I. Quatro espaços semânticos e modais: a filosofia de Wittgenstein vista de fora dela.

O método axiomático de Aristóteles é a abordagem do homem honesto à verdade e à realidade. Partimos do que é auto-evidente e claro e prosseguimos de uma maneira construtiva e verificável para o resto.[1]

Tendo em conta o que havia sido feito até aquele ponto por Hilbert e sua escola, a batalha pareceria quase completamente ganha. Então vieram os teoremas da incompletude de Gödel. Mesmo um dos aspectos mais simples da realidade matemática, a estrutura dos números naturais, não era sintaticamente completamente codificável.[2]

Os invasores de Dedekind[3] voltaram com força e, com a incompletude de Gödel e o teorema ascendente de Löwenheim-Skolem, a estrutura toda explodiu em um quase caos. As pessoas juntaram as peças, é claro, e as estudaram, como bons cientistas costumam fazer.[4]

1. *Introdução*

Daremos início à nossa discussão sobre as relações entre as noções de *sentido* e *possibilidade* abordando-as, não como essas aparecem quando já nos encontramos *dentro* da obra daquele autor, mas sim como elas se apresentam vistas ainda desde *de fora* daquele arcabouço filosófico. Nossa idéia é que, antes de passarmos diretamente à maneira como

[1] Chateaubriand, O *Logical Forms*. Manuscrito. cap 17, pg. 1.
[2] Chateaubriand, O. *Logical Forms*. Manuscrito. cap 17, pg. 5.
[3] I.e., os modelos não standard. Ver DEDEKIND, R. *Letter to Keferstein*. Em VAN HEIJENOORT. *From Frege to Gödel*. 1967. pg. 100.

Wittgenstein concebe essas relações, seria proveitoso fazemos uma rápida excursão por entre a literatura atual e vermos certas dificuldades agudas envolvendo essas noções na discussão contemporânea sobre lógica e filosofia da matemática.

Pretendemos, com essa estratégia, alcançar dois objetivos a um só tempo. Em primeiro lugar, vamos dar início à nossa defesa de que as questões envolvendo as relações entre as noções de "*sentido*" e "*possibilidade*" são *fundamentais para toda a filosofia de Wittgenstein*, sua filosofia da matemática aí incluída. Por outro lado, e ao mesmo tempo, estaremos tentando mostrar como as questões wittgensteineanas, quando vistas *fora* das roupagens reconhecidamente idiossincráticas que elas recebem no interior da obra do filósofo, passam a exibir inúmeros pontos de contato com a discussão contemporânea sobre filosofia da lógica e da matemática.

Durante toda a nossa apresentação, adotaremos uma maneira propositadamente "não wittgensteineana" de abordar as noções de possibilidade e sentido. Não hesitaremos mesmo em tratar estas noções de uma forma marcadamente "realista", muito distante do temperamento filosófico daquele autor. Novamente nosso intuito será o de evitar as estranhas abordagens de Wittgenstein e apresentar os problemas relacionados com estas noções em uma roupagem a mais "intuitiva" e imediata possível, tal qual essas são tratadas normalmente na literatura atual sobre filosofia da lógica e matemática.

Neste primeiro capítulo, abordaremos o impacto que certos resultados da moderna matemática determinam sobre as relações entre quatro "espaços" fundamentais aléticos e semânticos, a saber, os espaços de possibilidade *lógico-matemática* e de possibilidade *real* (ou física), e os dois "espaços semânticos", o espaço do que é possível *conceber ou pensar,* e espaço do que é possível *exprimir*. Como ficará claro mais adiante, nossa sugestão é a de que, uma boa maneira de abordarmos a filosofia da matemática de Wittgenstein (e do resto de sua obra) é nunca perdermos de vista, quando tratamos qualquer tema mais específico, como as

[4] Chateaubriand, O. *Logical Forms*. Manuscrito. cap 16, pg. 19.

decisões que tomarmos ali afetarão um certo "equilíbrio" entre as quatro noções espaços que mencionamos acima.

Nosso intuito com esta seção inicial será menos uma exposição sistemática e completa das questões envolvendo essas quatro noções e sim algo mais singelo: tentaremos argumentar que efetivamente *há um problema* com nossa interpretação corrente destes conceitos fundamentais e suas relações. Estamos convencidos de que, independentemente de nossa opinião sobre a filosofia daquele autor, independentemente de aceitarmos ou não as (amargas) soluções propostas por ele, devemos reconhecer pelo menos que suas preocupações e angústias eram *genuínas.* Ou seja, devemos reconhecer que essas questões, que tanto afligiram a Wittgenstein, realmente *estão* entre as dificuldades mais dolorosas a desafiar os esforços de esclarecimento de *todos* os filósofos, até a atualidade. Em nossa opinião, essas não são questões apenas *para a filosofia de Wittgenstein*, mas desafios abertos à todas as correntes filosóficas atuais. Uma vez aceita essa premissa e, estamos convencidos, veremos com muito melhores olhos as estranhas propostas do autor.

2. Teoria dos conjuntos e "fosso necessário" entre as possibilidade físicas e as lógico-matemáticas

Desde o aparecimento da teoria dos conjuntos, a matemática moderna tem representado um constante desafio à capacidade dos filósofos de fornecer uma "concepção estruturada e razoável" do mundo, notadamente quando essa teoria pretende dar conta das dificuldades envolvendo as relações entre os "quatro espaços" que nos interessam. Daremos início a nossa rápida exposição de algumas destas questões abordando o impacto que a teoria dos conjuntos teve para nossa maneira de encarar as relações entre as noções de possibilidade *matemática* e possibilidade *real ou física*.

Aristóteles[5] já fazia uma distinção muito importante entre uma noção relativa de possibilidade, que ele chamava de possibilidade *real* e uma noção mais forte, absoluta, de possibilidade, a noção de possibilidade *lógica*. Modernamente a noção aristotélica de possibilidade real ganhou contornos epistêmicos, e relativizou-se à vários ramos do conhecimento: falamos hoje em possibilidade *física,* possibilidade *biológica*, etc. Entre essas noções "não absolutas", geralmente há um certo consenso de que a noção de possibilidade física de alguma forma "englobaria" as outras noções relativas.

A primeira questão que vamos abordar envolve a dificuldade de como devemos entender a relação entre a mais larga dentre as várias noções de possibilidade *real* - a noção de possibilidade *física* - e sua companheira "absoluta", a noção de possibilidade *lógico-matemática*. É claro que o problema de como devemos encarar cada uma dessa noções de possibilidades, bem como as relações que essas mantém entre si, é tão antigo quanto a própria história da filosofia. O que é novo na situação contemporânea é que, desde o aparecimento da teoria dos conjuntos, no final do século XIX, o *fosso* que separa a noção absoluta de possibilidade, a possibilidade lógico-matemática, e a sua correspondente real mais abrangente, a possibilidade física, aumentou imensamente. Ou, dito de uma forma mais precisa, do ponto de vista da matemática anterior à teoria dos conjuntos, ainda que *contingentemente pudesse ser o caso* que as possibilidades lógico-matemáticas *transcendessem* às possibilidades físicas, não havia nenhuma *necessidade* para que tal se desse. Assim, a grande novidade que a teoria dos conjuntos trás para esse debate é a de que, a partir dela, esse fosso tem como que "uma existência necessária".

Vários filósofos contemporâneos perceberam essa mudança fundamental. O próprio Quine comenta, em um artigo sobre a filosofia da lógica e da matemática de Carnap:

> Talvez a matemática clássica realmente estivesse mais perto da experiência naquela época do que agora; de qualquer forma os alcances infinitísticos da teoria dos conjuntos, que são tão repletos de

[5] Aristóteles, *Methaphysics*. V, Capítulo 12 1019 b 30.

> especulação e tão remotos de qualquer experiência possível, não estavam explorados em seus dias [de Stuart Mill].[6]

De uma forma mais incisiva, Charles Parsons, um dos filósofos mais importantes para o ressurgimento do interesse nas noções modais aléticas na filosofia da matemática, escreve:

> O espaço-tempo é sempre tido como um conjunto de $2^{\aleph_0}$ pontos, ou pelo menos, de uma cardinalidade não essencialmente superior a essa. Isto põe um limite definitivo no número de objetos "espaço-temporais" possíveis, digamos $2^{2^{\aleph_0}}$. Se o fisicamente possível é o que pode em algum sentido ser realizado no espaço e no tempo, então estruturas de cardinalidades suficientemente elevadas cuja aceitação não é controversa entre os teóricos de conjuntos (...) não são fisicamente possíveis.[7]

Temos claramente expressa, no trecho acima a surpreendente conseqüência que a teoria dos conjuntos trás para nossa maneira de encarar as noções de possibilidade física e possibilidade lógico-matemática: há um fosso *necessário* entre elas. O espaço das possibilidades lógicas vai *necessariamente* além, *transcende* o espaço das possibilidades físicas.

Nem todos os matemáticos e filósofos aceitaram essa extraordinária conseqüência da teoria dos conjuntos. Alguns pensadores tiveram uma reação oposta. Uma conclusão assim só poderia significar uma coisa: a redução ao absurdo daquela teoria. Algo *teria* que estar errado com os princípios básicos de Cantor. De fato, como procuraremos argumentar ao longo dessa investigação, nos parece iluminador conceber a recusa destas "assimetrias" entre as duas noções de possibilidade, física e lógico-matemática, bem como as assimetrias semelhantes envolvendo as noções de exprimibilidade, como um elemento importante para entendermos a

[6] Quine, W. *Carnap and Logical Truth*. Em Quine, W. *The Ways of Paradox*. 1966. Pg. 108.
[7] Parsons, C. *Quine on the Philosophy of mathematics*. Em Parsons, C. *Mathematics in Philosophy*. 1983, Pg. 191.

estanha “cisma” no seio da filosofia da matemática e na própria matemática contemporânea: o surgimento dos movimentos construtivistas.[8]

Assim, poderíamos tentar ver um construtivista como alguém que, no fundo, considera inaceitáveis exatamente as assimetrias que a proposta conjuntística envolve. O que o construtivista desejaria seria, ao contrário, pelo menos uma *aproximação* entre essas noções. Dito de outra forma, um construtivista almejaria que, o que quer que seja *possível lógico-matematicamente,* jamais pudesse ser *antecipadamente descartado como* algo *necessariamente impossível de ser efetivamente realizado*, antecipadamente descartado como uma *possibilidade física*. Assim, o que está sendo recusado seria exatamente a existência *necessária* desse fosso entre o que é fisicamente possível e o que é matematicamente possível. Que *contingentemente* essa cisão se dê, no entanto, seria algo perfeitamente aceitável para os construtivistas.

3. *As relações entre exprimibilidade, possibilidade física e possibilidade lógico-matemática.*

Deixemos por hora a discussão sobre a maneira como entendemos as relações entre possibilidade física e possibilidade lógico-matemática. Nosso cenário ainda não está completo; as relações que nos interessam envolvem prioritariamente duas personagens ainda fora do enredo, i.e., os espaços relacionados com à noção de *sentido*, a saber, as noções de *exprimibilidade* e *concebilidade*. Comecemos por introduzir, em nossa discussão, a primeira destas personagens, a noção de *exprimibilidade.* Nosso interesse na noção de exprimibilidade será, como sempre, explorarmos na literatura recente sobre filosofia de lógica e da matemática alguns aspectos da maneira como normalmente são encaradas as relações entre essa nova noção e as duas anteriores, as noções de possibilidade física e possibilidade lógico-matemática.

[8] Empregaremos o termo “construtivista” nessa trabalho como uma designação geral englobando todas os diversos movimentos críticos à teria dos conjuntos. Assim, o intuicionismo, por exemplo, seria uma forma de construtivismo, segundo a maneira como empregamos aquele termo.

Na seção anterior, estivemos comentando como a teoria dos conjuntos introduz a idéia de um fosso necessário separando as noções de possibilidade física e possibilidade lógico matemática. Agora, no momento de voltarmos nossa atenção à noção de exprimibilidade, seria razoável esperarmos que a aceitação da existência daquele fosso tivesse algum reflexo sobre as relações entre esse novo espaço de possibilidades e os dois anteriores. Isto porque, de início, parece que deveríamos esperar encontrar *alguma conexão* entre a noção de exprimibilidade e a idéia de possibilidade física. Sempre que desejamos exprimir algo, precisamos recorrer a um certo "pedaço do mundo físico" que usaremos como *veículo* para exprimirmos o que pretendemos dizer. Assim, de uma forma bastante grosseira, qualquer possibilidade lingüística, *quando encarada apenas desde um ponto de vista sintático*, deveria sempre se traduzir em alguma possibilidade física. A dimensão sintática da linguagem teria que estar sempre convenientemente "contida" dentro do espaço das possibilidades físicas.

Segundo nosso argumento anterior, seria natural esperarmos "*alguma conexão"* entre as noções de exprimibilidade e de necessidade física. Já que toda a dimensão sintática da linguagem estaria necessariamente imersa no espaço das possibilidades físicas, sua dimensão semântica – os conteúdos exprimíveis por essa sintaxe – também deveriam guardar *alguma relação* com o espaço do que é fisicamente possível. Toda a nossa dificuldade se centraria então em estabelecermosexatamente *qual seria essa tal "relação"* entre a dimensão semântica da linguagem e seu substrato sintático.

Por outro lado, estaremos também preocupados em avaliar as conexões entre as noções de "exprimibilidade" e "possibilidade *lógico-matemática"*. E, dado o fosso que separa a idéia do que é *logicamente possível* daquilo que é apenas *fisicamente possível*, bem como atrelamento da *sintaxe* ao que é *fisicamente possível*, seria natural esperarmos novamente *algum reflexo* daquela dependência, i.e., alguma limitação paralela do alcance da noção de exprimibilidade em relação à de possibilidade lógica. Seria estranho imaginarmos uma relação tão divergente entre *sintaxe* e *semântica* a ponto de que, a despeito da limitação da *sintaxe* ao que é *fisicamente* possível, sua dimensão *semântica* lograsse englobar a totalidade do que é *lógico-matematicamente* possível.

O mais natural seria esperarmos, ao contrário, que a limitação sintática à possibilidade física impusesse *algum teto* à exprimibilidade, deixando-a aquém do espaço completo e absoluto do que é lógico-matematicamente possível. Como exatamente seria essa relação entre exprimibilidade e possibilidade lógica irá depender novamente, é claro, da própria maneira como encaramos as relações entre *sintaxe*, a dimensão "física da linguagem", e sua dimensão semântica, o conteúdo a ser expresso.

Finalmente, se imaginarmos algum teto à noção de exprimibilidade, i.e., uma subsunção *própria* da exprimibilidade ao espaço lógico-matemático, ficaremos obrigados a lidar com a idéia de *conteúdos necessariamente inexprimíveis.* Alguns conteúdos (alguns objetos e estruturas lógicas) estariam necessariamente para além de nossa capacidade expressiva. Como veremos mais adiante, é exatamente esse cenário mais desafiador que acabou se configurando. A filosofia da matemática dos últimos 50 anos tem se debatido com o problema agudo de oferecer um tratamento filosófico adequado à noção de "modelo", espécies de "resíduos inexprimíveis" de nossas estruturas matemáticas. Mas, não antecipemos demais os problemas.

4. *Quantos símbolos diferentes podemos usar?*

Na seção anterior, argumentamos que seria natural esperarmos alguma limitação de nossas capacidades expressivas como reflexo de uma limitação paralela do espaço das possibilidade físicas *vis a vi* o espaço lógico-matemático.Esta limitação incidiria, inicialmente, apenas sobre a dimensão sintática de nossas linguagens, mas, como argumentamos acima, seria estranho imaginarmos que essa limitação sobre a sintaxe não determinasse alguma limitação paralela também sobre a dimensão semântica.

Para ilustrarmos nossa discussão, voltemos ao artigo já mencionado de Charles Parsons. Em um trecho que se segue imediatamente àquele já citado, Parsons amplia suas considerações, envolvendo agora também a noção de exprimibilidade. Seu raciocínio, neste novo trecho, segue exatamente a linha de argumentação que introduzimos acima: o "aumento do fosso" entre possibilidade física e possibilidade lógico-matemática *acaba produzindo* reflexos sobre a nossa capacidade expressiva. Assim, segundo Parsons, alguns objetos *matematicamente possíveis* seriam, de alguma forma, *inexprimíveis* (dadas as limitações decorrentes da própria dimensão física envolvida em qualquer ato lingüístico).

Na citação sobre as relações entre espaço físico e espaço lógico-matemático Parsons argumentava, só para recordarmos, que necessariamente o número de objetos físicos possíveis não poderia ultrapassar $2^{2^{\aleph_0}}$. No trecho que nos interessa agora, como conclusão a seu raciocínio, Parsons dá o passo adiante e, baseado naquele limite, argumenta a favor da existência de um teto paralelo, agora incidindo sobre a nossa capacidade *expressiva*. O autor escreve:

> É somente quando as infinitudes superiores da teoria dos conjuntos Cantoriana são introduzidas que os objetos matemáticos passam a ter que violar as condições de representabilidade concreta.

Um pouco mais adiante, Parsons vai ainda mais além e nos apresenta um exemplo mesmo de um *objeto*, de algo que, segundo ele, estaria para lá de nossa capacidade de expressão:

> Não temos nenhuma razão que seja para acreditarmos que $\beth_\omega$ possa ser concretamente representado.[9]

No trecho acima encontramos claramente a idéia que discutimos acima, de que a transcendência do espaço de possibilidades lógico-matemático em relação ao físico teria que acarretar *algum tipo de limitação* paralela também para a nossa capacidade de expressão. Certos objetos, como $\beth_\omega$, não seriam "concretamente exprimíveis". Essa limitação seria decorrente de uma certa pobreza do espaço de possibilidades físicas disponíveis. Mais especificamente, a sugestão de Parsons no trecho mencionado é a de que essa limitação se daria no próprio *estoque de símbolos diferentes* que poderíamos utilizar na hora de montarmos nossos proferimentos. Parsons argumenta que a limitação do estoque de símbolos à nossa disposição (não mais do que $2^{2^{\aleph_0}}$ símbolos diferentes) produziria uma limitação expressiva paralela dos conteúdos "concretamente representáveis". Daí sua conclusão final de que $\beth_\omega$ estaria para além de nossa capacidade expressiva: não haveria objetos físicos disponíveis em "quantidade suficiente" para exprimir "concretamente" $\beth_\omega$.[10]

No artigo mencionado, Parsons não esclarece muito sobre o quão grave seria a limitação expressiva imaginada. O autor fala apenas, vagamente, da impossibilidade de se "exprimir concretamente" certos objetos. O que estaria por traz do qualificador "concreto"? Poderíamos exprimir, digamos, $\beth_\omega$, de forma "não concreta"? Afinal, de alguma forma, não parecemos ter maiores dificuldades em nos *referirmos* a $\beth_\omega$, até mesmo na hora de decretá-lo não concretamente-exprimível. E, nesse caso, qual seria a relevância da expressão "concreta"?

Na verdade, durante toda a sua breve discussão das relações entre os três espaços de possibilidades, Parsons parece estar usando, não uma versão *relativa* de inexprimibilidade, a noção de "inexprimibilidade-em-uma-linguagem", mas sua versão *absoluta,* a idéia diretamente de um objeto *intrinsecamente inexprimível*. Seu trecho não menciona nenhuma linguagem específica e, assim, sua intenção ao dar o exemplo de $\beth_\omega$ parece ser mesmo a de apresentá-lo como uma *instância* de um objeto *absolutamente* inexprimível. Essa noção de inexprimibilidade absoluta diretamente *de um objeto* é, no mínimo, problemática. Talvez, o adjetivo "concreto" de Parsons tenha sido introduzido apenas no sentido de aliviar um pouco essas dificuldades. Normalmente, ao invés de mencionarmos diretamente *um objeto* inexprimível, mencionamos apenas, indistintamente, *uma classe* de objetos ou estruturas assim.

[9] Parsons, C. *Quine on the Philosophy of mathematics*. Em Parsons, C. *Mathematics in Philosophy*. 1983. Pg. 191). Como explica Parsons em uma nota ao pé da página: « $\beth_\omega$ é o menor cardinal de um modelo standard da teoria simples dos tipos com um número infinito de indivíduos; é o menor cardinal maior do que $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, ...

5. A ligação entre teoria dos conjuntos e inexprimibilidade

No trecho de Parsons que discutimos, aquele autor oferece uma versão de como encararmos as conseqüências que a assimetria entre as noções de possibilidade física e lógico-matemática (decorrentes da teoria dos conjuntos) têm sobre a noção de exprimibilidade. Segundo essa versão, haveria uma limitação expressiva muito geral, decorrente de uma restrição sobre o estoque disponível de símbolos a serem usados.

A proposta de Parsons, no entanto, está longe de ser a versão mais comum do impacto da teoria dos conjuntos sobre a noção de exprimibilidade. Na verdade, aquela versão não é nem sequer a mais antiga. Imediatamente após a publicação dos trabalhos de Cantor, começando com sua demonstração em 1873 da não enumerabilidade dos reais, muitos pesquisadores se aperceberam de que uma das conseqüências dos argumentos do matemático alemão era exatamente a necessária existência, para qualquer linguagem, de certos "conteúdos" inexprimíveis nessa mesma linguagem. Nessa versão, mais comum, a inexprimibilidade destes conteúdos é decorrente, não de uma restrição do *estoque de símbolos* disponíveis, como no caso de Parsons, mas da *enumerabilidade* do conjunto total de *sentenças possíveis* em qualquer linguagem.

Como Parsons, aceitamos, inicialmente um teto superior para o número possível de símbolos usados. No caso das linguagens naturais, as palavras seriam formadas por um finito conjunto fixo de letras. E, mesmo no caso das linguagens formais, onde freqüentemente partimos de conjuntos infinitos de signos primitivos em nossos sistemas, esses conjuntos normalmente envolveriam infinitudes *enumeráveis* de signos. Ou seja, em ambos os casos teríamos um *teto superior* para nosso estoque de símbolos constituidores: $\aleph^0$ (bem inferior, portanto, ao mencionado por Parsons).

[10] Parsons fala aqui em impossibilidade, não diretamente de exprimibilidade, mas de exprimibilidade "concreta". Comentaremos essa distinção um pouco mais adiante.

Além da limitação acima, nessa versão mais comum, apelaríamos também a uma outra restrição teórica inicial: todos os nossos proferimentos envolveriam sempre um número *finito* de palavras ou signos primitivos constituidores. Em conjunto, essas duas limitações produziriam o resultado de que falamos acima: estaríamos novamente diante de um teto máximo para nossa capacidade sintática, uma vez que o conjunto total das *sentenças diferentes possíveis* produzidas nessas linguagens seria, ele também, *enumerável*.

Da mesma forma que antes, essa limitação sintática acabaria determinando que certos objetos lógico matemáticos estariam necessariamente para além de nossa capacidade expressiva-formal. Dessa vez, porém, os exemplos de objetos inexprimíveis seriam bem mais singelos do que $\beth_{\omega}$: certos *números reais* e mesmo certas *funções de números inteiros positivos* em números inteiros positivos já estariam, necessariamente, para lá de nossa capacidade expressiva. Essa assimetria entre o número total máximo de sentenças possíveis de uma linguagem – $\aleph^0$ – e as estruturas matemáticas que gostaríamos de representar (mesmo as mais singelas como funções entre inteiros) é um assunto recorrente da literatura sobre filosofia da matemática e mesmo em obras mais técnicas sobre lógica, desde a publicação dos trabalhos de Cantor.

Um comentário mais recente particularmente claro e pungente desse resultado aparece em um artigo de 1934 do lógico americano Alonzo Church. Lá, novamente encontramos o argumento de que a enumerabilidade das sentenças da linguagem introduziria necessariamente a idéia de certos objetos inexprimíveis:

> Já que, em qualquer sistema de lógica simbólica, o conjunto de todas as fórmulas é enumerável enquanto que o conjunto de todas as funções de números positivos não é enumerável, parece se seguir que, no caso de qualquer sistema de lógica simbólica, existe uma função de

> números inteiros positivos tal que não há nenhuma fórmula para representá-la.[11]

As conseqüências que Church via para o resultado de Cantor eram sombrias. A limitação expressiva, ainda que incidindo sobre uma classe muito ampla de linguagens lógicas, devia ser tomada, segundo Church, como uma demonstração da *inadequação* destas linguagens:

> Como seria possível que um sistema de lógica, em que o conjunto de todas as fórmulas é denumerável, possa ser adequado para qualquer ramo da matemática que lide com os membros de um conjunto não denumerável (em particular, para a teoria elementar dos números)?[12]

A conclusão do lógico americano era, assim, a de que a enumerabilidade das sentenças da linguagem determinariam que certas teorias matemáticas estivessem simplesmente para lá da fronteira daquelas que podem ser "representadas logicamente". O que impressionava a ele, no entanto, era o quão abrangente seria esse expurgo. Dito de outra forma, o que impressionava a Church era a *quantidade* de teorias matemáticas que teriam que ser dadas como estando além da fronteira da exprimibilidade dos "sistemas lógicos":

> Certamente que a existência de uma função de números inteiros positivos que não tenha representação como uma fórmula no sistema significa que o sistema é inadequado até mesmo para a teoria elementar dos números.[13]

[11] Church, A. *The Richard Pardox*. American Mathematical Monthly. Vol. 41 1934. Pg. 357
[12] Church, A. *The Richard Paradox*. American Mathematical Monthly. Vol. 41 1934. Pg. 357
[13] Church, A. *The Richard Pardox*. American Mathematical Monthly. Vol. 41 1934. Pg. 357

Assim, qualquer teoria matemática que envolvesse os números naturais seria objeto da mesma inexprimibilidade. A conclusão lúgubre de Church é a própria falência do programa de fundamentação lógico-matemática:

> Essa é obviamente um estado de coisas deplorável. Ele claramente implica que a totalidade do programa do lógico matemático é fútil.[14]

Novamente, a idéia de uma inexorável e necessária limitação das capacidades expressivas produziu reações ainda mais fortes entre alguns construtivistas do que a idéia anterior da existência de estruturas matemáticas necessariamente transcendentes ao espaço das possibilidades físicas. Poincaré foi um crítico feroz, tanto da teoria de Cantor como de suas extravagantes conseqüências. De fato, o matemático francês dedicou muito esforço para oferecer interpretações alternativas a cada um dos passos daquele argumento, de seu início, com o argumento da diagonal, até sua conclusão sobre a existência de uma limitação expressiva intrínseca a qualquer linguagem. E, como sabemos, o próprio paradoxo de Richard de 1905, tema central do artigo de Church que mencionamos, explora exatamente as conseqüências paradoxais de se imaginar um objeto absolutamente inexprimível.

6. Fundamentação e exprimibilidade "completa"

Temos estado apresentando alguns dentre os episódios importantes de um enredo central para todo o pensamento filosófico atual: a história de como certos resultados matemáticos pareceram determinar um desnivelamento necessário entre os meios de expressão e certos conteúdos lógico-matemáticos. Com a força de uma necessidade, alguns conteúdos desse tipo estariam sempre para além de quaisquer esforços nossos por representá-los. Até aqui, todos os nossos exemplos desse tipo de argumentação tomavam a teorias dos conjuntos como ponto de partida para seus argumentos. Vamos agora deixar de lado um pouco a teoria de Cantor para comentarmos uma outra fonte fundamental de resultados matemáticos determinadores de limitações expressivas: os famosos resultados negativos do programa de fundamentação da matemática, nas décadas de vinte e trinta do século XX.

Antes de considerarmos diretamente estes resultados negativos, no entanto, façamos uma rápida passagem por alguns aspectos relevantes do programa – *positivo* – de fundamentação da matemática. Isto porque, como veremos, desde seu início, em contraste com o caso da teoria dos conjuntos de Cantor, o programa de fundamentação da matemática já estava diretamente envolvido com o problema da exprimibilidade. Na verdade, esse programa de pesquisa perseguia até certo ponto um objetivo *inverso* ao daqueles argumentos oriundos da teoria dos conjuntos. Longe de procurarmos estabelecer a *existência* de conteúdos inerentemente inexprimíveis, o que se procurava era a *completa expressão* das teorias matemáticas.

Em seu início, no final do século XVIII e primeira metade do XIX, o objetivo do projeto de fundamentação da matemática visava apenas a substituição de explicações e justificações (geralmente baseadas em intuições geométricas) por outras mais adequadas e confiáveis. Já na segunda metade do século XIX, no entanto, a idéia de "confiabilidade" deixa de ser a preocupação fundamental, e o desígnio de livrar completamente as demonstrações matemáticas do recurso à intuição geométrica ganha vida própria e independente. Na linguagem da época, essas intuições geométricas deveriam ser substituídas por uma fundamentação "puramente aritmética", sem nenhum recurso à argumentos geométricos. Isto deveria ser feito em nome de uma exigência ainda um tanto vaga de "rigor científico". Assim, por exemplo, Dedekind afirma em seu famoso ensaio sobre a noção de continuidade de 1858:

> Mesmo agora eu considero como extremamente útil e de fato indispensável tal recurso à intuição geométrica em uma primeira apresentação do cálculo diferencial, se não queremos perder muito

[14] Church, A. *The Richard Paradox*. American Mathematical Monthly. Vol. 41 1934. Pg. 359

> tempo. Mas que essa forma de introdução ao cálculo diferencial não pode ser tomada como científica, ninguém pode negar. Para mim, esse sentimento de insatisfação era tão esmagador que tomei como resolução ficar meditando sobre essas questões até que encontrasse uma fundamentação puramente rigorosa e aritmética para os princípios da análise infinitesimal. [15]

Com os trabalhos de Frege, no entanto, o projeto de fundamentação se transforma em uma empreitada tecnicamente mais abrangente, bem como mais elaborada do ponto de vista de sua justificação filosófica. A idéia de se evitar o recurso a "intuição" se torna mais ampla e já não se limita mais àquelas de tipo "geométrico". O esforço de explicitação passa a envolver a explicitação das *conexões lógicas* entre os vários passos que apareceriam nas provas. Da mesma forma que no caso do apoio da geometria, cada recurso a uma intuição, ainda que apenas uma intuição lógica, é visto como uma falha de explicitação. A própria invenção da notação dos quantificadores e da moderna lógica simbólica parece ter sido um degrau na busca dessa objetivo maior. No *Begriffsschrift*, texto inaugural da nova lógica, Frege escreve:

> Para prevenir qualquer coisa intuitiva de penetrar aqui sem ser percebida, tive que despender todos os esforços para manter a cadeia de inferências livre de falhas. Ao tentar seguir esse requerimento da maneira mais estrita possível, descobri a inadequação da linguagem como um obstáculo; (...) essa deficiência me levou a idéia da presente ideografia. [16]

Além de ampliar a abrangência do projeto de fundamentação, Frege oferece uma justificação filosófica muito mais elaborada para sua urgência do que um vago aceno a uma idéia de "rigor científico". Como veremos, o programa de fundamentação da matemática passa

[15] Dedekind, R, *Essays on the Theory of Numbers*. 1963. pg. 2
[16] Frege, G. *Begriffsshrift*. Em Van Heijenoort. *From Frege to Gödel*. 1967. Pg.6

a ser uma cruzada para afirmar exatamente a possibilidade da *completa expressão* dos conteúdos matemáticos. Do sucesso de seu programa passa a depender, para Frege, o *próprio caráter "objetivo" da matemática*, ou seja, a possibilidade de livrarmos completamente essa ciência das intromissões "psicologizantes" que a tornavam subjetiva e imprecisa.

Na seção 26 de seu *Grundlagen der Arithmetik*, Frege distingue dois sentidos da palavra "objetivo". Em um primeiro sentido, menos caro ao filósofo, esse termo denotaria algo *concreto, espacial e temporalmente dado* (Frege fala mesmo em "manuseável").[17] O filósofo, no entanto, desaconselhava o emprego do termo nesse sentido "não-abstrato". Para esses casos, a palavra "concreto" (*"wirklich")* já preencheria completamente nossas necessidades. O segundo sentido que Frege distingue para a palavra "objetivo" é claramente a acepção fundamental para o filósofo. Em um dos trechos famosos de seus *Grundlagen*, Frege sugere que o próprio "eixo de [rotação] da terra", e o "centro de massa do sistema solar" seriam exemplos de entidades "objetivas" nessa segunda acepção do termo, ainda que esses "objetos" de maneira nenhuma merecessem ser chamados de "concretos".[18]

Nos interessa aqui particularmente a maneira como Frege explica esse segundo sentido de "objetivo". Segundo o filósofo, a marca característica que distinguiria os *pensamentos* ou *conceitos* "objetivos" seria exatamente a possibilidade de que esses últimos tenham seus conteúdos completamente *"expressos por palavras"*, ou seja, de *serem pensamentos ou conceitos completamente comunicáveis*. Daí a *intuição* ser algo tão danoso à matemática: seus conteúdos seriam *privados*, ou seja, *não comunicáveis*. Frege escreve:

> O que é objetivo é o que é sujeito a leis, o que pode ser concebido e julgado, *o que é exprimível em palavras*. O que é puramente intuído não é *comunicável*.[19]

---

[17] Frege, G. *Foundations of Arithmetic*, 1978 § 26, pg. 35
[18] Frege, G. *Foundations of Arithmetic*, 1978, § 26, pg. 35
[19] Frege, G. *Foundations of Arithmetic*, 1978, § 26, pg. 35

Assim, a própria *possibilidade de completa expressão na linguagem* passa a funcionar como *critério para a atribuição de "objetividade*" a algo (no sentido Frege reserva àquele termo).

A mesma insistência na possibilidade da completa comunicação reaparece em outra distinção famosa de Frege: a distinção entre "*idéia*" e "*sentido*". Novamente a sugestão do filósofo era reservarmos a palavra "*idéia*" à dimensão pessoal, *privada*, que uma expressão lingüística possa ter para um falante qualquer. Em contrapartida, à palavra "sentido" seria reservada a "*parte pública*", *comunicável*, do conteúdo de nossos pensamentos. Frege escreve:

> Idéias subjetivas são muitas vezes demonstravelmente diferentes em homens diferentes, idéias objetivas são as mesmas para todos. Eu mesmo usarei "idéia" apenas no sentido subjetivo, para evitar confusão.[20]

Na verdade, Frege vai mais além e afirma mesmo que, mais do que as idéia *poderem* diferir de falante a falante, elas quase que "por sua própria definição" *têm de ser diferentes*, para cada novo falante. Segundo o filósofo:

> A idéia de um outro homem é, *ex vi termini*, outra idéia. [21]

Assim, o projeto de fundamentação da matemática, nas mãos de Frege, havia sido completamente redefinido. Trata-se agora de um projeto que visa exatamente expurgar tudo aquilo que diga respeito às *idéias*, a parte subjetiva da linguagem matemática. O produto final deveria ser uma teoria que dependesse puramente dos *sentidos* de seus termos, sem nenhum recurso a processos privados não explicitados. Assim, já para Frege, se apresenta a possibilidade de interpretações alternativas de textos matemáticos. Mas essas possibilidades, no

[20] Frege, G. *Foundations of Arithmetic*, 1978, § 27, pg. 37
[21] Frege, G. *Foundations of Arithmetic*, 1978, § 27, pg. 37

entender do filósofo alemão, deveriam ser tomados como *falhas a serem corrigidas*, pois essas abririam espaço à subjetividade, à possibilidade de interpretações alternativas.

> ...se cada um tivesse o direito de entender por esse nome ["um"] o que quer que lhe aprouvesse, então a mesma proposição sobre "um" significaria coisas diferentes para pessoas deferentes, - tais proposições não teriam nenhum conteúdo comum.[22]

A afirmação do próprio caráter *objetivo* da matemática, meta a qual Frege dedicou os esforços de toda uma vida, passava a depender agora do sucesso de seu programa de *fundamentação*, i.e, da *completa expressão* dos "conteúdos matemáticos".

Como sabemos o projeto de fundamentação de Frege, baseado em uma linguagem lógica de *múltiplas ordens* associada ao *uso irrestrito da operação de abstração* sofreu um golpe mortal com o aparecimento do paradoxo de Russell. Por outro lado, a solução proposta por Russell, de estratificar o uso do operador de abstração em sua complexa estrutura de "tipos lógicos" não foi bem aceita. A solução de Russell resultava em uma estratificação também dos vários conjuntos numéricos, que se viam divididos e espalhados pelos vários andares da estrutura de tipos. Em uma decisão claramente motivada por desespero filosófico e técnico, Russell apela para uma solução *ad hoc* com seu axioma da *reducibilidade*. Essa solução, no entanto, parecia desrespeitar frontalmente a própria teoria dos tipos, que Russell apresentara como solução natural para o dilema engendrado por seu paradoxo.

7. Um novo programa de Fundamentação: o formalismo de Hilbert

Ainda que, no decorrer do século XX os logicismos de Frege e de Russell fossem vistos mais e mais como projetos fracassados, o anseio por uma fundamentação – o sonho de Frege de uma apresentação completa e sem falhas dos argumentos matemáticos, de uma explicitação completa de seu conteúdo – estavam longe de arrefecer. Vários projetos alternativos de fundamentação surgem nessa época, nas três primeiras décadas do século XX. Entre eles, no entanto, podemos afirmar sem medo de errar que o grande herdeiro do esforço de fundamentação de Frege e Russell foi o projeto de fundamentação formalista capitaneado por David Hilbert.

Como veremos, o projeto de Hilbert unia duas características fundamentais que o destacavam de outros projetos de fundamentação. Em primeiro lugar, a sugestão formalista sobre como reformular a própria concepção do que seria essa "fundamentação", de maneira a torná-la independente do contexto logicista. A proposta de Hilbert era tão natural que, de certa forma, continua dominando nossa visão do assunto até hoje. Por outro lado, diferentemente de outros projetos, a fundamentação do matemático e lógico alemão não visava descartar partes da matemática como espúrias. Todos os conteúdos matemáticas clássicos, a teoria dos conjuntos aí incluída, seriam "recuperados" e completamente fundamentados.

Das duas características do projeto de fundamentação formalista que mencionamos acima – sua abrangência de toda a matemática clássica e a reformulação da própria noção de "fundamentação" – nos interessa aqui fundamentalmente a segunda: a nova maneira como Hilbert e seu assistente Bernays passam a compreender a idéia de fundamentação. No caso específico dos projetos *logicistas* de fundamentação de Frege e de Russell, "fundamentar" não se distinguia claramente de "exprimir usando apenas conceitos lógicos". Ou seja, naquele contexto, poderíamos entender a idéia de "explicitação completa" como simplesmente a "logicização completa" da matemática, a formulação das teorias matemáticas usando apenas recursos extraídos da lógica. A idéia de "lógica", por sua vez, parecia associada, de forma muito natural, nos trabalhos de Frege, à idéia de completa *generalidade*, de uma linguagem livre de *conteúdos específicos*.

---

[22] Frege, G. *Foundations of Arithmetic*, 1978. Pg. I

Com o abandono da proposta logicista, a idéia de "completude" envolvida naquela proposta de fundamentação precisava ser reformulada. Como deveríamos compreender (sem recorrermos às formulações logicistas em torno da noção de "generalidade") as novas propostas de fundamentação? O que deveríamos entender pela *própria palavra "fundamentação"*? Inicialmente havíamos tomado "fundamentar" como um processo de "purgação das intuições geométricas da matemática". Mais tarde, com Frege e Russell, o desafio havia sido redefinido como a "possibilidade de redução da matemática à lógica", i.e., a idéia de livrarmos essa ciência de quaisquer "*conteúdos específicos*". O que deveríamos entender agora como sendo o novo objetivo da proposta de fundamentação, dado o esgotamento daqueles esforços anteriores?

Como frisamos acima, um dos pontos mais fortes do novo programa de fundamentação da matemática de Hilbert e Bernays era exatamente a oferta de uma reformulação muito razoável e natural para o que constituiria o objetivo último do programa como um todo. A proposta daqueles autores era simples: "fundamentar" passaria a ser simplesmente "formalizar".[23] Em uma das reorientações filosoficamente mais importantes de toda a história da filosofia da matemática, Hilbert e Bernays introduzem o conceito de "sistema formal" para desempenhar o papel que antes era atribuído à idéia de "generalização". Ao invés de afirmarmos, como no programa logicista, a *identidade entre matemática e lógica*, ofereceríamos agora uma outra identidade: entre matemática e *formalização*. No artigo de 1922, *On Hilbert's thoughts Concerning the Grounding of Arithmetic*, Bernays escreve:

> Matemática e lógica são baseadas em duas direções de abstração diferentes. Enquanto que a lógica lida com o que é *conceitualmente* mais geral, a matemática (pura) é a teoria geral das relações e propriedades formais. [24]

[23] Bernays escreve: «O método de considerações formais não é artificialmente introduzido, mas sim aparece quase que por necessidade se se quiser seguir mais de perto o processo de inferência lógica com respeito ao seu resultado.» Bernays, P. *The Philosophy of Mathematics and Hilbert's proof theory*. Em Mancosu, P. *From Brouwer to Hilbert: The debate on the Foundations of Mathematics*. 1998 Pg. 240

[24] Bernays, P. *On Hilbert's thoughts Concerning the Grounding of Arithmetic* . Em Mancosu, P. *From Brouwer to Hilbert: The debate on the Foundations of Mathematics*. 1998. Pg. 217.

8. *A idéia de "linguagem formal"*

Na seção anterior, enfatizamos uma certa "naturalidade" do projeto de fundamentação da matemática capitaneado por Hilbert e Bernays que o destacava de outros projetos de fundamentação surgidos na época. Assim, veremos que, por trás da idéia de "*formalização da matemática",* defendida por aqueles autores, encontraremos uma solução particularmente clara e direta para um problema que já havíamos identificado em vários pontos de nossa investigação até aqui: a questão de como deveríamos conceber a dependência entre o *conteúdo semântico* de nossas afirmações e o *substrato sintático* que as *veicularia*. Antecipando um pouco, a proposta de Hilbert e Bernays era a seguinte. Como já dissemos, segundo esses autores, deveríamos passar a identificar "fundamentação" simplesmente com a noção de "formalização". O conceito de formalização, por sua vez, envolveria fundamentalmente a idéia de que, a qualquer *distinção semântica* deveria corresponder sempre, em nossa linguagem, uma *distinção sintática* paralela.

Vejamos esse assunto mais detalhadamente, passa a passo. Como vimos em nossa discussão sobre o projeto de fundamentação de Frege, já para aquele pensador alemão, a idéia de *fundamentação* envolvia, não propriamente o objetivo de *justificação* de afirmações matemáticas (de mostrar sua *correção*), mas sim a idéia da "*total explicitação de seus conteúdos*". E, vimos também que, para Frege, esse projeto de total *explicitação dos conteúdos* das afirmações matemáticas, por sua vez, era uma exigência decorrente da necessidade de assegurarmos a *completa comunicabilidade* dos conteúdos matemáticos, i.e., na terminologia do pensador alemão, a "*objetividade"* desses conteúdos.

A inovação fundamental, proposta por Hilbert e Bernays envolvia, por sua vez, aceitarmos uma identificação muito plausível entre a idéia de "explicitação total" e a idéia de "formalização". Em uma abordagem muito natural ao fenômeno semântico, vimos que qualquer ato lingüístico envolveria sempre um certo substrato físico que serviria de "veículo" para a expressão de nossos pensamentos. Ora, seria natural explicarmos então a idéia de "explicitação" como sendo um "espelhamento completo da *semântica* sobre a *sintaxe"*. Assim, a exigência de formalização envolveria apenas a exigência de que a qualquer nuance semântica, estaria associado sempre uma distinção sintática correspondente. Nenhum desequilíbrio entre a intenção comunicativa e o substrato sintático veiculador poderia ocorrer. A estrutura sintática do ato expressivo formal deveria especificar completamente o conteúdo pretendido.

Falando em termos mais específicos, a novidade do projeto formalista (em relação aos projetos logicistas) era a idéia da formalizar a própria noção de *conseqüência lógica*. Assim, a *operação de inferência lógica* deveria ser reduzida a uma *operação puramente sintática* que envolvesse apenas a manipulação de signos (sem que jamais tivéssemos que levar em conta seus conteúdos semânticos). Essa operação sintática captaria tudo o que fosse relevante sobre aquela operação contentual, de tal maneira que sua contrapartida sintática a refletiria inteiramente. A evidência textual é muito abundante e conhecida sobre essa nova orientação do movimento de fundamentação da matemática de Hilbert e Bernays:

> A transição da lógica contentual para a abordagem formal se dá de tal maneira que nós desconsideramos o significado original dos símbolos lógicos e tomamos os símbolos eles próprios como representantes dos objetos e conexões formais. [25]

> Na minha teoria a inferência contentual é substituída pela manipulação de signos de acordo com regras; desta forma o método axiomático atinge aquela segurança e perfeição que ele pode e deve atingir se este é para se tornar o instrumento básico de toda a pesquisa teórica. [26]

O ponto fundamental do programa inteiro envolveria então a redução da própria noção de "verdade matemática" à mera manipulação sintática de signos. Todas as operações contentuais seriam substituídas por operações sintaticamente determinadas. Uma prova passaria a ser apenas uma derivação qualquer executada segundo essas regras. O coroamento final do

[25] Bernays, P. *The Philosophy of Mathematics and Hilbert's proof theory*. Em Mancosu, P. *From Brouwer to Hilbert: The debate on the Foundations of Mathematics*. 1998 Pg. 239

programa seria a identificação completa entre derivabilidade formal e verdade matemática. Um teorema qualquer da matemática "contentual" seria verdadeiro se e somente se seu correspondente formal fosse derivável, a partir dos axiomas, através de uma seqüência finita de aplicações de regras de derivação sintáticas. Em um trecho famoso, Hilbert escreve:

> A idéia fundamental da minha teoria da prova é a seguinte:
>
> Tudo que constitui matemática no sentido tradicional é rigorosamente formalizado, de tal forma que a matemática propriamente dita (ou matemática no sentido estrito) se transforma em uma coleção de formulas. (...) Uma prova é uma figura, que deve ser dada intuitivamente a nós como tal; ela consiste de inferências, onde cada premissa é ou bem um axioma, ou bem concorda com a fórmula final de uma inferência que lhe precede, ou é resultado de tal fórmula por substituição. Ao invés de inferência contentual, na teoria da prova temos uma ação externa de acordo com regras, a saber, o uso de esquemas inferenciais e substituição. Uma fórmula será chamada de provável se for, ou bem um axioma, ou bem a fórmula final de uma prova. [27]

9. *O programa de Hilbert e os teoremas de Gödel*

Em nossa discussão acima, sobre o projeto de formalista de fundamentação da matemática, enfatizamos que uma maneira muito geral de encararmos os objetivos daquele programa em termos das noções que vínhamos discutindo era tomá-lo como um esforço por acabar com qualquer divergência entre o espaço do que é *lógico-matematicamente possível* e as noções de *possibilidade física* e *exprimibilidade*. Como vimos, a idéia de formalização

[26] Hilbert, D. *The foundations of Mathematics*, Em Van Heijenoort *From Frege to Gödel*. 1967. pg.467

implicava em uma "traduzibilidade" imediata de qualquer conteúdo formalizado em termos de mera manipulação simbólica. Ou seja, mais precisamente, a cada distinção semântica teríamos sempre, em um contexto formalizado, uma distinção sintática correspondente. Em um contexto assim, a noção de exprimibilidade operaria sempre como que "em paralelo" com o espaço das possibilidades físicas.

Por outro lado, o objetivo central do programa envolvia reduzirmos toda a matemática, tudo o que é lógico-matematicamente possível, a estruturas puramente formais. De certa forma teríamos feito desaparecer o fosso entre possibilidade lógica e possibilidade física. Toda a divergência entre aqueles dois espaços que vínhamos discutindo até agora, envolvendo a teoria dos conjuntos e sua hierarquia de infinitudes, se mostraria apenas aparente. Como o próprio Hilbert esperançosamente anuncia em seu famoso artigo *On the infinite* de 1925, a própria noção de infinitude seria reduzida a uma *façon de parler*, uma forma de expressão colorida e instigante mas perfeitamente dispensável para a matemática:

> ...da mesma forma que o infinito, no sentido do infinitamente pequeno e do infinitamente grande para o caso dos processos ao limite do cálculo infinitesimal, puderam ser mostrados como sendo apenas uma maneira de falar, assim nós devemos reconhecer que o infinito no sentido de uma totalidade infinita (sempre que o encontrarmos nos modos de inferência) é algo meramente aparente.[28]

Diferentemente dos intuicionistas e construtivistas em geral, Hilbert tinha o maior entusiasmo para com a teoria dos conjuntos de cantor e sua hierarquia transfinita e não pretendia, de maneira nenhuma, descartá-la como propunham Brouwer e até mesmo seu assistente Hermann Weyl:

[27] Hilbert, D. *The Grounding of Elementary Number Theory* . Em Mancosu, P. *From Brouwer to Hilbert: The debate on the Foundations of Mathematics*. 1998. Pg. 269.

> [A teoria dos números transfinitos de Cantor] me parece ser o fruto mais admirável do intelecto matemático e, em geral, uma das maiores conquistas da atividade humana puramente racional. [29]

Em uma das frases mais famosas da filosofia da matemática, Hilbert sentencia:

> Ninguém será capaz de nos expulsar do paraíso que Cantor criou para nós. [30]

Como sabemos, em 1931 Kurt Gödel publicou seus famosos teoremas que demonstraram que o programa de fundamentação formalista, pelo menos na maneira como esse havia sido concebido, estava fadado ao fracasso. O primeiro teorema de Gödel de 1931 mostrava que a redução da noção de verdade a regras de manipulação meramente sintática não poderia ser completa. Em qualquer sistema formal que fosse capaz de exprimir a aritmética (de fato, apenas a aritmética recursiva primitiva), poderíamos construir uma sentença indecidível, i.e., uma sentença que jamais poderíamos demonstrar, nem como sendo verdadeira, nem como sendo falsa. O segundo teorema de Gödel bloqueia um ponto fundamental do qual dependia o sucesso de todo o projeto formalista: a demonstração da consistência de um sistema assim dentro do próprio sistema.

10. As conseqüências dos teoremas de Gödel

Qual seria exatamente a real significação dos resultados de Gödel? Que conseqüências esses resultados teriam, por exemplo, para o grupo de questões filosóficas que vínhamos tratando? Teríamos finalmente demonstrado que os esforços de Frege e Hilbert por acabar com a idéia de um fosso entre "exprimibilidade" e "possibilidade lógico-matemática" era uma tarefa

---

[28] Hilbert, D. *On the infinite*,Em Van Heijenoort *From Frege to Gödel* 1967. pg.370.
[29] Hilbert, D. *On the infinite*, Em Van Heijenoort *From Frege to Gödel* 1967. pg.373.
[30] HILBERT, David. On theinfinite,1925. Em Van Heijenoort *From Frege to Gödel* 1967. pg.376.

impossível, que realmente a divergência entre o espaço semântico e o lógico-matemático era inescapável?

Parte da dificuldade de avaliarmos exatamente o impacto dos teoremas de Gödel é que suas conseqüências mais imediatas e óbvias, apesar de espetaculares, eram todas negativas. Seus teoremas mostram claramente, por exemplo, que os esforços de fundamentação formalista da matemática, pelo menos na versão em que eles haviam sido pretendidos por Hilbert e Bernays, estavam condenados ao fracasso. Poderíamos ir mais além e afirmarmos que, em termos mais gerais, os resultados de Gödel pareciam colocar em cheque a própria *idéia de fundamentação da matemática*. A identificação de "fundamentação" com "formalização", proposta por Hilbert, era tão natural que pareceria haver pouco espaço para uma reorganização do projeto fundacionalista em moldes altenativos. Mas os teoremas do lógico austríaco não nos forneciam nenhuma indicação mais positiva sobre como deveríamos resolver os problemas filosóficos que *motivaram aqueles projetos de pesquisa*. Ainda que as soluções de fundamentação da matemática propostas por Frege, Russell, Hilbert e tantos outros fossem, de alguma forma, equivocadas, não ficava claro como deveríamos enfrentar os desafios filosóficos que aqueles projetos procuravam, de início, resolver.

Concentremos nossa atenção no problema da possibilidade de expressão de conteúdos lógico-matemáticos. Como vimos, uma das motivações centrais para os esforços de fundamentação, tanto de Frege quanto de Hilbert, era evitarmos a idéia de conteúdos matemáticos não (inteiramente) exprimíveis. As dificuldades com a aceitação desse idéia eram óbvias. Como Frege deixa claro em um trecho que já mencionamos, do início de seus *Grundlagen der Arithmetik:*

> ...se cada um tivesse o direito de entender por esse nome ["um"] o que quer que lhe aprouvesse, então a mesma proposição sobre "um"

> significaria coisas diferentes para pessoas deferentes, - tais proposições não teriam nenhum conteúdo comum.[31]

Na terminologia proposta por Frege ao aceitarmos que a matemática pudesse conter conteúdos incomunicáveis, teríamos aberto mão, nada mais nada menos, do próprio caráter "objetivo" daquela ciência. No entanto, como sabemos, é exatamente essa a opção interpretativa mais comum para os resultados de Gödel. Gödel teria mostrado que a noção de verdade matemática, ainda que restrita apenas à aritmética, já envolveria certos "conteúdos" que permaneceriam necessariamente para além de "explicitação completa", ou seja, para além da possibilidade de formalização.

Como procuraremos mostrar adiante, a aceitação desses conteúdos necessários, mas necessariamente incomunicáveis, parece envolver conseqüências estranhas e mesmo paradoxais em vários ramos da filosofia, da teoria da mente à própria filosofia da linguagem em geral. Estamos longe de pretender resolver todos essas dificuldades. Como deixamos claro em nossa introdução, nosso intuito com essa seção é meramente fornecermos uma visão dos problemas e propostas envolvendo quatro noções semânticas e modais fundamentais para a obra de Wittgenstein, tais quais elas são tratadas normalmente, fora do idiossincrático sistema filosófico daquele autor. Nas seções seguintes, até o final de nosso capítulo, discutiremos três propostas de solução (e as dificuldades que, por sua vez, elas envolvem) para os desafios representados pelos resultados de Gödel.

11. Gödel e a aceitação de conteúdos necessariamente inexprimíveis

Como antecipamos acima, a interpretação mais comum para o que seria a significação dos teoremas de Gödel é a de que esses teoremas teriam nos revelado a existência de conteúdos matemáticos não completamente especificáveis por nossos textos matemáticos. Assim, a

[31] FREGE. G. *The foundations of Arithmetic*. 1978. Pg. I

própria linguagem, nossa capacidade de veicularmos conteúdos, seria limitada. Mesmo nossas tentativas mais estritas de especificar esses conteúdos estariam permanentemente abertas a interpretações díspares, os chamados "modelos":

> O tipo de sistema lógico desenvolvido hoje em dia não é nem desinterpretado, nem completamente interpretado. Tipicamente, existem muitos modelos, vários para cada conjunto. Ainda podemos tomar alguns desses modelos como a "interpretação pretendida" da linguagem, ou da teoria corporificada naquela linguagem.[32]

Dentro da matemática, por sua vez, os resultados de Gödel foram normalmente encarados como um triunfo dos raciocínios infinitários de Cantor, contra a insistência finitária de formalização e explicitação total dos conteúdos matemáticos pretendida por Hilbert. O próprio Gödel escreve:

> Raciocínios não finitários em matemática eram normalmente considerados como tendo significado apenas na medida em que eles pudessem ser "interpretados" ou "justificados" em termos da matemática finitária. (Note que isso, em geral, acabou se mostrando impossível em conseqüência de meu trabalho e de pesquisas subseqüentes.) Essa visão, quase que necessariamente, leva a exclusão de raciocínios não finitários na matemática.(...)
> ...a essência deste ponto de vista [finitário] é a rejeição de todos os tipos de objetos abstratos e infinitos, dos quais os significados *prima facie* dos símbolos matemáticos são exemplos. Ou seja, significação é atribuída apenas a proposições que falem de *objetos concretos e finitos*, tais como combinações de símbolos.

[32] Shapiro, S. *Foundations without Foundationalism: A case for second-order logic*.1999. Pg. ix, pg. 208

> Essa cegueira (ou preconceito, o que quer que se queira chamar) dos lógicos é, de fato, surpreendente.(...) [33]

Deixemos o sucesso matemático da nova noção de "modelo" e nos concentremos nas opções filosóficas envolvidas na aceitação desses conteúdos matemáticos não completamente exprimíveis. A primeira delas diz respeito a uma personagem ainda ausente em nossa discussão, a quarta noção que listamos em nossa introdução, a noção de "*concebilidade*". Se nossa capacidade *expressiva* está necessariamente aquém de certos conteúdos matemáticos, o que diríamos a respeito de nossa capacidade de *intelecção*? Seria ela também limitada, da mesma forma que nossas capacidades lingüísticas? Mas, nesse caso, como deveríamos entender essa noção de um *conteúdo semântico (necessariamente) inconcebível*? Deveríamos imaginar que a multiplicidade de modelos e interpretações atingiria até mesmo o próprio *conteúdo de nossos pensamentos*? Deveríamos aceitar que ninguém jamais soube ou poderá saber exatamente do que está falando quando faz uma afirmação aritmética?

Normalmente a idéia de verdade pareceria envolver pelo menos *a possibilidade* de acesso de algum sujeito, alguma vez, a essa verdade. Assim, por exemplo, ainda que muitas verdades empíricas nos escapem, *a possibilidade* de que esse acesso tivesse se dado permaneceria sempre em aberto. Em um contexto necessário, normalmente imaginamos que a questão de acesso observacional desapareceria, é claro. Mas seria natural tomarmos então a possibilidade de acesso "*em pensamento*" como sendo inegociável. De alguma forma, deveria ser, ainda que apenas *meramente possível*, conectarmos *algum sujeito* com aquele conhecimento. Se mesmo a *possibilidade dessa conexão* estivesse, de início, descartada, a própria compreensibilidade de se falar em conhecimento, em conteúdo verídico pareceria, no mínimo, tornar-se problemática. Assim, por exemplo, Putnam escreve:

> Todos os comentadores concordam que a existência de tais modelos mostra que a interpretação pretendida, ou, como alguns preferem dizer, a "noção intuitiva de conjunto" não é capturada pela

[33] Wang, H. *A logical Journey*. 1996. Pg. 241

> noção de sistema formal. Mas se *axiomas* não podem exprimir a noção intuitiva de um conjunto, o que poderia então?[34]

Claramente a opção mais natural após aceitarmos a idéia de conteúdos necessariamente inexprimíveis é a aquela tomada pelo próprio Gödel. Longe de aceitarmos que as limitações de nossa *linguagem* se repetissem em termos de limitações paralelas em nossas *capacidades cognitivas*, permaneceria a identificação tradicional entre possibilidade lógica com *aquilo que pode ser pensado.* [35] A mente humana, de alguma forma, *seria assim capaz de transcender as limitações expressivas da linguagem e explorar o espaço inteiro das possibilidades lógico matemáticas.* Em um *postscriptum* as suas famosas palestras dadas em Princeton em 1934,Gödel escreve:

> Repare-se que os resultados mencionados neste postscriptum não estabelecem nenhum limite aos poderes da razão humana mas antes às possibilidades do formalismo puro em matemática.[36]

A opção de Gödel, apesar de ser, de certa forma, tradicional, não deixa de envolver certas dificuldades para uma sub-área da filosofia, a teoria da mente, mais especificamente, para as questões envolvendo as conexões entre a *mente* e o *cérebro*. A conexão é bem imediata. O cérebro, sendo um sistema físico, estaria firmemente ancorado ao que é *fisicamente possível*. Dada nossa aceitação de um fosso necessário entre *possibilidade física* e *possibilidade lógico-matemática*, e dada nossa proposta de alinhamento entre *concebilidade* e o que é *lógico-matematicamente possível*, pareceríamos ter que aceitar um fosso paralelo entre o que é *mentalmente possível* e o que é possível *ao nosso cérebro*.

---

[34] Putnam, H. *Realism and Reason*. 1983. pg. 3

[35] Essa conexão entre concebilidade e possibilidade lógica aparece, por exemplo, em Kant:

«Para conhecer um objeto, requer-se que eu possa provar sua possibilidade (seja pelo testemunho da experiência, seja a priori pela razão). Mas posso pensar o que quiser desde que não me contradiga, isto é, quando o meu conceito for apenas possível, embora eu não possa garantir se no conjunto de todas as possibilidades lhe corresponde ou não um objeto. Mas requerer-se-á algo mais para atribuir validade objetiva, possibilidade real, pois a primeira era apenas lógica a um tal conceito.» (Kant, I. *Crítica da Razão Pura*. 1980. A: XXVI Pg. 16)

Gödel se mostra completamente disposto a aceitar esse fosso entre a mente e o cérebro:

> Meu teorema da incompletude torna provável que a mente não seja mecânica, ou então a mente não pode entender seu próprio mecanismo.[37]
>
> Ou bem a matemática subjetiva [todas as proposições demonstráveis] supera a capacidade de todos os computadores, ou então a matemática objetiva [todas as proposições verdadeiras] supera a matemática subjetiva, ou ambas as alternativas podem ser verdadeiras. Se a primeira alternativa se dá, isto parece implicar que o funcionamento da mente humana não pode ser reduzido ao funcionamento do cérebro, que em todos os aspectos parece ser uma máquina finita com um número finito de partes, a saber, neurônios e suas conexões.[38]

Muitos filósofos, no entanto, não parecem compartilhar o entusiasmo de Gödel para com essas conseqüências de seu teorema. Sobretudo os filósofos auto-proclamados "naturalistas", que não admitem a idéia de um processo mental sem uma contrapartida fisiológica (ainda que isso signifique estender a pluralidade interpretativa até mesmo para nossos próprios conteúdos mentais). Putnam, por exemplo, escreve:

> Porque *deveriam* todas as verdades, mesmo todas as verdades empíricas, serem reveláveis a uma autômata probabilística (que é o que eu suspeito que sejamos) usando um material observacional finito?[39]

[36] Gödel, K. *Acerca de Proposições Formalmente indecidíveis nos de Sistemas Matemáticos Formais*. In Davis, M, *The undecidable*. Pg. 72
[37] Wang, H. *A logical Journey*. 1996. Pg. 186
[38] Wang, H. *A logical Journey*. 1996. Pg. 186
[39] Putnam, H. *Mathematics, Matter and Method*. 1979. Pg. 53.

Deixemos, no entanto, essa dificuldade concernente ao problema das relações entre a mente e o cérebro. Voltemos a considerar diretamente as dificuldades envolvidas na aceitação da impossibilidade em princípio de exprimirmos completamente conteúdos matemáticos, mesmo conteúdos aparentemente triviais, como a aritmética. As maiores dificuldades que a aceitação de uma exprimibilidade apenas parcial dos conteúdos matemáticos trás envolve como assegurarmos o que Frege identificou como a *caráter objetivo* (ou intersubjetivo) daqueles conteúdos, i.e., a possibilidade de nos livrarmos definitivamente de interpretações subjetivas.

Normalmente estamos preparados a aceitar que certas noções seriam apenas *parcialmente exprimíveis*. Sensações internas, sentimentos, emoções, são normalmente tomados por nós como envolvendo sempre uma certa dose de inexprimibilidade. Assim, aceitamos comumente a idéia de que nunca lograríamos transmitir a outrem todo o exato conteúdo de uma dor nossa (digamos, sentida no momento presente em que falamos). No máximo, poderíamos tentar *indicar* ou *reproduzir as condições externas causadoras de nossa dor*, na esperança de que a sensação que nosso interlocutor associará aos nossos esforços de especificação seja, pelo menos, semelhante à nossa. Assim, não poderíamos “dar ao próximo”, “diretamente”, nenhuma de nossas sensações, de nossos sentimentos e emoções.

Aceitamos, normalmente, toda essas limitações em nossas capacidades expressivas *para sensações e emoções internas*. Mas essas limitações *não deveriam atingir*, é claro, *conteúdos matemáticos*. Se, para algum tipo de conteúdo, nossas intenções de comunicação pareceriam poder ser completamente bem sucedidas, esse tipo de conteúdo seria, certamente, matemático. A matemática seria a ciência exata por excelência. E, por outro lado, a idéia de falarmos em *pensamentos matemáticos*, acessíveis apenas internamente, mas não completamente exprimíveis, pareceria aproximar aquela ciência do que há de mais subjetivo, nosso sentimentos e emoções.

Pior do que isso. Normalmente aceitamos uns aos outros como *árbitros últimos* de nossas próprias sensações internas. Quem poderia corrigir uma constatação minha de que eu mesmo estou com dor? Apenas a própria pessoa teria um acesso direto às suas próprias dores, aos seus próprios sentimentos. Mas, e a respeito da matemática? Estaríamos igualmente dispostos a imaginar um acesso interno análogo, de forma a explicarmos nossa conexão com esses conteúdos matemáticos? Gödel, em uma opção filosófica famosa e extravagante, parece aceitar essa possibilidade. De uma forma análoga à intuição imediata de nossa dor, teríamos também intuições "intelectuais" de *conteúdos matemáticos*:

> ...nenhuma regra finita poderia captar completamente nossa intuição matemática - porque se o fizesse, determinaríamos também sua consistência, o que vai além da regra.[40]
>
> apesar de muito distantes da experiência sensorial, nós realmente temos algo como uma percepção também dos objetos da teoria dos conjuntos, como fica claro pelo fato de que os axiomas se impõem a nós como verdadeiros.[41]

A maioria dos filósofos sentiria pelo menos uma certa apreensão em acompanhar Gödel na postulação dessa apreensão intuitiva interna de objetos abstratos. Longe dos objetos matemáticos serem normalmente tomados como sendo dependentes de uma apreensão interna, como a dor, eles pareceriam, ao contrário, completamente independentes de qualquer subjetividade. A matemática estaria sempre acima de qualquer alegação subjetiva de qualquer pessoa. O recurso a um argumento envolvendo algo como "eu sinto isso internamente, mas não posso exprimir completamente esse sentimento" pareceria completamente estranho àquela ciência. Não parecemos estar dispostos a aceitar ninguém como árbitro final de assuntos matemáticos, mesmo os matemáticos mais respeitados. No entanto, é nessa posição em que

[40] Gödel, K. Em Wang, H. *A logical Journey*. 1996. Pg. 185
[41] Gödel, K. Em Wang, H. *A logical Journey*. 1996. Pg 226

parecemos nos encontrar ao aceitarmos uma parcela inexprimível, apenas internamente acessível, de conteúdos matemáticos.

Ainda que pudéssemos dominar internamente esses conteúdos matemáticos, sua intersubjetividade (o que Frege chamou de "objetividade") estaria comprometida. Da mesma maneira que a respeito de sentimentos internos, estaria sempre aberta a possibilidade de que a compreensão de outrem de uma afirmação matemática evolvesse um modelo diferente daquele por nós pretendido. Assim, por exemplo, Dummett escreve em seu artigo *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem (1963)*:

> Eu posso de fato aceitar que, ao dizer certas coisas a você, o induzo a associar os mesmo significado a uma palavra que eu, mas não poderia ter nenhuma evidência que minha hipótese fosse correta: teria que me apoiar em uma fé cega. [42]
>
> Mesmo que eu possa reconhecer em mim mesmo algo que possa querer chamar de apreensão de um conceito, não poderia reconhecer a presença de tal coisa em outra pessoa: a respeito dela eu saberia apenas que ele usa a palavra de alguma certa maneira.[43]
>
> Um significado, não redutível ao uso que eu associo a uma palavra (...) é algo que eu posso reconhecer apenas em mim mesmo: não posso reconhecê-lo em você, e não posso dizer-lhe como reconhecê-lo em si mesmo.[44]

12. Algo escaparia das limitações expressivas

Na seção anterior procuramos dar uma idéia, ainda que sumária, de algumas das dificuldades filosóficas ligadas a aceitação da idéia de conteúdos necessários necessariamente

[42] Dummett, M. *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem* (1963). Em Dummett, M. *Truth and other enigmas*. 1978. Pg. 190
[43] Dummett, M. *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem* (1963). Em Dummett, M. *Truth and other enigmas*. 1978. Pg. 188

inexprimíveis como conseqüência dos resultados de Gödel. O ponto que parece trazer os maiores desafios às nossas tentativas de elucidação filosófica é certamente o caráter *absoluto* das limitações expressivas pretendidas. Nada, nenhuma linguagem, nenhum gesto comunicativo poderia jamais ser bem sucedido em especificar, final e univocamente, esses conteúdos.

Uma solução que nos parece bastante disseminada entre os lógicos para as dificuldades relacionadas à idéia de conteúdos matemáticos necessariamente inexprimíveis consiste em negar exatamente o *caráter absoluto* daquela limitação de nossas capacidades expressivas. Assim, segundo essa interpretação dos teoremas de Gödel (e outros resultados mais recentes), aqueles resultados atingiriam *apenas as linguagens formais*. De alguma maneira as linguagens *informais*, empregadas no dia a dia do matemático, lograriam dar conta precisamente da tarefa que se revelou impossível às suas congêneres formais: fixar exatamente a interpretação, o modelo pretendido. Comentando essa abordagem, Stewart Shapiro, por exemplo, escreve em seu recente livro em defesa das lógicas de segunda ordem:

> A atitude prevalecente parece ser de que a matemática *informal* é de alguma forma suficiente para descrever e comunicar as estruturas e conceitos em questão, mas que a semântica modelo-teorética tem que falhar onde a prática informal é bem sucedida. [45]

Segundo essa sugestão, as análises conceituais por trás dos resultados de limitação do formalismo de alguma maneira não se aplicariam à linguagem informal da matemática:

> Essa visão nega qualquer papel significativo de qualquer semântica rigorosa na explicação da descrição e comunicação matemáticas.[46]

---

[44] Dummett, M. *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem* (1963). Em Dummett, M. *Truth and other enigmas*. 1978. Pg. 190

[45] Shapiro, S. *Foundations without Foundationalism: A case for second-order logic*. 1999. Pg. ix, pg. 196.

[46] Shapiro, S. *Foundations without Foundationalism: A case for second-order logic*. 1999. Pg. ix, pg. 208

Muitas vezes é sugerido que a própria idéia de pluralidade de modelos, estabelecida nas "semânticas rigorosas", seria algo completamente distinto da compreensão de um conteúdo semântico por um sujeito empiricamente dado. Teríamos assim uma forte distinção entre o conceito de "interpretação", no sentido de "modelo", e interpretação, nos sentido de "entendimento". Um desses conceitos teria pouco, ou nada, a ver com o outro:

> ...a semântica vem *depois* que a linguagem matemática original natural foi compreendida, e a compreensão não consiste em apreender um modelo, pretendido ou não.[47]

Por fim, algumas vezes, ao invés da linguagem ordinária, alguns autores invocam um conceito ainda mais vago de uma "prática matemática ordinária" que lograria fixar os modelos pretendidos. Assim, por exemplo, em um artigo sobre as conseqüências filosóficas do teorema de Löwenheim-Skolem, Paul Benacerraf escreve:

> ...a prática matemática reflete nossas intenções e controla o nosso uso da linguagem matemática por maneiras que nós podemos não estar conscientes em qualquer dado momento, mas que transcendem o que explicitamente estabelecemos em qualquer formulação dada - ou que poderíamos jamais dar[48]

Não vamos tentar uma exploração mais minuciosa dessas soluções que procuram encontrar uma espécie de "meio comunicacional" (a noção de "linguagem matemática informal", a noção de "prática matemática") que, de alguma forma, escapem às limitações dos resultados de Gödel e logrem fixar intersubjetivamente aqueles conteúdos matemáticos. Em nossa opinião, essas soluções" são fruto, mais de um desespero filosófico, do que propriamente de uma real elucidação das questões envolvidas.

[47] Shapiro, S. *Foundations without Foundationalism: A case for second-order logic*. 1999. Pg. ix, pg. 213
[48] Benacerraf, P. *Skolem and the Skeptic*. Prec. of the Arist. Society, Supplementary IX , 1985. Pg. 111

13. Dummett e a vagueza da aritmética

Talvez a alternativa mais determinada e corajosa à aceitação da idéia de conteúdos matemáticos necessariamente inexprimíveis tenha sido proposta por Michael Dummett em um artigo dedicado exatamente a discussão das conseqüências filosóficas dos teoremas de Gödel. Nesse artigo, o filósofo inglês, ao invés de procurar encontrar uma via alternativa para fixarmos intersubjetivamente as interpretações pretendidas, toma um outro caminho. Dummett propõe negar a própria existência de "conteúdos matemáticos" a serem fixados. Assim, de acordo com o filósofo inglês, longe de havermos estabelecido, com os resultados de Gödel, nossa incapacidade intrínseca de fixarmos exatamente o modelo pretendido, teríamos, isso sim, estabelecido a *vagueza inerente* daqueles conteúdos, a vagueza do próprio conceito de "verdade aritmética".

Michael Dummett escreve, em seu artigo de 1963:

> O uso de uma expressão matemática só poderia ser caracterizado por meio de um único sistema formal se o sentido daquela expressão fosse perfeitamente definido; quando, como no caso de "número natural", a expressão tem um significado inerentemente vago, será essencial para a caracterização de seu significado formular-se o princípio geral de que qualquer caracterização formal precisa possa ser sempre estendida. [49]
>
> ...a expressão "número natural" não mais parece fornecer um contra-exemplo à identificação do significado com o uso. A linguagem contém muitas expressões que exibem uma variedade de

[49] Dummett, M. *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem* (1963). Em Dummett, M. *Truth and other enigmas*. 1978. Pg. 198

> tipos de vagueza, uma sub-variedade dessas é o que chamei aqui de "vagueza inerente". [50]

Dummett está perfeitamente consciente, é claro, das dificuldades de se argumentar que a noção de "número natural" envolve alguma forma de "vagueza inerente".[51] No entanto, é exatamente esse o caminho interpretativo sobre o resultado de Gödel que nos permitiria *recusar* a idéia de conteúdos necessariamente inexprimíveis. O filósofo inglês não esconde sua intenção de evitar a interpretação tradicional a qualquer custo:

> É necessário assim ver-se a onde a interpretação dada acima da significação do teorema de Gödel é equivocada e encontra-se uma interpretação alternativa. [52]

O ponto, identificado pelo filósofo inglês, que determinaria esse caráter vago da idéia de "número natural" seria, nada mais, nada menos, do que o próprio *princípio de indução finita* usado na caracterização daquele conceito:

> A razão pela qual o conceito ordinário de "número natural" é inerentemente vago é que o traço essencial, que estaria envolvido em qualquer caracterização do conceito, é o da validade da indução com respeito a qualquer propriedade bem definida; e o conceito de propriedade bem definida por sua vez exibe uma variedade particular de vagueza inerente, a saber, a de extensibilidade ilimitada.[53]

---

[50] Dummett, M. *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem* (1963). Em Dummett, M. *Truth and other enigmas*. 1978. Pg. 198

[51] O filósofo inglês, por exemplo, escreve: « Se interpretamos o significado associado à expressão "número natural" com sendo a apreensão intuitiva de um modelo para os número naturais, parece impossível negar-se que este significado é completamente determinado.» Dummett, M. *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem* (1963). Em Dummett, M. *Truth and other enigmas*. 1978. Pg. 193

[52] Dummett, M. *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem* (1963). Em Dummett, M. *Truth and other enigmas*. 1978. Pg. 190

[53] Dummett, M. *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem* (1963). Em Dummett, M. *Truth and other enigmas*. 1978. Pg. 195

A dificuldade estaria localizada mais exatamente na *impredicatividade* do conceito de "propriedade bem definida dos números naturais":

> A noção de "número natural", mesmo quando caracterizada por um sistema formal, é impredicativa. A totalidade dos números naturais é caracterizada como aquela para a qual a indução é válida para qualquer propriedade bem definida, ao passo que, por uma "propriedade bem definida", é compreendido uma propriedade que seja bem definida relativamente à totalidade dos números naturais. [54]

[54] Dummett, M. *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem* (1963). Em Dummett, M. *Truth and other enigmas*. 1978. Pg. 199