

2

Formulações para o CVRP

O CVRP é um dos problemas mais estudados em otimização combinatória. Em função disso, a literatura disponível sobre o mesmo é bastante vasta. Durante os últimos anos, diversas formulações diferentes foram propostas para o problema. Nesse capítulo apresenta-se três formulações diferentes, todas importantes para o desenvolvimento do trabalho dessa dissertação: uma formulação com número polinomial de variáveis e número exponencial de restrições, uma formulação com número polinomial de variáveis e restrições e, por fim, uma formulação com número exponencial de variáveis e número polinomial de restrições.

2.1

Uma formulação com número polinomial de variáveis e número exponencial de restrições

Nessa seção apresenta-se uma formulação para o CVRP que possui um número polinomial de variáveis e exponencial de restrições. Seja x_e , $e \in E$, a variável que controla se uma determinada aresta faz parte de alguma rota da solução para o CVRP. Se $x_e = 0$, a aresta não pertence à solução (não pertence a nenhuma rota) e se $x_e > 0$ a aresta pertence à solução. Considere o politopo R_1 definido por

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2, \quad i \in V, \quad (2-1)$$

$$\sum_{e \in \delta(0)} x_e = 2K, \quad (2-2)$$

$$\sum_{e \in E(S, \bar{S})} x_e \geq 2 \lceil d(S)/C \rceil, \quad S \subseteq V, \quad |S| \geq 2, \quad (2-3)$$

$$0 \leq x_e \leq 1, \quad e \in E \setminus \delta(0), \quad (2-4)$$

$$0 \leq x_e \leq 2, \quad e \in \delta(0). \quad (2-5)$$

As restrições (2-1) garantem que cada cliente é visitado por exatamente um veículo. A restrição (2-2) diz que devem existir exatamente K rotas (correspondentes aos K veículos) que incluem o depósito, cada uma delas deixando e retornando ao depósito. As desigualdades (2-3) impõem um limite inferior no número de veículos necessários para servir os clientes no conjunto S . Finalmente, as restrições (2-4) e (2-5) limitam os valores que as variáveis x_e podem assumir. Em especial, as restrições (2-5) permitem rotas com apenas um cliente. Note que, pela região R_1 definida, todos os veículos devem ser usados, ou seja, cada veículo deve visitar pelo menos um cliente. Assim, o CVRP pode ser formulado como

$$\min \left\{ \sum_{e \in E} c_e x_e : x \in R_1 \cap \mathbb{Z}^{|E|} \right\} \quad (2-6)$$

onde o uso de $\mathbb{Z}^{|E|}$ garante que x deve ser inteiro.

A formulação (2-6) foi utilizada por Cornuéjols e Harche [20]. Laporte, Nobert e Desrochers [48] já haviam usado anteriormente uma formulação semelhante. As desigualdades (2-3) são conhecidas como *capacity cuts* e serão mostrados em mais detalhes no decorrer dessa dissertação. Elas asseguram que um determinado conjunto S será servido por um número suficiente de veículos (respeitando a capacidade C de cada veículo). As desigualdades (2-3) podem ser tornadas mais fortes substituindo seu lado direito por $2r(S)$, a solução ótima para o BPP associado ao conjunto S . Porém, na prática o limite inferior dado por $2 \lceil d(S)/C \rceil$ é mais simples de ser calculado e é o que geralmente é utilizado. A formulação (2-6) possui um número exponencial de restrições devido ao número exponencial de desigualdades do tipo (2-3). O número de variáveis é polinomial ($O(E)$).

2.2

Uma formulação com número polinomial de variáveis e restrições

Nessa seção apresenta-se uma formulação com número polinomial de variáveis e restrições. Porém, antes é apresentada a modelagem e a notação utilizadas nessa seção, por introduzirem alguma notação diferente do restante da dissertação.

Aqui modela-se o CVRP sobre um grafo direcionado $D = (V_+, A)$ derivado do grafo não-direcionado original $G = (V_+, E)$. Para isso, cada aresta $e = (i, j), i, j \in V_+, e \in E$, dá origem a dois arcos $[i, j]e[j, i]$ em D com custos $c'_{ij} = c'_{ji} = c_e$. Seguindo a notação usada para o caso do grafo não-direcionado, $\delta^+(i), i \in V_+$ denota o conjunto de arcos de D que saem de i , isto é, $[i, j] \in A, j \in V_+$. Analogamente, $\delta^-(i), i \in V_+$ denota os arcos que chegam em i , isto é, $[j, i] \in A, j \in V_+$. Finalmente, dado um subconjunto S de vértices em V_+ , $A(S)$ denota o conjunto de arcos em A com ambas as extremidades em S .

Considere dois conjuntos de variáveis associados ao grafo direcionado $D = (V_+, A)$: $\{y_{ij} : [i, j] \in A\}$ e $\{z_{ij} : [i, j] \in A\}$. Cada um será utilizado para modelar um subproblema de fluxo em redes com um só produto, sendo que os dois subproblemas serão interligados por restrições adicionais. Esses subproblemas serão complementares no sentido que, para cada vértice $i \in V$, d_i funcionará como um vértice cliente (destino de fluxo) para um subproblema e um vértice fornecedor (origem de fluxo) para o outro. Defina-se o seguinte politopo, R_2 ,

$$\sum_{[i,j] \in \delta^-(i)} y_{ij} - \sum_{[j,i] \in \delta^+(i)} y_{ji} = d_i, \quad i \in V, \quad (2-7)$$

$$\sum_{[i,j] \in \delta^-(i)} z_{ij} - \sum_{[j,i] \in \delta^+(i)} z_{ji} = -d_i, \quad i \in V, \quad (2-8)$$

$$\sum_{[i,j] \in \delta^-(i)} (y_{ij} + z_{ij}) = C, \quad i \in V, \quad (2-9)$$

$$\sum_{[0,j] \in \delta^-(0)} (y_{0j} + z_{0j}) = KC, \quad (2-10)$$

$$y_{ij}, z_{ij} \geq 0, \quad [i, j] \in A. \quad (2-11)$$

O CVRP pode ser formulado como

$$\min \left\{ \sum_{[i,j] \in A} (c'_{ij}/C)(y_{ij} + z_{ij}) : (y, z) \in R_2 \cap \{(y_{ij} + z_{ij}) \in \{0, C\}, [i, j] \in A\} \right\}. \quad (2-12)$$

Essa formulação foi dada por Lucena [51] e generaliza a formulação para o TSP de Finke, Clauss e Gunn [27]. As restrições (2-7), (2-8) e (2-11) definem caminhos de fluxos viáveis para cada um dos dois subproblemas envolvidos. A restrição (2-10), juntamente com $\{(y_{ij} + z_{ij}) \in \{0, C\}, [i, j] \in A\}$ em (2-12), garante que existem K arcos deixando o depósito (vértice 0). Cada um desses arcos deixará o depósito transportando uma quantidade de C unidades de fluxo. Analogamente, pode ser mostrado que exatamente um arco, com quantidade acumulada de C unidades de fluxo, deve deixar qualquer vértice em V . Tomando as restrições (2-7) e (2-8) juntas, pode-se mostrar que deve existir exatamente um arco (com total acumulado de C unidades de fluxo) entrando em qualquer vértice em V . Segue então que devem existir exatamente K arcos entrando no depósito (cada um com total acumulado de C unidades de fluxo). Logo, como os graus dos vértices são considerados, até aqui uma solução viável para (2-12) é uma solução viável para o CVRP. Adicionalmente, deve existir um caminho do depósito para qualquer vértice $i \in V$ e também um caminho de volta de i para o depósito (as restrições (2-7) e (2-8) garantem isso). Assim, uma solução viável para (2-12) é conexa e possui K rotas centradas no depósito. Fica restando então mostrar que a capacidade dos veículos não é excedida na formulação (2-12). Isso é garantido pelo fato de que, ao longo das rotas, os fluxos modelados por $\{z_{ij} : [i, j] \in A\}$ podem decrescer de um valor máximo de C unidades (quando deixando o vértice 0) até um mínimo de zero unidades (quando entrando no vértice 0). Analogamente, pode se chegar a conclusão semelhante analisando as variáveis de fluxo $\{y_{ij} : [i, j] \in A\}$. Na formulação (2-12), o número de variáveis e de restrições são proporcionais a $O(A)$ e, por isso, a formulação possui um número polinomial de colunas e linhas.

2.3

Uma formulação com um número exponencial de variáveis e um número polinomial de restrições

Seja $I = \{1, \dots, n\}$ um conjunto finito e $\{I_j : j \in J\}$, $J = \{1, \dots, m\}$, uma coleção de subconjuntos de I . Uma partição de I é qualquer conjunto P , $P \subseteq J$, de subconjuntos $\{I_j : j \in P\}$, dois a dois disjuntos ($I_j \cap I_i = \emptyset$, para $i \neq j$), onde $\bigcup_{j \in P} I_j = I$. Assumindo que um custo h_j é associado a cada I_j , o Problema de Particionamento de Conjuntos (*SPP*, do inglês *Set Partitioning Problem*) consiste em encontrar uma partição de I com custo mínimo. O Problema de Particionamento de Conjunto com Restrição de Cardinalidade (*CCSPP*, do inglês *Cardinality Constrained SPP*) consiste em restringir as partições a terem um número fixo $k \geq 1$ de subconjuntos. Considere o politopo, R_3 ,

$$\sum_{j \in J} a_{ij} \lambda_j = 1, \quad i \in I, \quad (2-13)$$

$$\sum_{j \in J} \lambda_j = k, \quad (2-14)$$

$$0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad j \in J, \quad (2-15)$$

onde a_{ij} vale 1 se $i \in I_j$ e 0 caso contrário. A variável λ_j representa a inclusão de um subconjunto j na partição se $\lambda_j > 0$ ou, caso contrário ($\lambda_j = 0$), a não inclusão do subconjunto j . Uma formulação para o CCSPP é dada por

$$\min \left\{ \sum_{j \in J} h_j \lambda_j : \lambda \in R_3 \cap \mathbb{Z}^{|J|} \right\}. \quad (2-16)$$

Agora, o CVRP será reformulado como um CCSPP. Primeiramente, assume-se uma correspondência um-para-um entre os elementos de I e os clientes do CVRP. Considere que J representa o conjunto de todos subconjuntos não-vazios de clientes que podem ser servidos por um único veículo, ou seja, J representa rotas viáveis. Finalmente, seja h_j , para $j \in J$, igual ao valor da solução ótima do TSP associado ao subgrafo de G induzido pelo vértice 0 (depósito) e os vértices representando os clientes em I_j . Sujeito à essas restrições, (2-16) pode ser entendido como uma formulação para o CVRP.

A cardinalidade de J em (2-16) pode ser muito grande, já que o número de rotas viáveis possíveis cresce exponencialmente com o número de clientes. Entretanto, não é necessário gerar todas as rotas viáveis possíveis para encontrar a solução para o problema. Isso porque o modelo do CVRP baseado no CCSP pode ser resolvido pela técnica de geração de colunas. Para isso, inicialmente considera-se um pequeno subconjunto J' de J e define-se um politopo R_4 , equivalente a R_3 , porém para variáveis $\{\lambda_j : j \in J'\}$. Considerando a solução ótima para a formulação

$$\min \left\{ \sum_{j \in J'} h_j \lambda_j : \lambda \in R_4 \right\}, \quad (2-17)$$

sejam $\{u_i : i \in I\}$ e v as variáveis duais associadas às restrições $\sum_{j \in J'} a_{ij} \lambda_j = 1, i \in I$ e $\sum_{j \in J'} \lambda_j = k$, respectivamente. Para verificar-se quando uma solução para (2-17) é também ótima para (2-16), para $I = V$, define-se o politopo R_5 como

$$\sum_{i \in V} d_i \alpha_i \leq C, \quad (2-18)$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} \gamma_e = 2 \alpha_i, \quad i \in V, \quad (2-19)$$

$$\sum_{e \in \delta(0)} \gamma_e = 2, \quad (2-20)$$

$$\sum_{e \in E(S)} \gamma_e \leq \sum_{i \in S \setminus \{j\}} \alpha_i, \quad S \subseteq V, \quad j \in S, \quad (2-21)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i \in V, \quad (2-22)$$

$$0 \leq \gamma_e \leq 1, \quad e \in E, \quad (2-23)$$

e resolve-se o seguinte problema associado de geração de colunas:

$$\min \left\{ \sum_{e \in E} c_e \gamma_e - \sum_{i \in V} u_i \alpha_i - v : (\alpha, \gamma) \in R_5 \cap (\mathbb{Z}^{|V|}, \mathbb{Z}^{|E|}) \right\}. \quad (2-24)$$

Em (2-18)-(2-24), α_i representa a inclusão (ou não) de um cliente

na solução e γ_i representa a inclusão (ou não) de uma aresta na solução. A formulação (2-24) é o Problema do Caixeiro Viajante com Coleta de Prêmios e restrição de Capacidade (*CPCTSP*, do inglês *Capacitated Prize-Collecting TSP*) e com pequenas modificações é atribuída a Balas [42]. A restrição (2-18) é a restrição de capacidade do veículo e (2-19) garante que duas arestas estão associadas a cada cliente que é incluído na rota. A restrição (2-20) garante que existem duas arestas associadas ao depósito. A restrição (2-21) elimina subrotas, garantindo que o número de arestas usadas em qualquer subconjunto S está relacionada ao número de clientes visitados em S .

Note que uma solução ótima não-vazia (α^*, γ^*) para (2-24) corresponde a uma rota viável para o CVRP para os elementos de I (clientes) para os quais $\alpha_i^* = 1$. Denota-se o conjunto correspondente por I_{j^*} . O custo dessa rota é $\sum_{e \in E} c_e \gamma_e^*$. Além disso, note que um custo reduzido de $(\sum_{e \in E} c_e \gamma_e^* - \sum_{i \in V} u_i \alpha_i^* - v)$ seria obtido se uma variável λ_{j^*} com custo $h_{j^*} = \sum_{e \in E} c_e \gamma_e^*$ fosse adicionada a R_5 (isto é, se j^* fosse adicionado a J'). Assuma que esse custo reduzido fosse negativo. Com isso teria-se que existe pelo menos um $j \in J \setminus J'$ cuja adição a J' resultaria na diminuição do valor da solução ótima de (2-17). Em particular, qualquer solução viável de (2-24) com valor negativo serviria a esse propósito.

Nesse ponto, três considerações devem ser feitas. Primeiramente, rotas com apenas um cliente (rotas no formato $0 \rightarrow i \rightarrow 0$ para algum cliente i) não são permitidas em (2-24) (por causa da restrição (2-20)). Assim requer-se a enumeração inicial desses casos com os índices correspondentes sendo introduzidos em J' inicialmente. Isso garante custos reduzidos não-negativos para todas as variáveis associadas a rotas com um único cliente em (2-17). A segunda consideração é sobre uma possível modificação da função objetivo em (2-24). A função objetivo em (2-24) associa os valores das variáveis duais em (2-17) a variáveis de vértice em R_5 . É possível, no entanto, redistribuir os valores duais exclusivamente entre as variáveis de arestas. Isso leva a uma função objetivo como

$$\min \left\{ \sum_{e \in E} \bar{c}_e \gamma_e - v : \gamma \in R_5 \cap \mathbb{Z}^{|E|} \right\}, \quad (2-25)$$

onde $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i/2 - u_j/2$. Finalmente, a terceira e mais importante consideração é que não existe garantia que uma partição de I em K subconjuntos está contida em J' . Essa limitação pode ser parcialmente contornada com a introdução de n variáveis representando as rotas de um único cliente, já

explicada anteriormente. Porém, isso não garante a viabilidade da solução para a formulação (2-16). Nessa situação, a inviabilidade somente pode ser detectada durante uma enumeração implícita do problema.

Uma solução ótima para (2-16) é obtida quando a solução para (2-17) é inteira e a solução ótima para o subproblema de geração de colunas (2-24) é não-negativa. Caso contrário, tem-se que recorrer a enumeração implícita (*branch-and-bound*). Nesse caso, uma dificuldade adicional fica aparente: a de lidar com o conjunto de colunas implicitamente. Um procedimento de resolução exato, como o descrito anteriormente, é conhecido como um algoritmo de *branch-and-price* (uma visão mais detalhada de algoritmos de *branch-and-price* pode ser obtida em [11]).

Uma etapa crítica em um algoritmo de *branch-and-price* é aquela que modifica o subproblema de geração de colunas, como (2-24) acima, em consequência do *branch*. Idealmente, deseja-se manter a estrutura básica do subproblema intacta durante a enumeração implícita. Uma regra de *branching* muito usada que permite isso (para SPPs com número exponencial de variáveis) é a seguinte: em cada nó de enumeração, decidir se dois elementos de I devem pertencer ao mesmo subconjunto ou não. Sejam $i, j \in I$ os elementos envolvidos. Cada *branching* pode modificar o problema de geração de colunas, (2-24), com a adição ou da restrição $\alpha_i = \alpha_j$ ou da restrição $\alpha_i + \alpha_j = 1$.

Nota-se também que o gargalo desta formulação encontra-se no subproblema de geração de colunas que aqui corresponde a um problema fortemente NP-difícil. Agarwal et al. [7] propõe uma forma de contornar esse problema.

A formulação do CVRP por CCSP foi introduzida por Balinski e Quandt [12]. Um algoritmo de geração de colunas baseado nessa reformulação foi sugerido por Agarwal, Mathur e Salkin [7] e é diferente do mostrado nessa seção. O algoritmo apresentado nessa seção contribuiu para a elaboração da parte de geração de colunas do algoritmo de BCP implementado para o CVRP. A formulação apresentada nessa seção possui um número de restrições claramente polinomial (tanto no problema mestre ($O(V)$) quanto no subproblema de geração de colunas ($O(E)$)). O número de variáveis é evidentemente exponencial, sendo correspondente ao número de rotas viáveis.