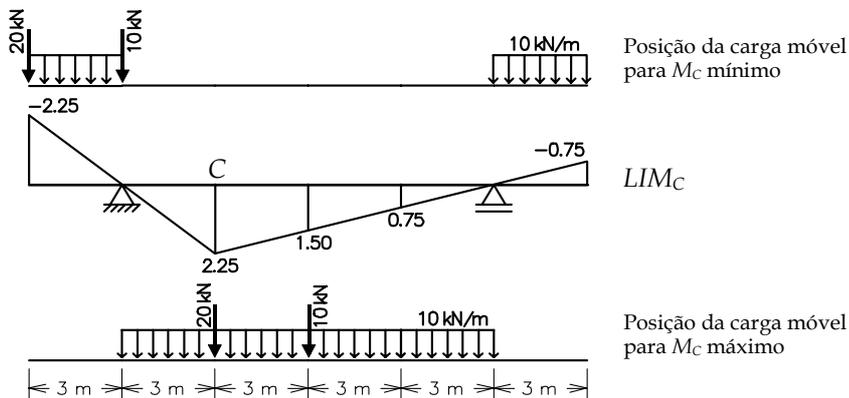
As Figuras de 2.13 a 2.15 mostram como foi feita a determinação dos momentos fletores máximos e mínimos devidos à carga móvel para cada seção transversal da estrutura.



$$(M_B)_{mín.}^{c.m.} = [20 \cdot (-3.00) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (-3.00)] = -105.00 \text{ kNm}$$

$$(M_B)_{máx.}^{c.m.} = 0$$

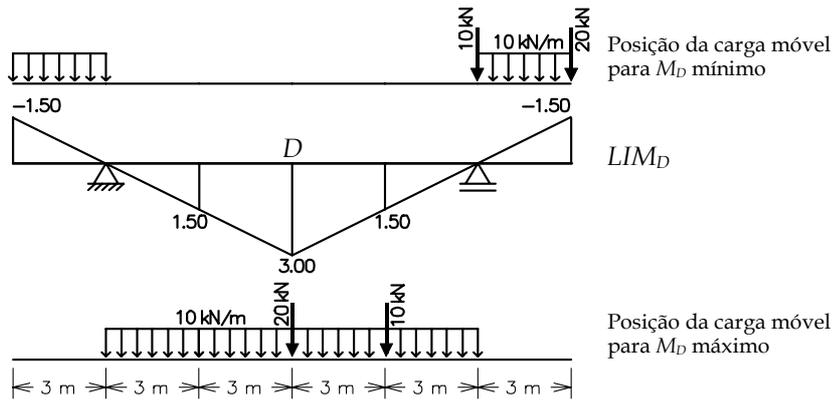
Figura 2.13 – Momento fletor máximo e mínimo na seção B.



$$(M_C)_{mín.}^{c.m.} = [20 \cdot (-2.25) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (-2.25) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (-0.75)] = -90.00 \text{ kNm}$$

$$(M_C)_{máx.}^{c.m.} = [20 \cdot (2.25) + 10 \cdot (1.50) + 10 \cdot 0.5 \cdot 12 \cdot (2.25)] = +195.00 \text{ kNm}$$

Figura 2.14 – Momento fletor máximo e mínimo na seção C.



$$(M_D)_{mín.}^{c.m.} = [20 \cdot (-1.50) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (-1.50) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (-1.50)] = -75.00 \text{ kNm}$$

$$(M_D)_{máx.}^{c.m.} = [20 \cdot (3.00) + 10 \cdot (1.50) + 10 \cdot 0.5 \cdot 12 \cdot (3.00)] = +255.00 \text{ kNm}$$

Figura 2.15 – Momento fletor máximo e mínimo na seção D.

A Tabela 2.2 mostra os resultados do momento fletor máximo e mínimo nas seções da estrutura devido a cada carregamento atuante e o valor final das envoltórias de momento fletor, que estão representadas na Figura 2.16.

Tabela 2.2 – Resultados obtidos na envoltória de momento fletor.

Seção	Carga		Carga Móvel		Envolvórias	
	Permanente	mínimo	máximo	mínimo	máximo	
A	0	0	0	0	0	
B	-90	-105	0	-195	-90	
C	+180	-90	+195	+90	+375	
D	+270	-75	+255	+195	+525	
E	+180	-90	+195	+90	+375	
F	-90	-105	0	-195	-90	
G	0	0	0	0	0	

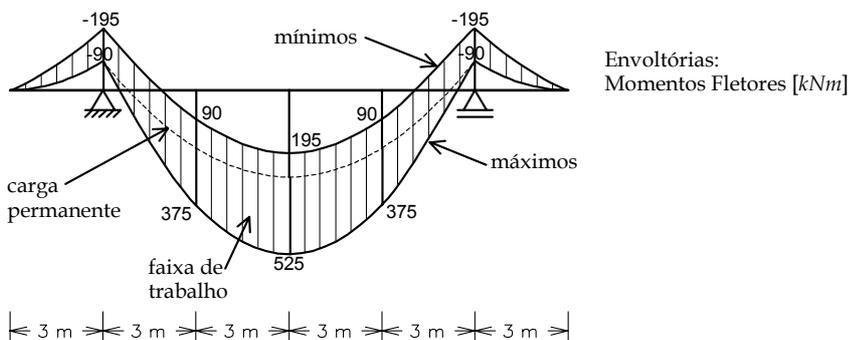


Figura 2.16 – Envolvórias de momento fletor.

Conforme visto, para determinar os valores limites de esforços em uma seção transversal precisa-se conhecer as posições de atuação do trem-tipo que causam esses esforços limites. Para casos mais simples de trem-tipo e linhas de influência, como no exemplo acima, é intuitiva a determinação dessas posições limites. Porém, para casos mais complexos, torna-se impossível essa determinação por simples observação.

Esse problema de determinar posições limites constitui um problema de otimização, em que o objetivo é minimizar e maximizar os valores dos esforços nas seções transversais dos elementos estruturais em função da posição de atuação do trem-tipo. Porém, não existe uma função matemática que descreva a envoltória de esforços de uma estrutura, o que torna impossível o uso da maioria dos métodos clássicos de otimização para resolver este problema, já que muitos deles utilizam derivadas da função objetivo, como será visto no capítulo seguinte.