



**Antonio Weiller Corrêa do Lago**

**Identificação não-linear aplicada a um sistema  
de posicionamento sujeito a atrito**

**Projeto de Graduação**

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de  
Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador : Helon Vicente Hultmann Ayala  
Coorientador: Lucas Castro Sousa

Rio de Janeiro  
Julho de 2022



**Antonio Weiller Corrêa do Lago**

**Nonlinear identification of a positioning system  
subject to friction**

**Graduation Project**

Graduation Project presented to the  
Mechanical Engineering Department at PUC-Rio

Advisor : Helon Vicente Hultmann Ayala  
Co-advisor: Lucas Castro Sousa

Rio de Janeiro  
July 2022

## Resumo

A modelagem de sistemas servomecânicos é um dos principais desafios na área de robôs manipuladores, devido a complexidade e não linearidade dos fenômenos envolvidos tornando sua modelagem de difícil concepção. Neste trabalho apresentamos uma bancada experimental original composta de um atuador linear e de um elo unidos por uma junta. Nesse contexto, por meio de medições experimentais, apresentamos duas abordagens de identificação para modelar o servossistema. A primeira abordagem, chamada de identificação de tipo caixa-cinza, busca otimizar os parâmetros do modelo dinâmico, focando principalmente na identificação dos parâmetros de diferentes modelos de atrito. No estudo utilizamos os modelos de Coulomb, Dahl e LuGre. O segundo método, de tipo caixa-preta, utiliza redes neurais artificiais (RNA) para estimar a posição e a velocidade angular futuras da bancada de testes. Os resultados indicam que os modelos de fricção que consideram o maior número de fenômenos tem as melhores performances e que as RNAs tem resultados melhores que o modelo caixa-cinza. Em particular, os modelos caixa-preta apresentaram uma melhora de 67% em termos de erro médio absoluto. Os resultados mostrados são importantes pois equivalentes digitais de sistemas mais acurados viabilizam simulações mais fidedignas em ambiente virtual.

## Palavras-chave

Identificação de sistemas não-lineares; Modelagem caixa-cinza; Modelagem caixa-preta; Servossistemas; Modelos de atrito; Manipuladores robóticos.

## Abstract

Modeling the dynamics of a servo mechanical system is one of the main challenges in robot manipulators, due to the the presence of complex and non-linear aspects of the phenomenons involved in it's modelling making it challenging to conceive an ideal representation. In this work we describe an original experimental bench composed of an electric actuator and a link joined by a joint. Using experimental measurements this projet has the objective of finding, through two different identification methods, a model that best represents the dynamics of the developed servosystem through experimental measurements. The first method consists in optimizing the parameters from different friction models using the grey-box type identification method. This work implements the Coulomb, Dahl and LuGre friction models. The black-box method, utilizes artificial neural networks to predict the angular position and angular speed of the experimental bench. Analising the results, we observe that the models that considers the significant number of friction phenomena perform better. The results of the second method indicate a better performance than the grey-box method, showing a 67% reduction of the MAE error metric.

## Keywords

System Identification of non-linear systems; grey-box modeling; black-box modeling; Servosystem; Friction models; Robotic manipulators.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
1.1	Revisão Bibliográfica . . . . .	14
1.2	Motivação . . . . .	15
1.3	Objetivos . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Métodos</b>	<b>17</b>
2.1	Modelagem do Manipulador Robótico . . . . .	17
2.2	Identificação de Sistemas Não-Lineares . . . . .	20
2.2.1	Identificação Caixa-cinza . . . . .	22
2.2.1.1	Modelo Dinâmico . . . . .	22
2.2.1.2	Multiple Shooting . . . . .	22
2.2.2	Identificação Caixa-preta . . . . .	23
2.3	Redes Neurais Artificiais para Identificação de Sistemas . . . . .	24
2.3.1	Algoritmo de Treinamento . . . . .	27
2.4	Métricas de Avaliação dos Modelos . . . . .	28
2.5	Modelos de Atrito . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Bancada Experimental</b>	<b>33</b>
3.1	Modelo Implementado neste Trabalho . . . . .	34
3.2	Descrição do Conjunto de Dados . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>38</b>
4.1	Identificação Caixa-cinza . . . . .	38
4.2	Identificação Caixa-preta . . . . .	42
4.2.1	Modelo de Uma Saída: Velocidade Angular . . . . .	43
4.2.2	Modelo de Duas Saídas: Posição Angular e Velocidade Angular . . . . .	46
4.3	Discussão . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>54</b>
<b>6</b>	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>55</b>

## Lista de figuras

Figura 1	Esquemático do Robô Rígido, baseado em (MAKAROV, 2013).	18
Figura 2	Esquemático do Robô Flexível, baseado em (MAKAROV, 2013).	19
Figura 3	Os Diferentes Modelos de Identificação.	20
Figura 4	Fluxograma da Metodologia.	21
Figura 5	Representação Esquemática de uma MLP.	25
Figura 6	Modelo do Neurônio, baseado em (HAYKIN; ENGEL, 2001).	26
Figura 7	Funções de ativação: (a) Sigmoide (b) Tangente Hiperbólica (c) <i>ReLU</i> .	27
Figura 8	Comportamento do Atrito segundo o Modelo de Coulomb + Atrito Viscoso + Efeito de <i>Stribeck</i> .	30
Figura 9	Comportamento das Hastes nas Superfícies, baseada em (CASANOVA, 2007).	32
Figura 10	Desenho da Montagem do Manipulador. a) Representação do Manipulador Vertical b) Visão Explodida, baseado em (LOPES; MEGGIOLARO, 2021).	33
Figura 11	Componentes da Bancada de Testes, baseado em (LOPES, 2022).	34
Figura 12	Diagrama do Sistema de Posicionamento.	35
Figura 13	Torque Experimental em Função do Tempo.	36
Figura 14	Dados Experimentais em Função do Tempo.	37
Figura 15	Histograma dos Erros dos Modelos de Atrito.	41
Figura 16	Velocidade experimental comparada com a Velocidade obtida usando o Modelo de LuGre.	41

Figura 17	Erro entre a Velocidade experimental e a Velocidade obtida usando o Modelo de LuGre. . . . .	42
Figura 18	Comparação entre os Dados Experimentais e os Dados Previstos - Arquitetura 4. . . . .	44
Figura 19	Comparação entre a Velocidade Experimental e a Velocidade obtida usando a Arquitetura 4. . . . .	45
Figura 20	Comparação entre os Dados Previstas e Experimentais da Arquitetura 4. . . . .	48
Figura 21	Comparação entre os Dados Experimentais e os Dados obtida usando a Arquitetura 4. . . . .	49
Figura 22	Comparação entre os Dados Experimentais e os Dados obtida usando a Arquitetura 4. . . . .	51
Figura 23	Comparação entre as Velocidades Experimentais e os Velocidades obtida usando os diferentes modelos. . . . .	53

## Lista de tabelas

Tabela 1	Limites de Busca. . . . .	38
Tabela 2	Parâmetros Estimados usando o Método Caixa-cinza. . . .	39
Tabela 3	Métricas de Erro dos Diferentes Modelos. . . . .	40
Tabela 4	Características das Arquitetura Estudadas - Velocidade Angular. . . . .	43
Tabela 5	Métricas de Erro de cada Arquitetura - Velocidade Angular.	43
Tabela 6	Características das Arquitetura Estudadas - Duas Saídas. .	46
Tabela 7	Métricas de Erro da Posição Angular de cada Arquitetura - Duas Saídas. . . . .	46
Tabela 8	Métricas de Erro da Velocidade Angular de cada Arquitetura - Duas Saídas. . . . .	47
Tabela 9	Métricas de Erro dos Melhores Modelos. . . . .	52

## Lista de de Símbolos

$n$	Número de graus de liberdade do manipulador robótico
$J_{red}$	Matriz de inércia do estágio de redução no corpo rígido
$J_{mot}$	Matriz de inércia do estágio de redução no corpo rígido
$M_i$	Matriz de inércia do motor no corpo rígido
$\theta_i$	Vetor de posição angular do motor
$q$	Vetor de posição angular do elo
$\dot{q}$	Vetor de velocidade do elo
$\dot{\omega}$	Vetor de aceleração do motor
$\ddot{q}$	Vetor de aceleração do elo
$M_q$	Matriz de inércia dos elos e dos motores
$C(q, \dot{q})$	Vetor das componentes de Coriolis e Centrífuga
$\tau_G$	Vetor de torque gravitacional
$\tau_{atrito}$	Vetor de torque de atrito
$\tau_{ext}$	Vetor de torque de atrito
$\tau_{motor}$	Vetor de torque do motor
$K_i$	Rigidez da junta
$\tau_{fa}$	Vetor de torque de atrito das juntas
$\tau_{fm}$	Vetor de torque de atrito dos motores
$J_m$	Matriz de inerciais dos rotores em torno do eixo de rotação
$K$	Matriz diagonal de rigidez das juntas
$\dot{\omega}$	Aceleração angular na junta
$\omega$	Velocidade angular na junta
$\theta$	Posição angular na junta
$J$	Soma dos momentos de inércia
$J_{sm}$	Momento de inércia do servomotor

$J_c$	Momento de inércia da carga
$\Theta$	Conjunto de parâmetros
$u_h$	Entradas do modelo
$\hat{y}_h$	Saídas previstas do modelo no instante k
$x_h$	Estados do modelo no instante k
$f$	Função não linear
$g$	Função não linear
$F$	Função não linear NARX
$n_u$	Ordem da defasagem de entrada
$n_y$	Ordem da defasagem de entrada
$w_k$	Pesos sinápticos
$x_k$	Sinais de entrada
$b_k$	Bias Externo
$y_k$	Saída do neurônio
$\varphi$	Função de ativação
$\mathcal{L}$	Função de perda
$y_j$	Resultados experimentais
$\hat{y}_j$	Resultados simulados
$RMSE$	Raiz do Erro Quadrático Médio
$MSE$	Erro Quadrático Médio
$MAE$	Erro Quadrático Absoluto
$R^2$	Coefficiente de determinação
$v$	Velocidade relativa
$f_v$	Coefficiente de atrito viscoso
$F_n$	Força normal
$\mu_s$	Coefficiente estático de atrito
$\mu_d$	Coefficiente dinâmico de atrito
$f_s$	Coefficiente de atrito estático
$f_d$	Coefficiente de atrito dinâmico

$f_v$	Coeficiente de atrito viscoso
$f_c$	Coeficiente de Coulomb
$v_s$	Velocidade de <i>Stribeck</i>
$\sigma_0$	Coeficiente de Rigidez
$\sigma_1$	Coeficiente de Amortecimento
$\sigma_2$	Coeficiente de Atrito Viscoso
$\delta$	Offset
$z$	Variável de estado da deflexão medias das hastes

## Lista de Abreviaturas

FR – *Free Run*

LuGre – Lund e Grenoble

MAE – *Mean Absolute Error*

MLP – *Multi Layered Perceptron*

MSE – *Mean Square Error*

OSA – *One Step Ahead*

ReLU – *Rectified Linear Unit*

RMSE – *Root Mean Square Error*

RNA – Rede Neural Artificial

SSM – *Deep State Space Models*

Tanh – Tangente Hiperbólica

VAE – *Variational AutoEncoder*

NARX – *Nonlinear Auto-Regressive with eXogenous Inputs*

EDO – Equações Diferenciais Ordinárias

# 1

## Introdução

Com os avanços tecnológicos dos últimos anos, servossistemas de alta-precisão com juntas rígidas e flexíveis têm sido extensivamente utilizados em múltiplas áreas, em especial na área da robótica. No entanto, importantes características que afetam a precisão de sistemas de controle, como flexibilidade das juntas, atrito e incertezas de modelagem (WANG; NA, 2020) ainda requerem atenção de pesquisadores. Dentre estes fatores, o atrito se destaca pois pode ocasionar danos e afetar diretamente a performance do sistema. O atrito é um fenômeno não-linear complexo que está presente em sistemas dinâmicos com movimento relativo entre seus componentes (WORDEN et al., 2007). Basicamente, o atrito ou fricção possui características delimitadas por dois regimes de trabalho, o regime de pré-deslizamento e o regime de deslizamento (CASANOVA, 2007). No pré-deslizamento, a fricção é caracterizada pela deformação elasto-plástica das asperezas devido ao deslocamento entre as superfícies. No regime de deslizamento, a força depende principalmente da velocidade, devido à resistência das asperezas (WORDEN et al., 2007). Sua complexidade e não linearidade é atribuída à quantidade de dependências que a influenciam a força: condições e parâmetros físicos (PENNESTRÍ et al., 2015).

Estudos detalhados sobre diferentes características e modelos de fricção podem ser identificados na literatura (ARMSTRONG-HÉLOUVRY; DUPONT; WIT, 1994); (OLSSON et al., 1998). Dahl (1968) propôs um modelo baseado no proposto por Coulomb (1809) adicionando o comportamento que ocorre microscopicamente entre as superfícies no regime de pré-deslizamento, este modelo foi em seguida estudado por Haessing e Friedland (1991), chamado de Bristle Model. O modelo de LuGre (WIT et al., 1995) propõe uma extensão do trabalho feito por Dahl (1968), incluindo os efeitos de *Stribeck*, histerese, *Stick-Slip*, ciclos-limites, e o aumento de atrito estático (WANG; NA, 2020).

Segundo Olsson *et al.* (1998), o estudo de atrito tem tido um ressurgimento importante nos últimos anos devido aos avanços tecnológicos permitindo o uso de novas ferramentas de medida. A área de identificação de sistemas foca no uso de dados medidos em função do tempo para modelar a dinâmica de um sistema, modelos de atrito são utilizados com o objetivo de implementar um controle baseado em modelos (WANG; LIN; WANG, 2016).

Os métodos de identificação de sistemas dinâmicos são diferenciados pela quantidade de conhecimento referente à física do problema: modelos de caixa-branca, caixa-cinza e caixa-preta (QUARANTA; LACARBONARA;

MASRI, 2020). O método de caixa-branca define a estrutura do modelo e seus parâmetros a partir de conhecimentos da física do problema. O método de caixa-cinza usa conhecimentos físicos e dados experimentais para determinar parâmetros desconhecidos (SJÖBERG et al., 1995). Por fim, a modelagem caixa-preta considera que não há nenhum conhecimento físico anterior e há dados suficientes sobre o sistema para poder caracterizá-lo.

## 1.1

### Revisão Bibliográfica

Em (QUARANTA; LACARBONARA; MASRI, 2020), os autores apresentam os diferentes métodos de identificação de sistema não lineares, isso inclui modelos caixa-branca, caixa-cinza e caixa-preta. A terminologia é definida pela quantidade de informações iniciais sobre o sistema a ser identificado. Em seguida os autores focam nos diferentes modelos utilizados na identificação paramétrica (caixa-cinza), modelos que possuem equações e parâmetros. A identificação não paramétrica (caixa-preta) é relacionada a resposta de frequência, isso inclui redes neurais artificiais.

Um estudo do tipo caixa-preta utilizando redes neurais artificiais é realizado em (MASTI; BEMPORAD, 2021), usando uma técnica de aprendizado não supervisionado chamado de *Autoencoders*. Estes têm por objetivo compactar os dados de entradas, usando um codificador e um decodificador. O codificador reduz a ordem dos dados de entrada, criando uma representação de espaço latente, e em seguida, o decodificador reconstrói os dados de entrada a partir da representação do espaço latente. Os autores ainda apresentam uma metodologia composta de dois *Partial Predictive Autoencoders* e uma rede neural artificial que prevê o estado no passo seguinte.

Uma metodologia de identificação de espaço de estado para estimar um sistema de alta dimensão é apresentada em (BEINTEMA; TOTH; SCHOUKENS, 2021). O modelo é constituído por três redes neurais de tipo alimentadas adiante composto de um codificador que simula o estado inicial, que é usado como entrada de uma rede neural que estima o próximo estado. O decodificador obtém uma matriz com a posição da bola usando o estado.

Diferentes usos de redes neurais vêm sendo desenvolvidos a partir do conhecimento de determinadas características do sistema, o que torna possível a utilização de diferentes abordagens para cada problema. Forgione *et al.* (2021) estudam diferentes arquiteturas de identificação para sistemas completamente observáveis, baseados na física e usando modelos conhecidos. Estes métodos foram testados para diferentes problemas mostrando que o uso de este tipo de abordagem tem grandes vantagens e pode reduzir consideravelmente os erros

dos modelos estimados.

Uma das grandes revoluções na área de inteligência artificial foi a descoberta de aprendizagem profunda em múltiplas áreas. Sua aplicação na área de identificação é apresentada em (GEDON et al., 2021) onde os autores apresentam o uso de SSMs (Deep state space models) com o objetivo de resolver problemas de tipo caixa-preta. Para obter um deep SSM temos que combinar um RNA (Redes Neurais Artificiais) e VAE (Variational AutoEncoder). Ao contrário de redes neurais artificiais, as RNA levam em consideração as entradas anteriores para obter resultados. Há vários tipos de modelos que são apresentados neste estudo e em seguida aplicados a três diferentes sistemas não lineares mostrando, além de obter resultados similares as outras metodologias além de estimar a incerteza do sistema dinâmico.

Uma consideração essencial em todos os projetos que envolvem movimentos relativos em máquinas é a influência da fricção. Armstron-Hélouvry *et al.* (1994) apresentam os diferentes regimes dinâmicos em função da velocidade, com seus modelos e suas dependências, os diferentes modelos adaptados aos diferentes tipos e comportamentos da fricção. E por fim, o artigo aborda simulações de modelos de fricção e estruturas de controle distintos em diferentes problemas.

Um dos modelos de fricção mais utilizados é o modelo de LuGre, que é analisado e modificado por Simoni *et al.* (2020) combinando este modelo com o de Dieterich-Ruina (1983) para considerar o tempo de espera (*dwell time*). Superpondo os dois modelos obtemos um modelo mais completo que consegue adicionar elementos ao modelo de LuGre incluindo o tempo de espera (*dwell time*), adaptando para que o modelo final seja coerente. Em seguida, múltiplas simulações e experimentos são realizadas para testar a acurácia do novo modelo em diferentes movimentos. A conclusão encontrada pelos autores é satisfatória e mostra que o modelo proposto é mais preciso que os modelos iniciais.

## 1.2

### Motivação

A representação de sistemas dinâmicos por meio de modelos matemáticos se baseia no conhecimento físico do sistema, sendo amplamente utilizada no meio acadêmico e profissional. No entanto, a abordagem puramente física tende a apresentar dificuldades para representar sistemas com maior grau de complexidade (QUARANTA; LACARBONARA; MASRI, 2020). Assim, graças aos avanços na inteligência computacional, modelos baseados em dados experimentais têm sido empregados para modelagem e identificação de sistemas e propriedades dinâmicas.

Neste projeto, estudaremos um sistema de posicionamento, através de uma bancada experimental, em busca de identificar modelos de fricção. Na ausência de um modelo que represente o sistema dinâmico atuante na bancada experimental, faz-se necessária a utilização de técnicas de identificação de sistemas não lineares para a obtenção de uma modelagem adequada para o sistema. Mais especificamente, temos o objetivo de obter um modelo que possa estimar a dinâmica de nosso sistema de posicionamento.

Este trabalho visa apresentar a identificação da dinâmica de um sistema servomecânico e do comportamento do atrito a partir de dados experimentais obtidos em uma bancada de testes original. Inicialmente um estudo dos diferentes métodos de identificação de sistemas não lineares é realizado. Em seguida, uma análise de diferentes modelos de atrito para encontrar o modelo que melhor represente a fricção de uma junta flexível. Assim, a identificação dos parâmetros de cada modelo será feita usando o método de identificação de tipo caixa-cinza usando o método de representação de tipo *Shooting*. Finalmente, através do uso de RNAs, uma identificação de tipo caixa-preta é conduzida buscando a criar um modelo capaz de estimar a partir de dados de entradas anteriores as posições e velocidades futuras.

### 1.3

#### Objetivos

Este trabalho tem por objetivo modelar a dinâmica de um sistema de posicionamento não linear a partir de dados experimentais obtidos através de uma bancada experimental da PUC-RIO. Através dos dados obtidos experimentalmente, busca-se caracterizar a dinâmica deste servossistema usando diferentes métodos de identificação. Por meio de modelos distintos de atrito buscaremos identificar os diferentes parâmetros adaptados ao nosso sistema e avaliar qual modelo melhor caracteriza a dinâmica do manipulador. Em seguida usando RNAs buscamos criar um modelo de tipo caixa-preta que possa modelar a bancada experimental.

## 2

### Métodos

Com a finalidade de fortalecer a compreensão do funcionamento da identificação de sistemas não lineares as diferentes metodologias utilizadas são apresentadas. Em um primeiro momento, através de um levantamento da literatura, são estudados a modelagem de robôs manipuladores e as diferentes características que estes podem apresentar, com isso obtém-se o equacionamento do modelo de dinâmica geral de robôs com juntas rígidas e flexíveis. Em seguida, as múltiplas etapas do método de identificação de sistemas não-lineares são apresentados.

O primeiro método apresentado é a identificação de tipo caixa-cinza, um meio termo entre a abordagem puramente física e a abordagem experimental, a fim de facilitar a otimização, o funcionamento da identificação de parâmetros é definido.

Buscando identificar o modelo através do método caixa-preta, apresentamos o funcionamento das RNAs, isso inclui a sua composição, o funcionamento e o equacionamento destas. Com o objetivo de avaliar a performance de cada modelos, as métricas de erro são definidas. Por último, diferentes modelos de atritos, encontrados na literatura, são estudados e definidos, a fim de utiliza-los no método de identificação caixa-cinza.

#### 2.1

#### Modelagem do Manipulador Robótico

Segundo Canudas de Wit *et al.* (1996), a estrutura mecânica de um robô manipulador pode ser definida como sendo uma sequência de elos conectados através de juntas. Estas podem ter múltiplas características, mas frequentemente elas são divididas em duas categorias: juntas rígidas e juntas flexíveis.

Nesta parte focamos na dinâmica de um manipulador robótico rígido com  $n$  graus de liberdade e  $n$  juntas rígidas, representado na Figura 1.

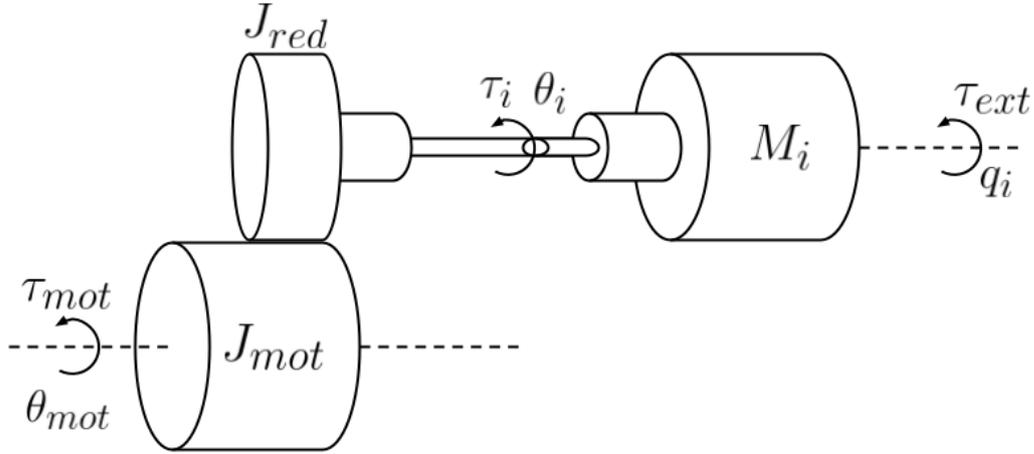


Figura 1: Esquemático do Robô Rígido, baseado em (MAKAROV, 2013).

onde  $J_{red}$ ,  $J_{mot}$  e  $M_i$  são respectivamente a matriz de inércia do estágio de redução, a matriz da inércia do motor e a matriz de inércia da carga do corpo rígido;  $\theta_i \in \mathbb{R}^n$  as posições angulares dos motores,  $\tau \in \mathbb{R}^n$  os torques dos motores e  $q_i \in \mathbb{R}^n$  as posições angulares dos elos.

A dinâmica de manipuladores tem sido extensivamente estudada e seu desenvolvimento matemático detalhado por diversos autores (ASADA; SLO-TINE, 1986);(BURTON, 1994);(WIT; SICILIANO; BASTIN, 1996);(LEWIS; ABDALLAH; DAWSON, 1993);(SCIAVICCO; SICILIANO, 1996);(SPONG; VIDYASAGAR, 1989). Segundo Makarov (2013), considerando transmissão ideal e juntas rígidas, a posição angular dos motores e dos elos são iguais:  $\theta_i = q_i$ . Com isso obtém-se através das equações de Lagrange, o modelo dinâmico inverso dado por:

$$M_q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + \tau_G(q) + \tau_{atrito}(\dot{q}) = \tau_{motor} + \tau_{ext} \quad (1)$$

onde  $\tau_G$ ,  $\tau_{atrito}$ ,  $\tau_{ext}$ ,  $\tau_{motor}$  são respectivamente os vetores de torque gravitacional, torque de atrito, torque externo e torque do motor;  $M_q(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de inércia dos elos e dos motores;  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor das forças centrífuga e de Coriolis.

A presença da flexibilidade em juntas é inerente a qualquer robô manipulador estas deflexões pode se transformar em um problema quando desconsiderada. Ao considerar as deflexões em juntas um novo modelo deve ser considerado, logo as suposições do modelo rígido não se aplicam.

A Figura 2 apresenta um diagrama de uma articulação flexível, a partir de qual pode-se desenvolver um modelo que defina um manipulador com juntas flexíveis.

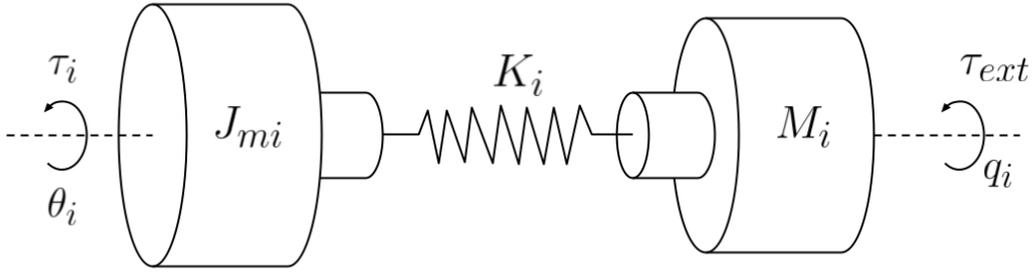


Figura 2: Esquemático do Robô Flexível, baseado em (MAKAROV, 2013).

onde  $J_{mi}$  e  $M_i$  são respectivamente a matriz de inércia do motor e a matriz de inércia da carga do corpo rígido;  $\theta_i \in \mathbb{R}^n$  as posições angulares dos motores,  $\tau \in \mathbb{R}^n$  os torques dos motores;  $q_i \in \mathbb{R}^n$  as posições angulares dos elos e  $K_i$  a rigidez da mola.

Para desenvolver um modelo dinâmico geral Canudas De Wit *et al.* (1996) apresentam três hipóteses que devem ser consideradas:

1. As deformações nas juntas são consideradas pequenas, para que os efeitos da flexibilidade se mantenham no domínio da elasticidade linear;
2. A elasticidade das juntas são modeladas como elementos elásticos com rigidez;
3. A energia cinemática do rotor é devida unicamente a própria rotação;
4. Os rotores dos atuadores são modelados como corpos uniformes com centro de massa no eixo de rotação.

Spong (1987), apresenta uma simplificação do modelo de dinâmica geral (LUCA; BOOK, 1998) de um robô com juntas flexíveis com  $n$  graus de liberdade:

$$M_q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \tau_G(q) + \tau_{fa} + K(q - \theta_i) = \tau_{ext} \quad (2)$$

$$J_m(q)\ddot{\theta} + \tau_{fm} - K(q - \theta_i) = \tau_{motor} \quad (3)$$

onde  $\tau_G$ ,  $\tau_{fa}$ ,  $\tau_{fm}$ ,  $\tau_{ext}$ ,  $\tau_{motor}$  são respectivamente os vetores de torque gravitacional, torque de atrito nas juntas, torque de atrito dos motores, torque externo e torque do motor;  $M_q(q)$  é a matriz da inércia dos elos e dos motores;  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor das forças centrífuga e de Coriolis;  $J_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz diagonal constante dos componentes inerciais dos rotores em torno do eixo de

rotação;  $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$  é a matriz diagonal de rigidez das juntas. Em (2), (3) o modelo dinâmico dos elos e o modelo dinâmico dos motores são apresentados, as duas equações estão acopladas através da componente elástica  $K$ .

## 2.2 Identificação de Sistemas Não-Lineares

Segundo Ljung (2010) a área de trabalho de *Identificação de Sistemas Não-Lineares* trabalha com a construção de modelos matemáticos para representar sistemas dinâmicos. Esta área abrange múltiplos temas e múltiplas técnicas diferentes dependendo do sistema a ser analisado. Neste trabalho focamos principalmente na modelagem de dinâmicas do tipo não linear. Assim, a metodologia para a obtenção de tal identificação é dívida em três tipos (Figura 3).

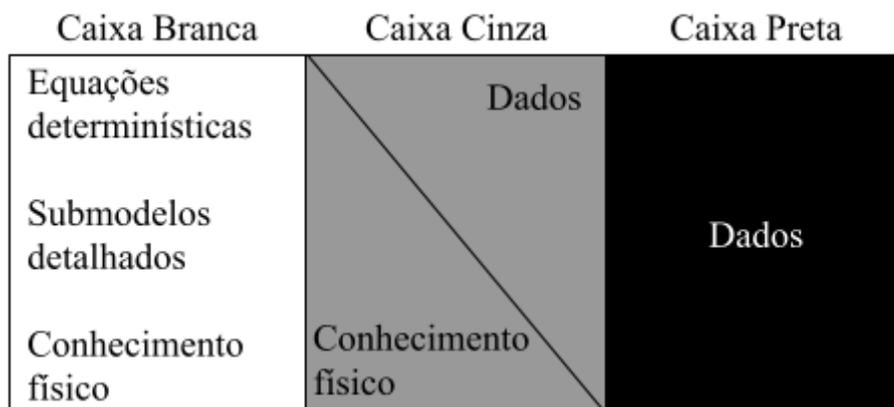


Figura 3: Os Diferentes Modelos de Identificação.

A modelagem do tipo caixa-branca define a estrutura do modelo e seus parâmetros a partir de conhecimentos da física do problema. Este método é o mais utilizado na área de mecânica, considerando certas aproximações, abrangendo as análises de dinâmica e eletromecânica. O problema desta abordagem são suas limitações, Quaranta *et al.* (2020) observam que com a necessidade de comprometer a complexidade, a eficiência e a confiabilidade em estudos e a dificuldade de encontrar modelos somente baseados na física a modelagem do tipo caixa-cinza e caixa-preta vem sendo de mais em mais utilizados na ciência.

O método de caixa-cinza usa conhecimentos físicos e dados experimentais para determinar parâmetros desconhecidos (SJÖBERG *et al.*, 1995). Por fim,

a modelagem caixa-preta considera que não há nenhum conhecimento físico anterior e há dados suficientes sobre o sistema para poder caracterizá-lo.

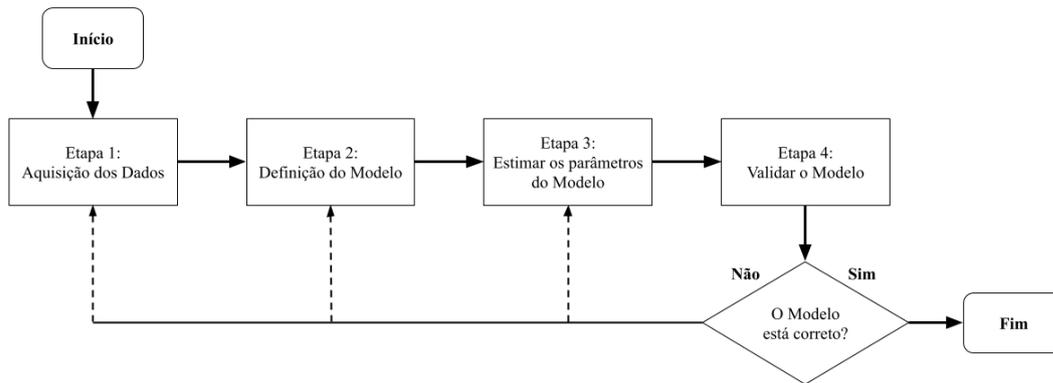


Figura 4: Fluxograma da Metodologia.

A metodologia de identificação de sistemas do tipo caixa-cinza e caixa-preta pode ser dividida nas seguintes etapas (Figura 4). **Etapa 1: Aquisição dos dados**, o objetivo é obter dados sobre o sistema que queremos modelar, no nosso caso usando a bancada do sistema de posicionamento. Esta deve ser bem-feita logo ela afetará a acurácia de nosso modelo. Neste projeto usaremos uma bancada experimental de um sistema não linear de posicionamento, onde temos como entrada o Torque e como saída a posição e a velocidade angular.

Em seguida, a **Etapa 2: Definição do modelo**, é uma etapa onde devemos tomar decisões coerentes sobre nosso sistema, se ele é linear ou não-linear. Apesar de modelos lineares serem mais fáceis de modelar e interpretar, nem sempre são os mais adequados para representar problemas mais complexos. Neste trabalho conhecemos parcialmente a dinâmica de nosso sistema, logo queremos estudar a modelagem do comportamento da fricção e sua influência.

A **Etapa 3: Estimar os parâmetros do modelo**, é um processo de otimização que visa verificar a aderência do modelo aos dados medidos do nosso sistema. Comparando os resultados estimados e medidos podemos ajustar nosso modelo de identificação para obter melhores resultados. Através do uso de diferentes modelos de atrito, queremos estimar o valor destes parâmetros através de diferentes algoritmos: Algoritmos genéticos, PSO e redes neurais.

Por último, a **Etapa 4: Validar o modelo**, consiste em confirmar que o modelo de identificação é apropriado ao nosso sistema. Após nosso estudo, temos que avaliar se nosso modelo está adequado com os dados obtidos experimentalmente. Usando diferentes mediadas para estimar esse erro, lembrando que nosso objetivo é reduzi-lo. Se este não está conforme, devemos

voltar a qualquer uma etapa anterior, e verificar se tudo está conforme ou modificar nosso modelo para melhorar nossos resultados.

### 2.2.1

#### Identificação Caixa-cinza

A metodologia de tipo caixa-cinza consiste em construir um modelo matemático baseado em conhecimentos físicos onde seus parâmetros são identificados através de dados (QUARANTA; LACARBONARA; MASRI, 2020). Múltiplos algoritmos diferentes foram propostos para resolver este tipo de problemas incluindo algoritmos genéticos, otimização por enxame de partículas.

#### 2.2.1.1

##### Modelo Dinâmico

Para facilitar a estrutura do modelo usado para representar o fenômeno não linear do sistema utiliza-se a representação de espaço não linear para sistemas discretos:

$$\begin{cases} x_{h+1} = f(x_h, u_h, \Theta) \\ \hat{y}_h = g(x_h, u_h, \Theta) \end{cases} \quad (4)$$

onde  $\Theta$  é o conjunto de parâmetros,  $u_h$ ,  $\hat{y}_h$  e  $x_h$  são respectivamente as entradas, as saídas e os estados do modelo no instante  $h$ . Funções não lineares são definidas por  $f$  e  $g$ . Neste trabalho, temos como estados a posição angular ( $\theta$ ) e a velocidade angular ( $\omega$ ).

#### 2.2.1.2

##### Multiple Shooting

O objetivo deste é minimizar a soma do erro quadrático entre os dados experimentais e os dados simulados. No método de *single shooting*, dado um conjunto de dados de entrada e saída, um vetor de condições iniciais e um vetor de parâmetros  $\Theta$  é efetuado a simulação pelo método OSA no inteiro conjunto de dados gerando um vetor de erro quadrático (Equação 5). Em seguida o “chute”, descrito anteriormente, é efetuado variando o vetor de parâmetros visando a minimizar o erro quadrático entre os resultados experimentais e simulados até atingir um erro aceitável (RIBEIRO; AGUIRRE, 2017).

$$\arg \min_{\Theta} \sum_{k=1}^n \|y_k - \hat{y}_k^{(k-1)}(\varphi_1, u_{1\dots k}, \Theta)\|^2 \quad (5)$$

Segundo Retzler *et al.* (2022), algumas recomendações importantes são feitas para facilitar e melhorar os resultados da resolução, a escolha de limites

de *shooting* dos parâmetros e o uso de estados iniciais iguais aos dados do conjunto de dados.

O método de *multiple shooting* é similar, mas ao em vez de usar o conjunto de dados inteiro o conjunto é dividido em subconjuntos. Através deste procedimento as previsões do modelo (4) são codificadas em variáveis de decisão aumentando o número de variáveis de decisão. Cada subconjunto tem seus valores iniciais mas tem o mesmo vetor de parâmetros  $\Theta$ , a única diferença é que cada intervalo tem sua própria função de custo mas bem condicionada acelerando a convergência da otimização.

Estes métodos podem ser aplicados a diversos tipos de problemas. Neste estudo trabalha-se com Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), problemas de valor inicial antes de aplicar o método de *multiple shooting* a integração deve ser feita usando, neste trabalho o método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem.

### 2.2.2

#### Identificação Caixa-preta

A identificação não paramétrica é um problema de caixa-preta. Problemas de identificação caixa-preta buscam a encontrar um modelo matemático que possa caracterizar a dinâmica de um sistema não linear com a menor diferença entre os valores experimentais e o modelo proposto. Esta metodologia depende somente de dados, com isso a aquisição dos dados é primordial para que um modelo possa descrever corretamente o modelo.

Uma das principais ferramentas utilizadas para este tipo de problema são as RNAs, um modelo matemático inspirado na estrutura do cérebro humano. Haykin *et al.* (2001) apresentam as múltiplas vantagens que permitem a resolução de problemas complexos, dentre elas, sua capacidade de adaptabilidade a diferentes problemas, sua simplicidade conceitual e de treino, sua não linearidade e excelente propriedade de aproximação. A principal desvantagem das RNAs é sua incapacidade de definir e analisar a dinâmica dos sistemas, por não propor um modelo matemático que o descreva.

A fim de facilitar a modelagem de sistemas não lineares de tempo discreto, foi desenvolvido o modelo NARX (*Nonlinear Auto-Regressive with eXogenous Inputs*), o qual utiliza valores prévios de entrada-saída do sistema para estimar os valores de saída futuros  $y_k$ , este é dado por (6):

$$y(k) = F [y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k), u(k-1), \dots, u(k-n_u)] + \xi(k) \quad (6)$$

sendo  $y(k)$  a saída do modelo,  $u(k)$  a entrada com  $n_y$  e  $n_u$  sendo os maiores atrasos na saída e na entrada,  $\xi(k)$  o ruído do sistema. A função não-linear de mapeamento das entradas do modelo as saídas previstas, representado por



nios, constituída de uma camada de entrada,  $n$  camadas ocultas e uma camada de saída, como representado na Figura 5.

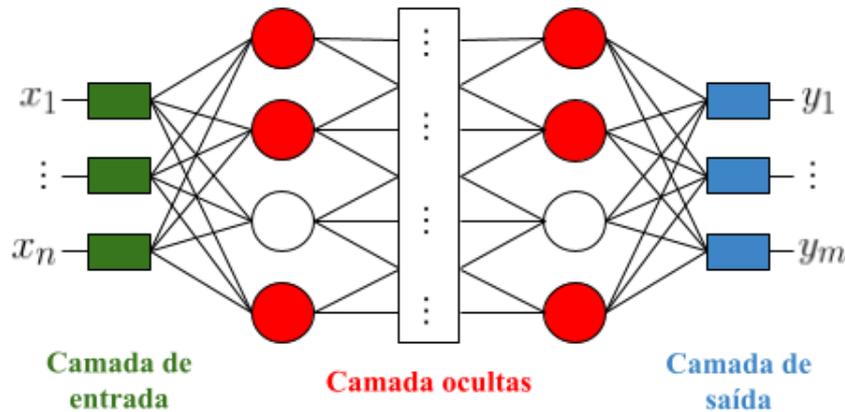


Figura 5: Representação Esquemática de uma MLP.

A camada de entrada fornece os dados iniciais, as  $n$  camadas intermediárias, chamadas de camadas ocultas não lineares, que processam os dados e extraem estatísticas de ordem elevada, as saídas da camada oculta são utilizados na camada seguinte, e assim em diante. Assim, a camada de saída fornece a resposta da RNA aos dados fornecidos na camada de entrada. O modelo matemático da MLP é dado por:

$$\hat{p} = \varphi \left[ \sum w_{ok} \varphi \left[ \sum w_{kj} \varphi \left[ \dots \varphi \left[ \sum w_{li} x_i \right] \right] \right] \right] \quad (9)$$

onde  $w_i$  são os pesos sinápticos e  $\varphi$  as funções de ativação.

As camadas ocultas apresentadas acima são compostas de neurônios, unidades de processamento, que recebem um conjunto de entradas através das sinapses e produzem saídas através do somador e de uma função de ativação. A Figura 6 apresenta a composição e o funcionamento de um neurônio.

Este é composto por três elementos essenciais. O primeiro é um conjunto de sinapses, cada um tem um peso próprio, estes pesos representados por  $w_k$  são definidos durante o treinamento de modo que minimize o erro de saída. O segundo elemento é o somador que soma os sinais de entrada ( $x_k$ ) que foram multiplicados aos pesos  $w_k$  e adiciona um bias externo ( $b_k$ ) para controlar a rede. Por fim, a função de ativação ou função restritiva regula a saída do neurônio dependendo do tipo de problema (HAYKIN; ENGEL, 2001).

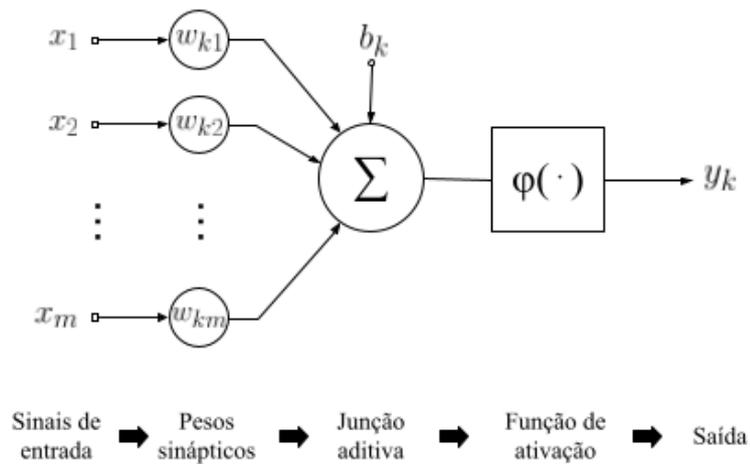


Figura 6: Modelo do Neurônio, baseado em (HAYKIN; ENGEL, 2001).

A Equação (10) descreve a junção aditiva e a Equação (11) representa a saída, descrevendo matematicamente o neurônio  $k$ .

$$u_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j \quad (10)$$

$$y_k = \varphi(u_k + b_k) \quad (11)$$

onde  $w_{kj}$  são os pesos das sinapses,  $x_k$  os sinais de entrada,  $y_k$  a saída. A função de ativação ( $\varphi$ ) regula as mudanças nos pesos e bias para que não causem alterações importantes as saídas, e decide se os neurônios devem ser ativados ou não, ou seja, se a informação recebida é relevante ou deve ser ignorada. Outra função deste elemento é fazer a transformação não-linear nos dados de entrada permitindo caracterizar e aprender tarefas complexas e não-linear.

Existem diversos tipos de funções de ativação para diferentes problemas, por exemplo, para problemas de classificação é recomendado usar uma função de ativação binária. A Figura 7, apresenta graficamente as funções de ativação definidas nas Equações (12),(13) e (14):

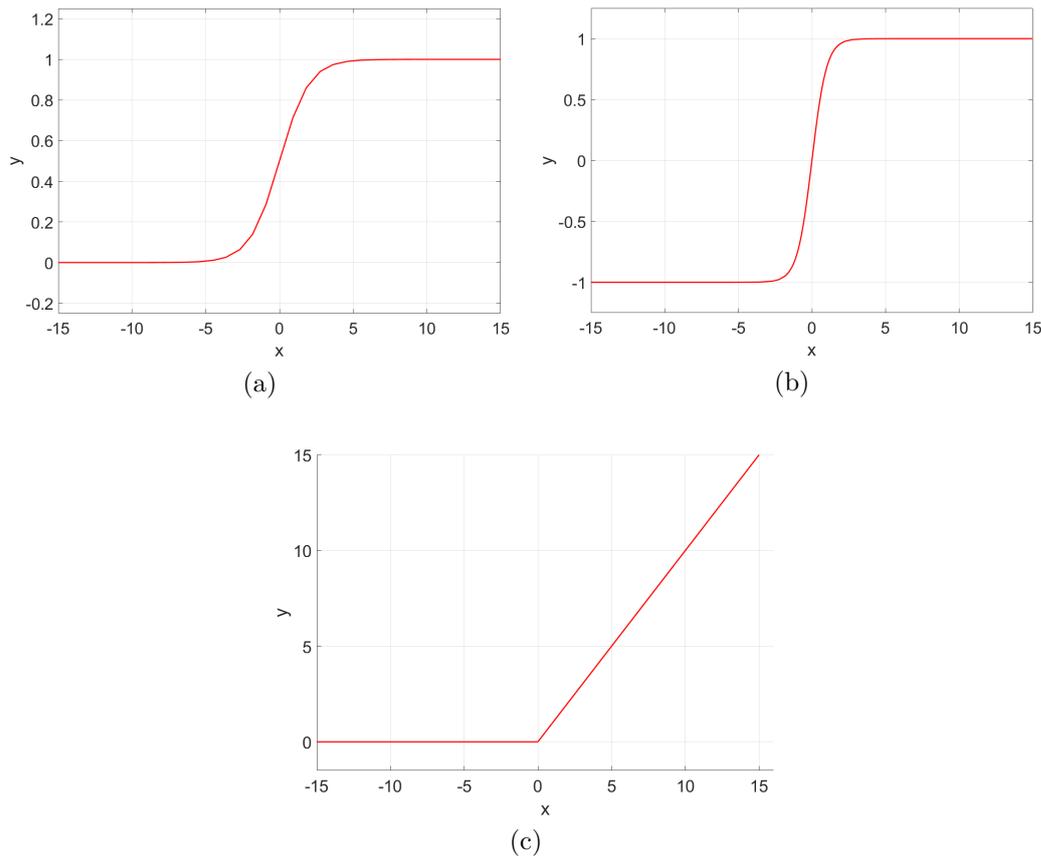


Figura 7: Funções de ativação: (a) Sigmoide (b) Tangente Hiperbólica (c) *ReLU*.

• Sigmoide:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (12)$$

• Tangente Hiperbólica:

$$\varphi(x) = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (13)$$

• Ativação linear retificada (*Rectified Linear Unit - ReLU*):

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

### 2.3.1

#### Algoritmo de Treinamento

Após definir o layout da rede neural pode-se começar o processo de modelagem do problema, feito através do uso de dados experimentais. Segundo Quaranta *et al.* (2020) na área de identificação de sistemas não lineares o método de treino supervisionado é recomendado. Este compara os resultados

de saída da rede neural com os dados experimentais, e a cada iteração modifica os valores dos pesos das sinapses e dos bias afim de reduzir a função de perda (Equação 15). Em problemas de regressão a função de perda comumente utilizada é a função de perda quadrática, dada pela Equação 15. Finalmente quando o critério de erro é atingido a RNA é testada usando dados de testes para validar o modelo proposto.

$$\mathcal{L}(\hat{y}_j, y_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|\hat{y}_j - y_j\|^2 \quad (15)$$

## 2.4

### Métricas de Avaliação dos Modelos

Diferentes métricas são utilizadas para analisar as diferenças entre os modelos de atrito e os dados experimentais. As Equações abaixo apresentam os diferentes erros calculados, comparando os resultados experimentais  $y_j$ , os resultados simulados  $\hat{y}_j$  e a média dos resultados experimentais  $\bar{y}_j$ . A Equação 16 apresenta a fórmula do Raiz do Erro Quadrático Médio também chamado de RMSE.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2} \quad (16)$$

A Equação 17 apresenta o Erro Quadrático Médio (MSE):

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2 \quad (17)$$

A Equação 18 apresenta o Erro Médio Absoluto (MAE):

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |y_j - \hat{y}_j| \quad (18)$$

A Equação 19 define o coeficiente de determinação, também chamado de  $R^2$ :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2}{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y}_j)^2} \quad (19)$$

## 2.5

### Modelos de Atrito

O atrito é um fenômeno não-linear complexo que está presente em qualquer sistema mecânico (WANG; NA, 2020). Este é uma força que se opõe ao movimento relativos de duas superfícies em contato. Sua complexidade é devida a quantidade de fenômenos físicos que causam fricção, incluindo

deformação elásto-plástica, mecânica dos fluidos, estudo de ondas e ciências dos materiais (WIT et al., 1995).

A presença do atrito é inevitável se apresentando em sistemas como robôs, sistemas servo mecânicos, pneumáticos, sistemas hidráulicos. Sendo extremamente não linear, ele pode causar erros de medida, limitar ciclos de vida, e deteriorar a performance do sistema (WIT et al., 1995). Consequentemente é necessário estudar os efeitos causados pelo atrito e encontrar soluções para compensá-lo.

Os modelos de fricção são divididos em dois tipos: modelos de atrito estáticos e modelos de atrito dinâmicos. O modelo estático analisa a relação entre a força de atrito e a velocidade relativa consistindo em múltiplas partes incluindo o atrito estático, atrito de Coulomb, atrito viscoso e o efeito de Stribeck (WANG; LIN; WANG, 2016). O modelo dinâmico considera a relação da fricção com a velocidade e o deslocamento, permitindo uma modelagem mais precisa do fenômeno. Neste trabalho serão estudados quatro diferentes modelos de atrito: Linear, Coulomb, Dahl (DAHL, 1968), *LuGre* (WIT et al., 1995).

O modelo linear é a representação mais simples do atrito e considera somente o atrito viscoso. Este método não considera os múltiplos fenômenos que influenciam a fricção. Assim, podemos considerar a força de atrito linearmente proporcional à velocidade relativa dada na Equação 20, onde  $v$  é a velocidade relativa entre as duas superfícies,  $f_v$  o coeficiente de atrito viscoso, e a força de atrito por  $\tau_{atrito}$ .

$$\tau_{atrito} = f_v v \quad (20)$$

O modelo de Coulomb, publicado em 1809, é considerado um dos primeiros modelos de atrito. Pressupondo que existe uma força que se opõe ao movimento relativo entre duas superfícies. Sua análise é limitada, considerando que o atrito depende somente da rugosidade das superfícies e não da velocidade e da área de contato. Este modelo considera dois tipos de atritos, o atrito seco quando a velocidade é nula, definido pelo coeficiente estático de atrito  $\mu_s$ . Quando as superfícies estão em movimento entre eles, consideramos outro coeficiente  $\mu_d$  representando as características dinâmicas do atrito. A Equação 21, apresenta o modelo de Coulomb:

$$\tau_{atrito} = \begin{cases} \leq \mu_s F_n & v = 0 \\ -\mu_d F_n \operatorname{sgn}(v) & v \neq 0 \end{cases} \quad (21)$$

onde  $v$  é a velocidade relativa e  $F_n$  a força normal. Para facilitar o uso do modelo, omitimos a força normal  $F_n$  substituído por  $f_s = \mu_s F_n$  e  $f_d = \mu_d F_n$ . Outra simplificação que pode ser efetuada e desconsiderar a força de atrito seco, obtendo a Equação 22:

$$\tau_{atrito} = -f_d \operatorname{sgn}(v) \quad (22)$$

Este modelo pode ser complementado adicionando a influência do atrito viscoso para considerar a influência da velocidade. Com este objetivo adiciona-se o coeficiente de atrito viscoso  $f_v$  (Equação 23):

$$\tau_{atrito} = -f_d \operatorname{sgn}(v) - f_v v \quad (23)$$

Outra complementação que pode ser feita ao modelo clássico de Coulomb é o efeito de *Stribeck*. Este efeito considera que no início do regime de deslizamento, em baixas velocidades, ocorre uma redução do atrito com o aumento da velocidade, representado na Figura 8 (CASANOVA, 2007). Este fenômeno é caracterizado na Equação 24, abaixo:

$$g(v) = f_c + (f_s - f_c)e^{(v/v_s)^a} \quad (24)$$

onde o coeficiente de Coulomb é representado por  $f_c$ , o atrito estático por  $f_s$  e introduz uma velocidade limite, denominada de velocidade de *Stribeck*,  $v_s$ . Muvengi (2012) considera que  $a = 2$  é um valor apropriado para o modelo.

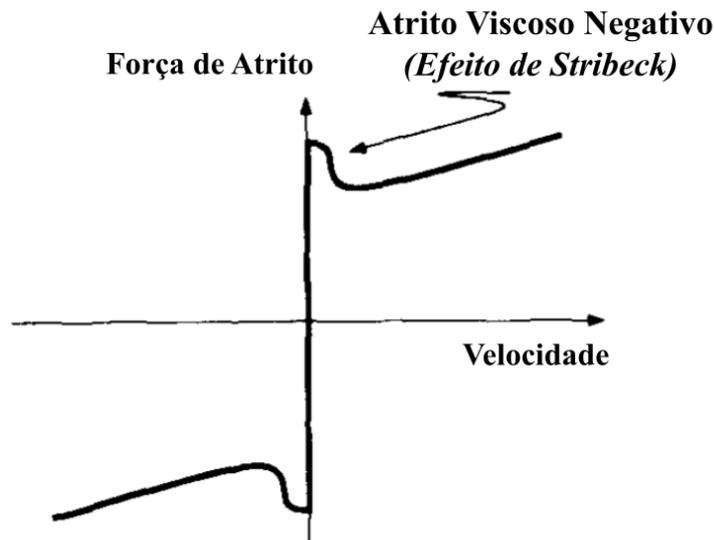


Figura 8: Comportamento do Atrito segundo o Modelo de Coulomb + Atrito Viscoso + Efeito de *Stribeck*.

Com isso obtemos na Equação 25, o modelo de atrito mais realista dentre os modelos clássicos.

$$\tau_{atrito} = -f_v v - [f_c + (f_s - f_c)e^{(v/v_s)^2}] \operatorname{sgn}(v) \quad (25)$$

Em Dhal (1968), o autor introduz o seu modelo de atrito a partir de experimentos que reúne o atrito de Coulomb com o atraso devido ao atrito no regime de pré-deslizamento. No pré-deslizamento as forças do atrito dependem principalmente do deslocamento. Segundo Casanova (2007), “Isto porque as junções formadas pelo contato entre duas superfícies deformam-se elásticamente comportando-se como molas não-lineares”.

A análise de Dahl inicia usando a curva tensão-deformação, quando submetido a tensão a força de atrito aumenta gradualmente até que ocorra ruptura (OLSSON et al., 1998). Modelando a curva tensão-deformação por uma Equação diferencial (Equação 26) onde o deslocamento é definido por  $x$ , a torque de atrito  $\tau_{atrito}$ , e a força de atrito de Coulomb  $f_c$ :

$$\frac{\tau_{atrito}}{dx} = \sigma_0 \left( 1 - \frac{\tau_{atrito}}{f_c} \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha \quad (26)$$

onde  $\sigma_0$  é o coeficiente de rigidez,  $\alpha$  é o parâmetro que caracteriza a forma da curva de atrito pelo deslocamento. Segundo Olsson *et al.* (1998), normalmente  $\sigma = 1$  é utilizado. Uma nova variável de estado é introduzida  $z$  que representa o deslocamento na zona de pré-deslizamento, o atrito é então definido por:

$$\tau_{atrito} = \sigma_0 z \quad (27)$$

considerando  $dx = v dt$  e conhecendo  $\tau_{atrito}$  pode-se substituir los na Equação 27 obtendo:

$$\frac{dz}{dt} = v \left( 1 - \frac{\sigma_0 z}{f_c} \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha \quad (28)$$

O modelo de atrito de *LuGre* é uma extensão do modelo de Dahl. Proposto por Canudas de Wit *et al.* (1995), este modelo consegue descrever de forma mais precisa as características estáticas e dinâmicas do atrito, incluindo o efeito de *Stick-Slip*, *Limit Cycle Oscillation*, pré-deslizamento, *Friction Memory*, aumento de fricção estática e a curva estática de *Stribeck* (LIU, 2006).

Segundo Casanova (2007), quando analisamos as superfícies, sob o ponto de vista microscópica, o contato é efetuado através de asperezas. Logo Haessig e Friedland (1991) desenvolveram um modelo que represente este comportamento chamado de Bristle Model. Modelando o contato entre as superfícies por hastes flexíveis (Figura 9). Quando as superfícies se deslocam uma em relação a outra, os esforços aumentam as hastes se comportam como molas e geram uma força de atrito (OLSSON et al., 1998).

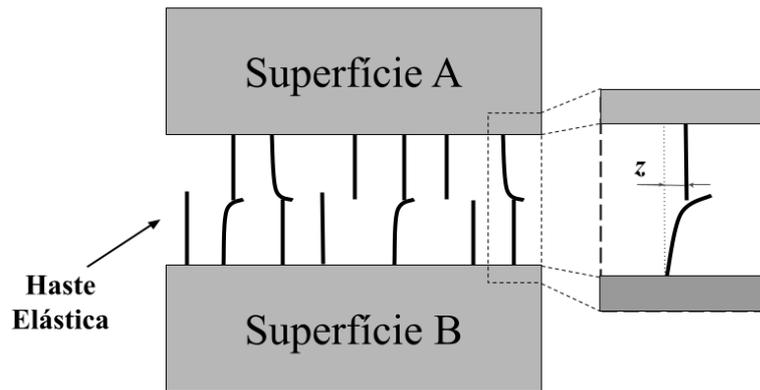


Figura 9: Comportamento das Hastes nas Superfícies, baseada em (CASA-NOVA, 2007).

Na Figura 9 é introduzido  $z$  uma variável de estado que modela a deflexão medias das hastes. Lund e Grenoble (1995), propõem o modelo de LuGre dado pelas Equações (29), (30) e (31):

$$\tau_{atrito} = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \quad (29)$$

onde  $\sigma_0$  representa o coeficiente de rigidez das deformações microscópicas de  $z$ ,  $\sigma_1$  o coeficiente de amortecimento,  $\sigma_2$  o coeficiente de atrito viscoso.

Em seguida definimos  $\frac{dz}{dt}$ :

$$\frac{dz}{dt} = v \left( 1 - \frac{\sigma_0 z}{g(v)} \text{sgn}(v) \right) \quad (30)$$

onde  $g(v)$  representa a aproximação do efeito de *Stribeck*, definido anteriormente:

$$g(v) = f_c + (f_s - f_c) e^{(v/v_s)^a} \quad (31)$$

### 3 Bancada Experimental

A bancada experimental, projetada na PUC-RIO, é um manipulador com um grau de liberdade, através da qual são obtidos os dados experimentais usados nos testes de identificação de sistema. Para este propósito o manipulador, representado na Figura 10, é composto por um motor dois eixos do tipo DC brushless D5065/270KV com um torque, dois encoders CUI AMT102 com resolução de 8192 CPR (ciclos por revolução) e um intervalo de 7500 RPM, os componentes mecânicos, ou seja, o elo, a base e a junta rígida foram usinados usando alumínio 7075-T6.

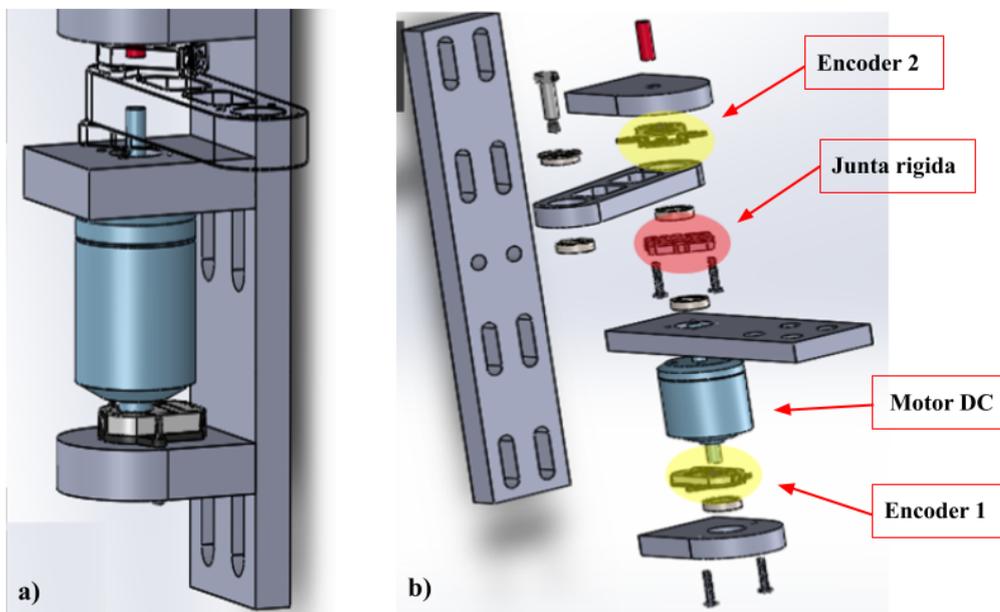


Figura 10: Desenho da Montagem do Manipulador. a) Representação do Manipulador Vertical b) Visão Explodida, baseado em (LOPES; MEGGIOLARO, 2021).

Além dos componentes introduzidos anteriormente a bancada dispõe de partes eletrônicas, o controlador ODrive que é conectado a uma fonte de 42V para controlar o manipulador e de um computador conectado ao controlador, este tem a função de fazer o controle do manipulador e coletar os dados da posição e velocidade dos encoders. A composição da bancada está descrita na Figura 11, indicando as diferentes informações transmitidas entre as componentes.

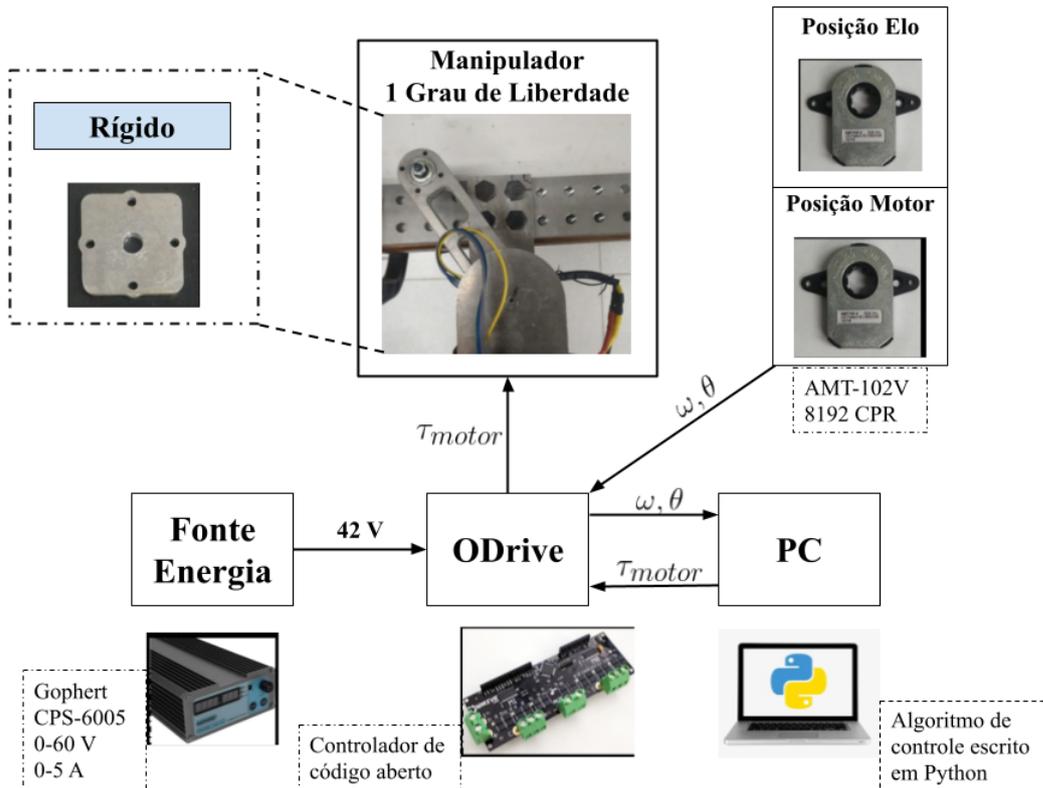


Figura 11: Componentes da Bancada de Testes, baseado em (LOPES, 2022).

### 3.1

#### Modelo Implementado neste Trabalho

Nesta seção apresentamos o modelo dinâmico do sistema de posicionamento estudado neste trabalho, a bancada experimental será apresentada na Seção 3.. A Figura 12 apresenta um diagrama da bancada de teste. Um motor transmite um torque a junção que movimento o elo, observa-se que o manipulador tem um grau de liberdade:  $n = 1$ .

Neste trabalho algumas considerações são feitas para simplificar o modelo, consideramos nosso sistema como sendo um manipulador com juntas rígidas, com isso usamos o equacionamento proposto na Seção 2.1 pela Equação 1. Desta forma, as seguintes considerações são feitas para simplificar o modelo:

1. A aceleração da gravidade pode ser desconsiderada, considerando que o manipulador esta na horizontal, com isso  $\tau_G(q) = 0$ ;
2. Desconsideramos as forças centrífuga e de Coriolis, assumindo configuração constante no manipulador:  $C(q, \dot{q}) = 0$ ;
3. São desconsiderados os efeitos de torques externos.

Com isso obtemos:

$$J\dot{\omega} + \tau_{atrito}(\omega) = \tau_{motor} \quad (32)$$

onde  $\dot{\omega}$ ,  $\omega$  são respectivamente a aceleração e a velocidade angular na junta;  $\tau_{motor}$  é o Torque/Força na junta;  $J$  é a soma dos momentos de inércia do sistema incluindo o momento de inércia do servomotor ( $J_{sm}$ ) e da carga ( $J_c$ ) e  $\tau_{atrito}$  é o torque de atrito que depende da velocidade e/ou do posicionamento dependendo do modelo de atrito empregado.

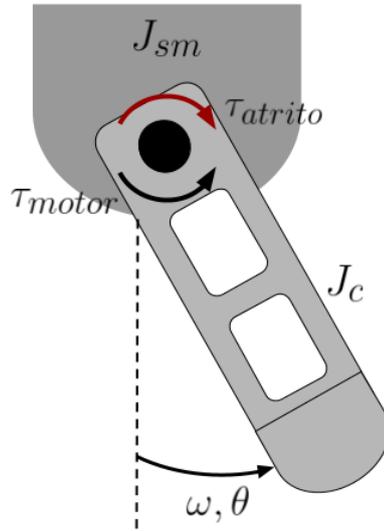


Figura 12: Diagrama do Sistema de Posicionamento.

Usando a Equação 32, deve-se definir as equações dinâmicas do sistema servomecânico usando cada modelo de atrito, apresentados na Seção 2.5. A equação dinâmica do modelo linear é obtida substituindo o  $\tau_{atrito}$  na Equação 32, obtendo (33):

$$J\dot{\omega} + f_v\omega = \tau_{motor} \quad (33)$$

onde somente o momento de inércia ( $J$ ) e o atrito viscoso ( $f_v$ ) devem ser identificados. A segunda abordagem envolve o uso do modelo de Coulomb + *Stribeck*, dada por:

$$J\dot{\omega} + f_v\omega + [f_c + (f_s - f_c)e^{(\omega/v_s)^2}] \text{sgn}(\omega) = \tau_{motor} \quad (34)$$

onde os parâmetros são definidos na Tabela 1. Ao contrário dos dois modelos anteriores, os modelos de Dahl e LuGre utilizam uma variável de estado adicional  $z$ .

Com isso, as equações utilizadas para definir dinâmica do servossistema usando os modelos de atrito de Dahl e LuGre, são respectivamente dados por (35) e (36):

$$\begin{cases} J\dot{\omega} + \sigma_0 z = \tau_{motor} \\ \frac{dz}{dt} = \omega \left(1 - \frac{\sigma_0 z}{f_c} \operatorname{sgn}(\omega)\right)^\alpha \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} J\dot{\omega} + \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 \omega = \tau_{motor} \\ \frac{dz}{dt} = v \left(1 - \frac{\sigma_0 z}{g(\omega)} \operatorname{sgn}(\omega)\right) \end{cases} \quad (36)$$

onde  $g(v)$  representa a aproximação do efeito de *Stribeck*, dado por (37):

$$g(\omega) = f_c + (f_s - f_c)e^{(\omega/v_s)^\alpha} \quad (37)$$

### 3.2

#### Descrição do Conjunto de Dados

Através do uso de sensores e medidores na bancada de testes apresentada na Seção 3, foram obtidos os diferentes dados necessários para efetuar a identificação dos parâmetros. A entrada do sistema é o torque transmitido ao elo, definido por  $\tau_{motor}$ . Com os dados de entrada deseja-se obter um modelo dinâmico que estime os dados de saída do sistema: a velocidade na junção  $\omega$  e a posição  $\theta$ . O conjunto de dados tem uma duração de aproximadamente 20 segundos com uma taxa de aquisição de 130 Hz. O torque transmitido oscila entre  $0,07 \text{ N} \cdot \text{m}$  e  $-0,07 \text{ N} \cdot \text{m}$ . As Figuras 13 e 14 ilustra o conjunto de dados em função do tempo.

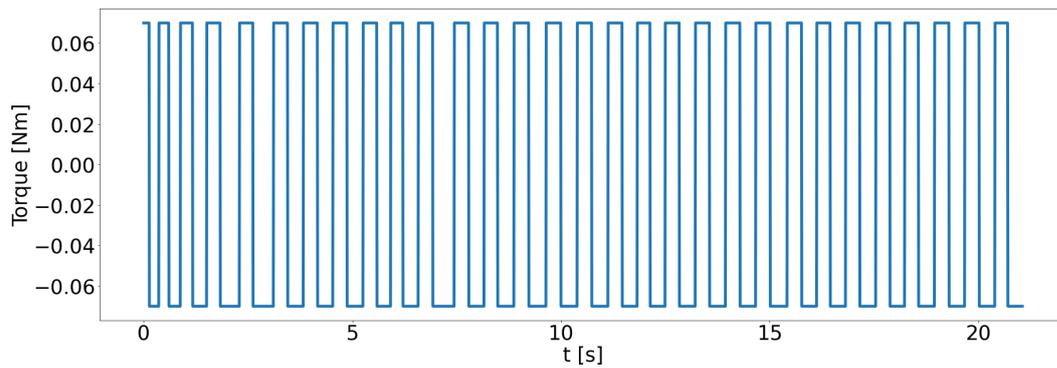
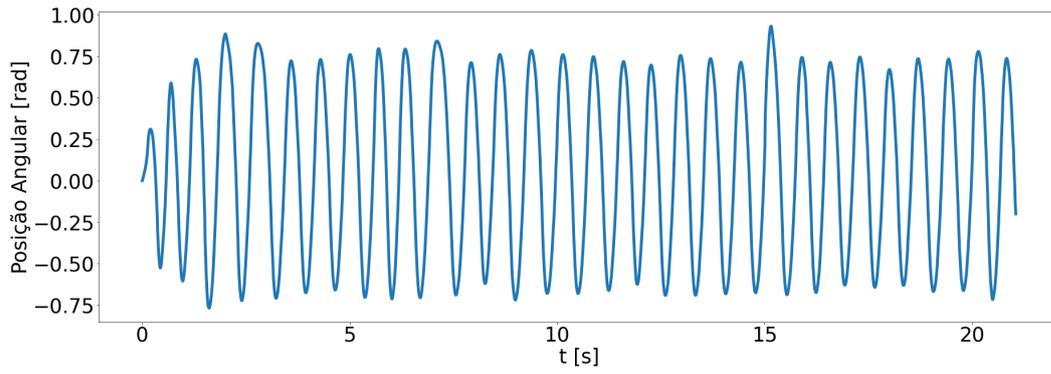
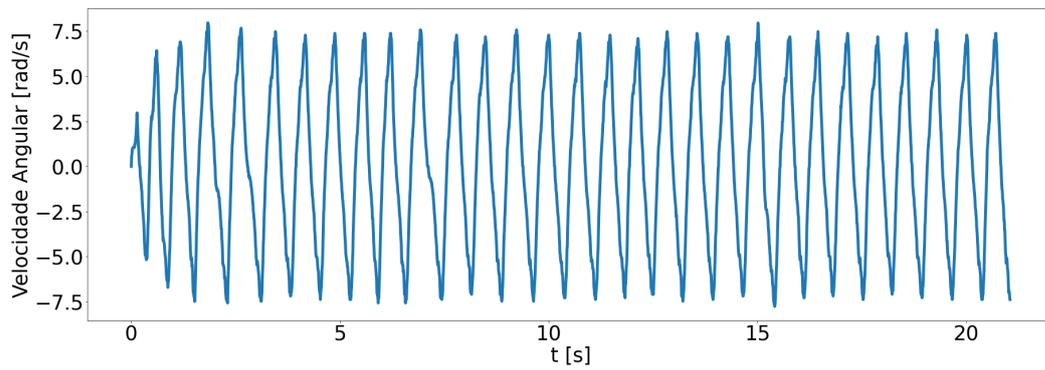


Figura 13: Torque Experimental em Função do Tempo.



(a) Posição Angular



(b) Velocidade Angular

Figura 14: Dados Experimentais em Função do Tempo.

## 4

### Resultados

Por meio do conjunto de dados obtidos experimentalmente, os métodos de identificação caixa-cinza e caixa-preta são implementados. Na Seção 4.1 apresentaremos os resultados da identificação caixa-cinza dos diferentes modelos de atrito apresentados na Seção 2.5, tendo como entrada o torque do motor e como saída a velocidade angular. Na sequência, as performances de cada modelo são analisadas através de gráficos e métricas de erro.

Por fim, na Seção 4.2 estudaremos os resultados da identificação caixa-preta usando RNAs, esta parte é composta por duas predições, a primeira da velocidade angular e a segunda da posição e a velocidade angular. Para ambos os métodos, a performance de identificação é mensurada por meio de gráficos e diferentes métricas de erro.

#### 4.1

##### Identificação Caixa-cinza

Nesta seção analisa-se os resultados dos diferentes modelos utilizados para caracterizar a dinâmica do servossistema mecânico. Os diferentes parâmetros modelos de atrito, apresentados na Tabela 1, são identificados através da minimização do erro usando a ferramenta CasADi. Além disso, utiliza-se a formulação multiple-shooting para a integração das equações diferenciais. Por fim, os resultados de cada modelo são comparados aos dados experimentais.

Através das equações dinâmicas de cada modelo de atrito, apresentadas na Seção 3.1, focamos nos limites de busca, visto que o desempenho da identificação dos parâmetros pode ser influenciada por essas escolhas. Com isso, também apresentamos na Tabela 1 os limites de busca utilizados para os diferentes parâmetros dos modelos de atrito a serem estimados.

Tabela 1: Limites de Busca.

Parâmetro	Descrição	Limite Inferior	Limite Superior
$J$	Momento de Inércia	0	$1 \times 10^{-2}$
$f_v$	Atrito Viscoso	0	$1 \times 10^{-2}$
$f_c$	Atrito de Coulomb	0	$1 \times 10^{-1}$
$f_s$	Atrito Estático	0	$1 \times 10^{-2}$
$\sigma_0$	Coefficiente de Rigidez	0	10
$\sigma_1$	Coefficiente de Amortecimento	0	$1 \times 10^{-1}$
$\sigma_2$	Coefficiente de Atrito Viscoso	0	$1 \times 10^{-1}$
$v_s$	Velocidade de <i>Stribeck</i>	0	$1 \times 10^{-2}$
$\delta$	Offset	$-1 \times 10^{-1}$	$1 \times 10^{-1}$

Para melhorar a identificação dos parâmetros normaliza-se os dados experimentais. Em seguida, através do *MATLAB* usando o método de *multiple shooting* os parâmetros são identificados, os quais estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros Estimados usando o Método Caixa-cinza.

Modelo	Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
Linear	J	Momento de Inércia	0,0015	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
	$f_v$	Atrito Viscoso	0,0058	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$
Dahl	J	Momento de Inércia	0,0015	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
	$f_c$	Atrito de Coulomb	0.0245	$\text{N} \cdot \text{m}$
	$\sigma_0$	Coefficiente de Rigidez	4.0197	$\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$
	$\delta$	Offset	-0,0048	$\text{rad}/\text{s}$
Coulomb + <i>Stribeck</i>	J	Momento de Inércia	0,0015	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
	$f_v$	Atrito Viscoso	0,0058	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$
	$f_c$	Atrito de Coulomb	0,0022	$\text{N} \cdot \text{m}$
	$f_s$	Atrito Estático	0,0040	$\text{N} \cdot \text{m}$
	$v_s$	Velocidade de <i>Stribeck</i>	0,0015	$\text{rad}/\text{s}$
	$\delta$	Offset	-0,0050	$\text{rad}/\text{s}$
LuGre	J	Momento de Inércia	0,0016	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
	$f_c$	Atrito de Coulomb	0,0064	$\text{N} \cdot \text{m}$
	$f_s$	Atrito Estático	0,0064	$\text{N} \cdot \text{m}$
	$\sigma_0$	Coefficiente de Rigidez	3,1166	$\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$
	$\sigma_1$	Coefficiente de Amortecimento	0,0021	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$
	$\sigma_2$	Coefficiente de Atrito Viscoso	0,0029	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$
	$v_s$	Velocidade de <i>Stribeck</i>	0,0010	$\text{rad}/\text{s}$
	$\delta$	Offset	-0,0044	$\text{rad}/\text{s}$

Ao analisar a Tabela 2 pode-se ressaltar a diferença da quantidade de parâmetros a serem identificados entre cada modelo, dito isso nota-se a semelhança de valores de momento de inércia, atrito viscoso, offset, embora sejam modelos diferentes. O número de parâmetros, a complexidade do equacionamento e a quantidade de variáveis de estado são fatores que influenciam o tempo de otimização. Através desta constatação, o modelo de LuGre pode ser considerado o modelo que requer a maior quantidade de trabalho computacional para a identificação dos parâmetros.

As simulações da velocidade angular da bancada são feitas utilizando as equações dinâmicas e os valores dos parâmetros estimados. Para isso, consideramos como entrada do sistema o torque do motor e como saída a velocidade angular. Com o objetivo de avaliar a performance dos modelos, a Tabela 3 apresenta as métricas de erro de cada modelo, obtidas comparando as curvas de velocidade angular obtidas através da simulação com as curvas experimentais.

Tabela 3: Métricas de Erro dos Diferentes Modelos.

Modelo	RMSE	MAE	MSE	R <sup>2</sup>
Linear	1,2863	1,0038	1.6545	0,9191
Dahl	0,9974	0,7372	0.9949	0,9514
Coulomb + <i>Stribeck</i>	0,8696	0,6164	0.7562	0,9631
LuGre	0,7829	0,5202	0.6446	0,9700

Analisando a Tabela 3, constata-se que o modelo linear apresentou o pior resultado se comparado aos demais modelos, devido a simplicidade do modelo. O modelo de Dahl por outro lado, apresentou uma redução de 66% do erro MSE e 36% do erro MAE se comparado ao modelo linear, devido ao maior número de fenômenos do atrito modelados. Considerando o modelo de Coulomb + *Stribeck* uma redução de 118% e 31 % do MSE pode ser verificada ao comparar com linear e Dahl, respectivamente, devido ao efeito de *Stribeck* sendo considerado. Por fim, com o modelo de LuGre, uma extensão do modelo de Dahl, constata-se uma redução de 54.34% do erro MSE e 41.71% do erro MAE se comparado com o modelo de Dahl, além de uma redução de 17% do erro MSE e de 18% comparado ao modelo de Coulomb. Esta melhoria é devido ao maior número de fenômenos considerados no modelo de LuGre incluindo o efeito de *Stribeck*. O coeficiente de determinação (R<sup>2</sup>) indica a performance de um modelo, o qual quanto mais próximo de 1, melhor sua capacidade de representar a dinâmica de um sistema. No caso do modelo de LuGre temos o valor de R<sup>2</sup> mais próximo ao ideal.

A Figura 15 apresenta os histogramas de erros dos diferentes modelos estudados neste trabalho. Ao avaliar os centros de cada modelo, constata-se que os modelos com os picos mais concentrados perto de zero são os modelos de Coulomb e de LuGre significando uma média de erro menor. Mesmo tendo um centro perto de zero, o modelo linear e de Dahl tem uma dispersão mais importante se aproximando de -2 e 2 rad/s.

Levando em consideração as métricas de erro e a dispersão do erro no histograma, o modelo de LuGre é considerado o melhor modelo de atrito dentre os modelos utilizados. A comparação das velocidades angulares da simulação e experimental é apresentada graficamente na Figura 16 e o erro entre as velocidades é plotado na Figura 17.

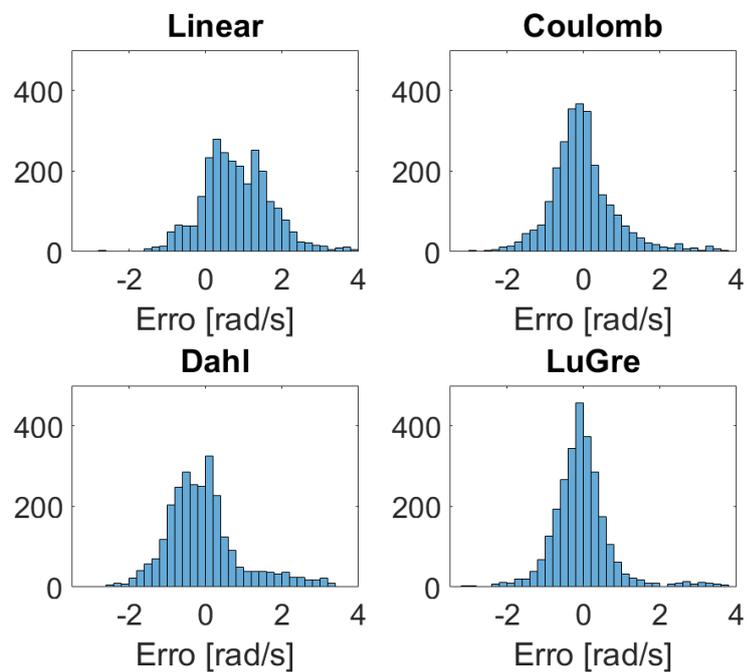


Figura 15: Histograma dos Erros dos Modelos de Atrito.

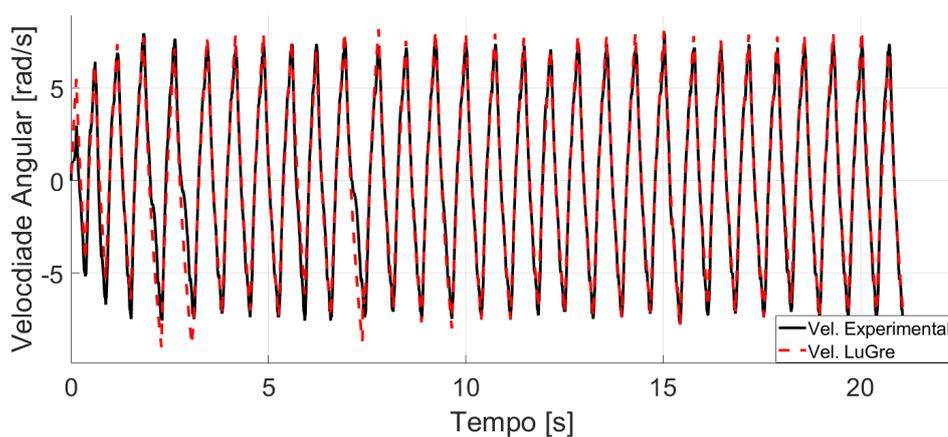


Figura 16: Velocidade experimental comparada com a Velocidade obtida usando o Modelo de LuGre.

Através da Figura 16 observa-se que as trajetórias das velocidades angulares experimentais e simuladas são semelhantes, e que o modelo de LuGre foi capaz de simular a dinâmica do servossistema.

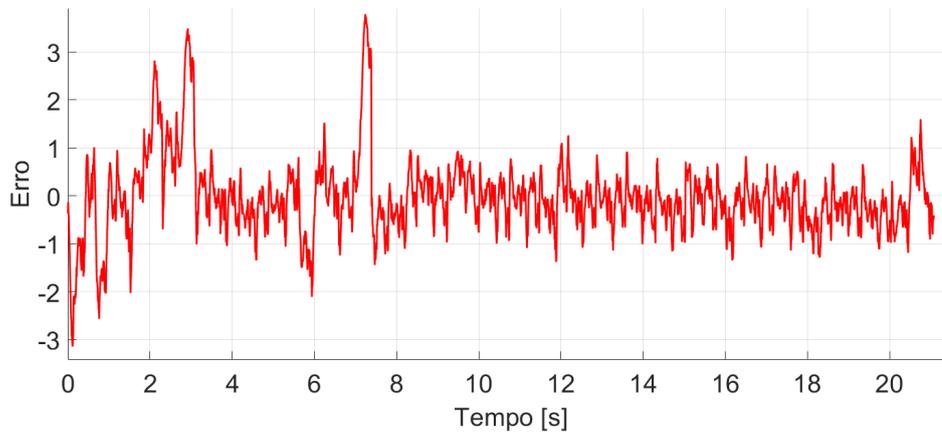


Figura 17: Erro entre a Velocidade experimental e a Velocidade obtida usando o Modelo de LuGre.

Os maiores erros observados na Figura 17 são contidos ao início do movimento do elo entre  $[0,4]$  segundos, após este período disruptivo percebe-se que o erro é mantido entre  $-1$  e  $1$  rad/s. Os erros observados podem ser causados por: imprecisão das medições, o número importante de parâmetros a serem identificados e a complexidade do fenômeno do atrito.

## 4.2 Identificação Caixa-preta

Nesta seção apresentamos os resultados da identificação caixa-preta usando RNAs. O modelo foi implementado através da linguagem de programação *Python*, juntamente de diferentes módulos de redes neurais incluindo: *TensorFlow*, *SkLearn* e *Keras*.

O primeiro método, apresentado na Seção 4.2.1, foca na modelagem da velocidade angular do servossistema, ou seja, somente uma saída usando as velocidades anteriores e o torque imposto a junta para prever a velocidade futura. A Seção 4.2.2 foca no segundo método que considera o sistema como um todo, ou seja, trabalha com a posição e a velocidade angular em função do torque. Dois modelos de predição são estudados o OSA e o FR, em seguida analisamos e comparamos as performances das diferentes arquiteturas.

## 4.2.1

## Modelo de Uma Saída: Velocidade Angular

O modelo NARX considera que para uma melhor predição deve usar os dados de entrada e saída do sistema defasados por  $n_y$  e  $n_u$ , as ordens do modelo. Com isso, foram propostas diferentes arquiteturas variando diferentes características da RNA. Em todas as arquiteturas, apresentadas na Tabela 4, foram usados o otimizador “*Adam*”, e um taxa de aprendizado igual a 0,001. Para cada arquitetura foram feitas múltiplas simulações para obtenção de melhores resultados.

Tabela 4: Características das Arquitetura Estudadas - Velocidade Angular.

N° arquitetura	$n_y$	$n_u$	N° camadas ocultas	N° neurônios por camada	Função de ativação	N° Épocas
1	2	2	4	64	<i>ReLu</i>	500
2	2	2	4	32	<i>ReLu</i>	500
3	2	2	4	16	<i>ReLu</i>	500
4	5	5	4	64	<i>ReLu</i>	500
5	10	10	4	128	<i>ReLu</i>	500

Após definir as arquiteturas, ocorre a etapa de preparação dos dados que consiste em normalizar os dados com o objetivo de melhorar a performance das predições. Buscando obter o melhor modelo de predição, vinte simulações são feitas usando cada arquitetura apresentadas anteriormente. Com o propósito de treinar as RNAs, os dados experimentais são divididos em: dados de treino e dados de teste. Os dados de treinos são utilizados para treinar a rede e obter os pesos sinápticos ideais da RNA, em seguida os dados de teste são usados para validar o modelo. As métricas de erros de cada arquitetura são apresentados na Tabela 5, com os resultados separados em duas partes, de predição de tipo OSA e FR.

Tabela 5: Métricas de Erro de cada Arquitetura - Velocidade Angular.

N° arquitetura	OSA					FR		
	Treino		Teste			MAE	MSE	R <sup>2</sup>
	MAE	MSE	MAE	MSE	R <sup>2</sup>			
1	0.1327	0.0293	0.1304	0.0270	0.9987	0.6898	0.9784	0.9591
2	0.1303	0.0286	0.1299	0.0268	0.9987	0.5010	0.5886	0.9713
3	0.1300	0.0282	0.1272	0.0267	0.9987	0.7612	1.0244	0.9472
4	0.1237	0.0248	0.1235	0.0250	0.9988	0.4872	0.5505	0.9743
5	0.1216	0.0246	0.1245	0.0261	0.9987	0.5498	0.7383	0.9687

Analisando a Tabela 5, constata-se que as diferentes arquiteturas de RNA tem desempenhos similares usando a predição OSA, com valores de  $R^2$  próximos de 1, indicando uma capacidade satisfatória de predição. Portanto, a definição da melhor arquitetura é baseada nas demais métricas de erro associadas ao FR onde temos a arquitetura 4 apresentando os melhores resultados de  $R^2 = 0.9743$  e MAE de 0.1235 rad/s. Os resultados da arquitetura 4, a melhor arquitetura segundo as métricas de erro, são apresentados nas figuras abaixo.

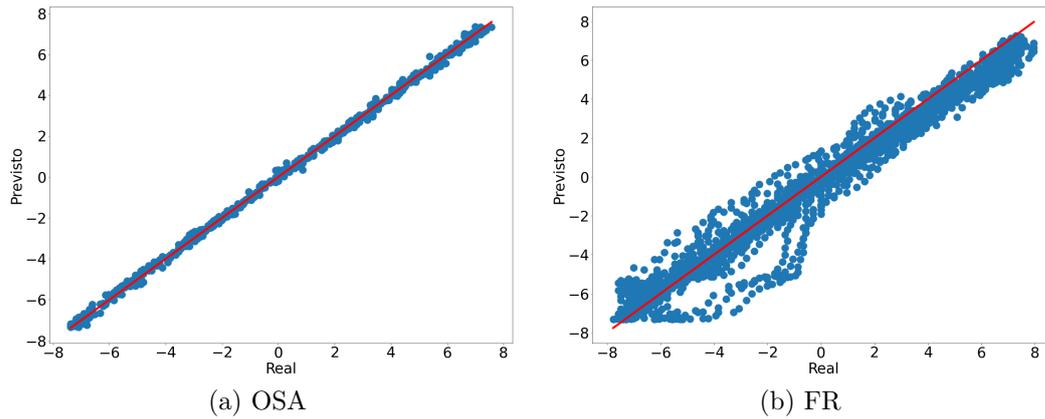
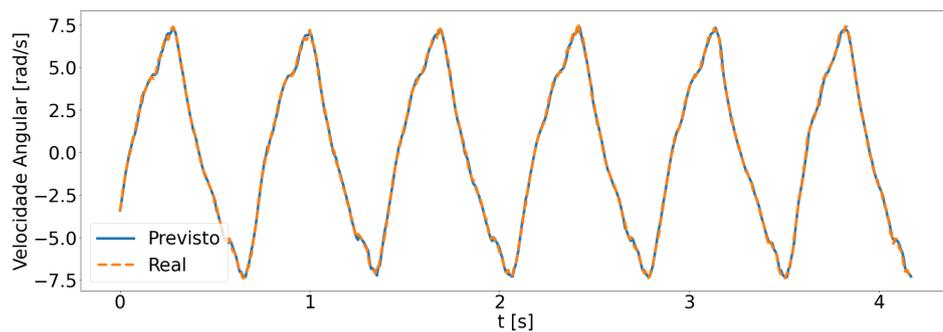


Figura 18: Comparação entre os Dados Experimentais e os Dados Previstos - Arquitetura 4.

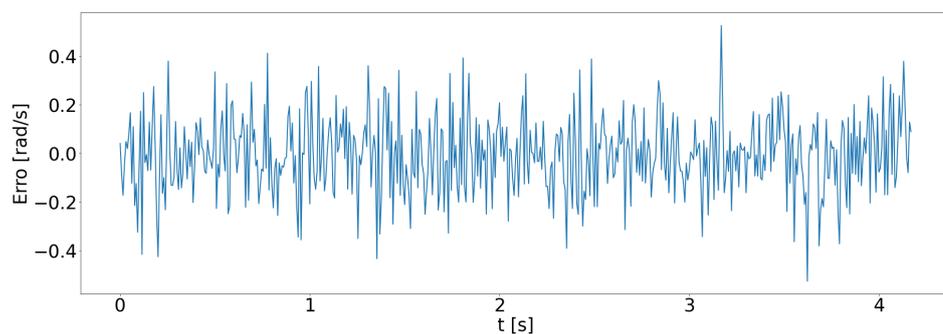
A Figura 18 apresenta a comparação entre os dados experimentais e os dados previstos usando OSA e FR, onde a linha vermelha indica o modelo ideal e os pontos azuis as previsões feitas, o qual quanto mais próximos da linha vermelha, melhor sua capacidade de estimação. Percebe-se que a simulação FR apresenta algumas discrepâncias entre os dados previstos e os dados reais comparado a simulação OSA que apresentou um desempenho melhor com dados previstos mais próximos dos dados reais.

Na Figura 19a é feita a comparação entre as trajetórias das velocidades angulares experimentais e previstas, onde observa-se uma convergência entre as duas. O erro da predição usando OSA é representado na Figura 19b, onde constata-se que o erro se mantém entre -0.5 e 0.5 rad/s confirmando o desempenho satisfatório indicado pelas métricas de erro.

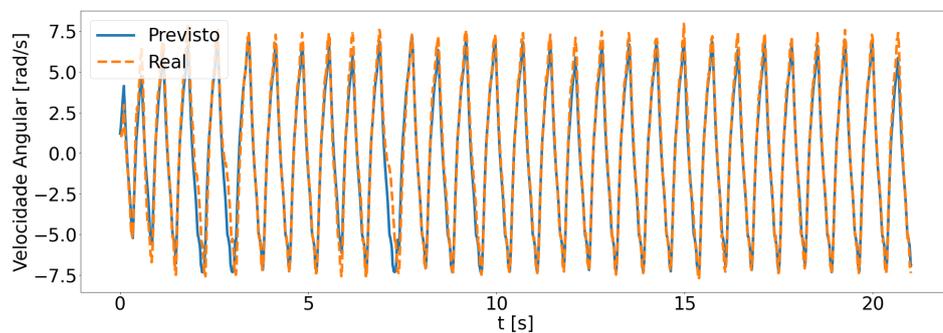
A velocidade angular prevista usando FR, comparada na Figura 19c, apresenta uma trajetória semelhante aos dados obtidos experimentalmente. O método FR, diferentemente da predição do tipo OSA, utiliza os dados previstos anteriormente para estimar os dados futuros causando erros acumulados, o que propicia uma maior discrepância entre os dados reais e previstos, conforme verificado na Figura 19d.



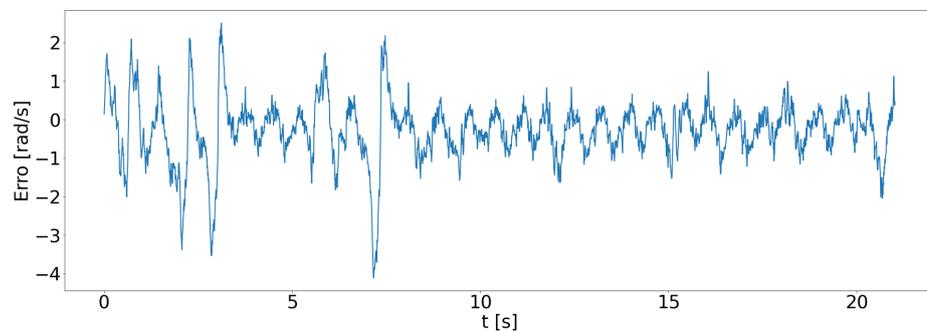
(a) Velocidade Experimental comparada com a Velocidade obtida usando o OSA (Teste)



(b) Erro entre a Velocidade Experimental e a Velocidade obtida usando OSA (Teste)



(c) Velocidade Experimental comparada com a Velocidade obtida usando FR



(d) Erro entre a Velocidade Experimental e a Velocidade obtida usando FR

Figura 19: Comparação entre a Velocidade Experimental e a Velocidade obtida usando a Arquitetura 4.

## 4.2.2

## Modelo de Duas Saídas: Posição Angular e Velocidade Angular

Nesta seção apresenta uma RNA que estima a posição angular e a velocidade angular do sistema de posicionamento. Para facilitar as predições, o modelo NARX é implementado usando a excitação do torque do motor, a posição angular e a velocidade angular anteriores para fazer predições futuras. Dito isso, diferentes arquiteturas de RNA são propostas variando a ordem do modelo NARX, o número de camadas e a quantidade de neurônios por camada. Em todas as arquiteturas, apresentadas na Tabela 6, o otimizador “*Nadam*” e a taxa de aprendizagem igual a 0,001 foram empregados.

Tabela 6: Características das Arquitetura Estudadas - Duas Saídas.

N° arquitetura	$n_y$	$n_y$	N° camadas ocultas	N° neurônios por camada	Função de ativação	N° épocas
1	2	2	4	16	<i>Tanh</i>	700
2	2	2	4	32	<i>Tanh</i>	700
3	2	2	4	64	<i>Tanh</i>	700
4	5	5	4	32	<i>Tanh</i>	700
5	5	10	4	16	<i>Tanh</i>	700

Antes de treinar as RNAs usando as arquiteturas apresentadas, os dados são normalizados para facilitar as predições e em seguida divididos em treino e teste. Para cada arquitetura, vinte simulações são feitas. As RNAs são inicialmente treinadas e em seguida avaliadas usando os dados através do método de predição OSA, após está etapa, as RNAs são testadas usando o método de predição FR. As métricas de erros das predições das posições e velocidade angulares de cada arquitetura são apresentados nas Tabelas 7 e 8, com os resultados separados em duas partes, de predição de tipo OSA e FR.

Tabela 7: Métricas de Erro da Posição Angular de cada Arquitetura - Duas Saídas.

N° arquitetura	OSA					FR		
	Treino		Teste			MAE	MSE	R <sup>2</sup>
	MAE	MSE	MAE	MSE	R <sup>2</sup>			
1	0.0053	0.0001	0.0052	0.0001	0.9998	0.2135	0.0895	0.6640
2	0.0060	0.0324	0.0057	0.0001	0.9998	0.1691	0.0730	0.7255
3	0.0068	0.0356	0.0061	0.0001	0.9997	0.1706	0.0598	0.7751
4	0.0060	0.0001	0.0060	0.0001	0.9997	0.1242	0.0432	0.8378
5	0.0060	0.0001	0.0058	0.0001	0.9998	0.2113	0.1332	0.6679

Tabela 8: Métricas de Erro da Velocidade Angular de cada Arquitetura - Duas Saídas.

N° arquitetura	OSA					FR		
	Treino		Teste			MAE	MSE	R <sup>2</sup>
	MAE	MSE	MAE	MSE	R <sup>2</sup>			
1	0.1428	0.0333	0.1436	0.0324	0.9984	1.0159	1.9327	0.9057
2	0.1397	0.0001	0.1410	0.0317	0.9985	1.3776	5.0348	0.7540
3	0.1473	0.0001	0.1461	0.0339	0.9984	1.1562	2.4808	0.8788
4	0.1390	0.0320	0.1418	0.0316	0.9985	0.8157	1.7892	0.9127
5	0.1418	0.0346	0.1432	0.0335	0.9985	1.6150	4.9976	0.6792

Ao analisar as Tabelas 7 e 8, as métricas de erro indicam performances similares entre as arquiteturas usando o modelo de predição OSA, com  $R^2 > 0,95$  tanto para a predição da posição angular como para a velocidade angular. No entanto, quando avaliamos as arquiteturas usando o método de predição FR, observa-se que os modelos apresentam uma queda de performance. Dentre as arquiteturas, a arquitetura de número 4 apresenta os melhores resultados usando a predição FR com  $R^2$  da posição angular igual a 0,8378 e um  $R^2$  da velocidade angular igual a 0,9127. Os resultados da arquitetura 4 são apresentados nas figuras abaixo.

A Figura 20 apresenta a comparação entre os dados experimentais e os dados previstos pela RNAs, usando os métodos de previsão de tipo OSA e FR, onde a linha vermelha indica o modelo ideal e os pontos azuis as previsões feitas, o qual quanto mais próximos da linha vermelha, melhor sua capacidade de estimação. As previsões feitas usando OSA, apresentadas em 20a e 20b, indicam um bom desempenho mostrando a posição dos pontos azuis próximos da linha vermelha. O modelo FR, representado em 20c e 20d, indica uma performance pior que o modelo OSA, com uma maior dispersão dos pontos em relação a linha vermelha (modelo ideal).

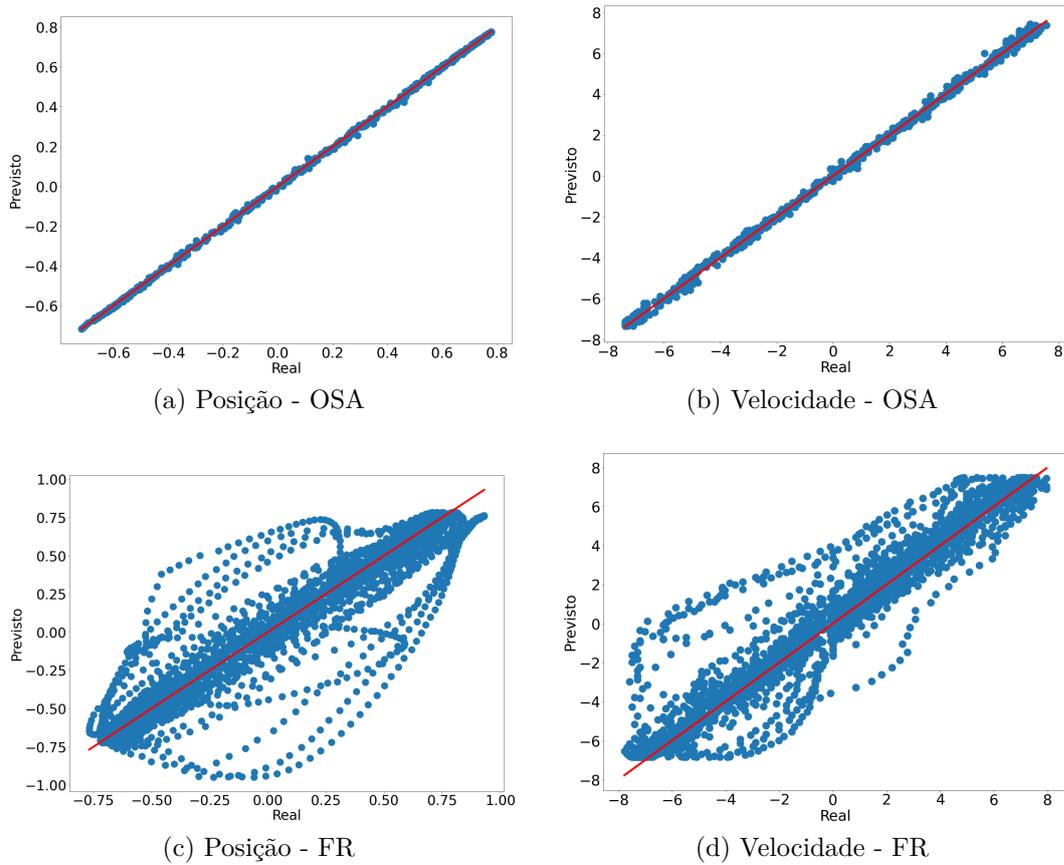
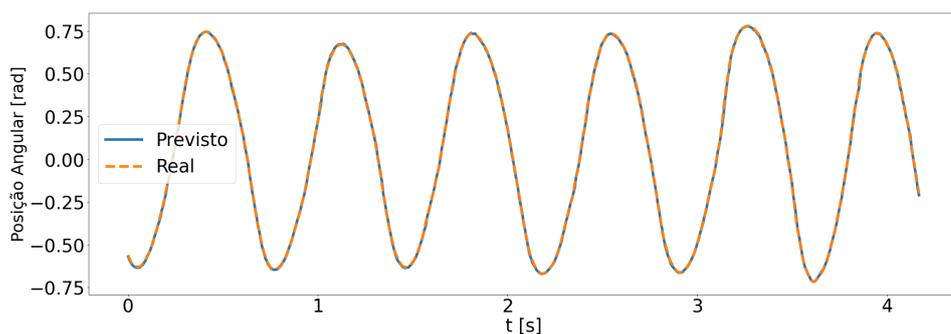
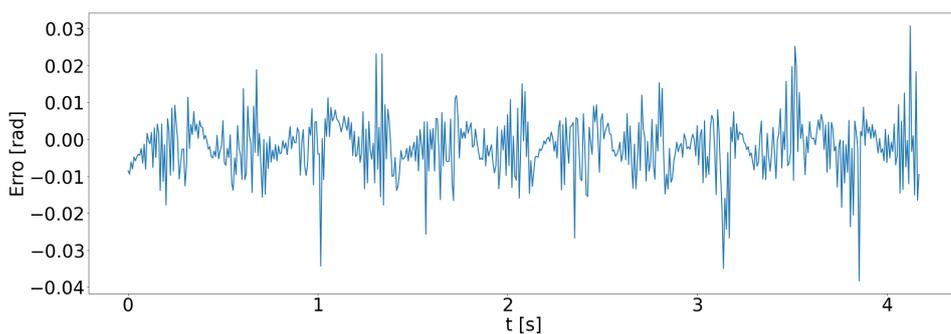


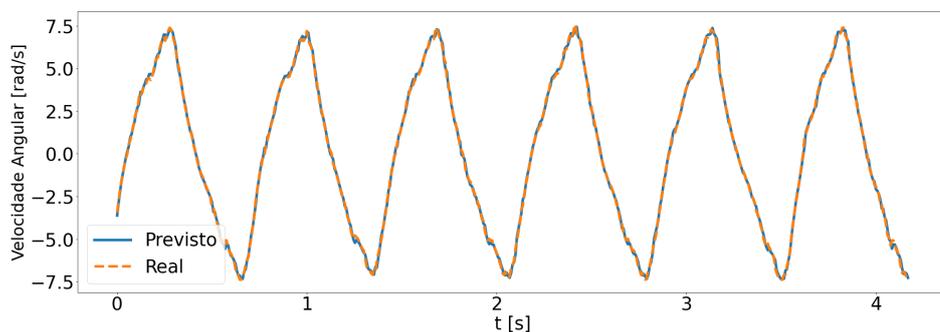
Figura 20: Comparação entre os Dados Previstas e Experimentais da Arquitetura 4.



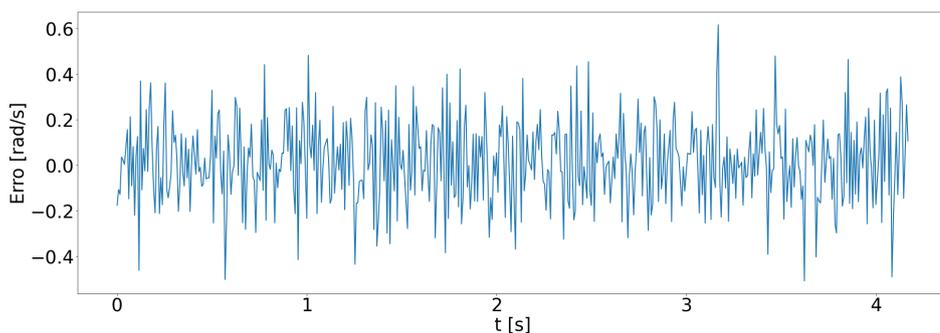
(a) Posição Experimental comparada com a Posição obtida usando OSA (Teste)



(b) Erro entre a Posição Experimental e a Posição obtida usando OSA (Teste)



(c) Velocidade Experimental comparada com a Velocidade obtida usando OSA (Teste)



(d) Erro entre a Velocidade Experimental e a Velocidade obtida usando OSA (Teste)

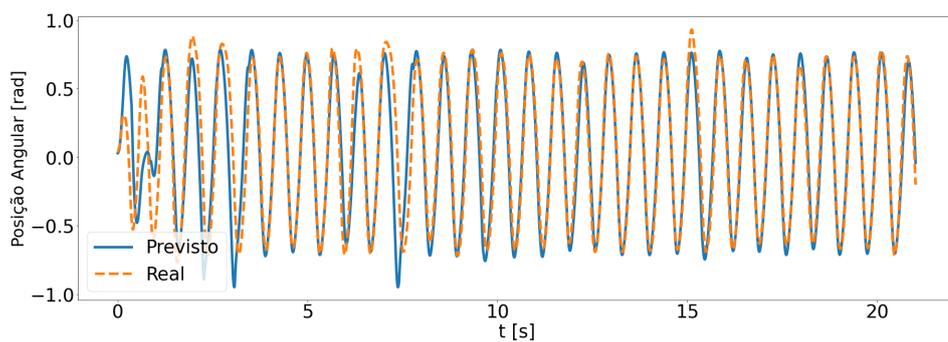
Figura 21: Comparação entre os Dados Experimentais e os Dados obtida usando a Arquitetura 4.

A comparação das trajetórias da posição angular e velocidade angular obtidas através da predição de tipo OSA com os dados experimentais é feita na Figura 21. Observando as Figuras 21a e 21b, constata-se que a posição angular prevista através da arquitetura 4 é similar aos dados obtidos experimentalmente, com o erro mantido entre  $-0,4$  e  $0,3$  rad, confirmando o desempenho satisfatório indicado através das métricas de erro na Tabela 8. A RNA também demonstra uma capacidade satisfatória de predição das velocidades angulares ao avaliar o erro na Figura 21c, observa-se que após um período inicial disruptivo o erro estabiliza e se mantém entre  $-1$  e  $1$  rad/s.

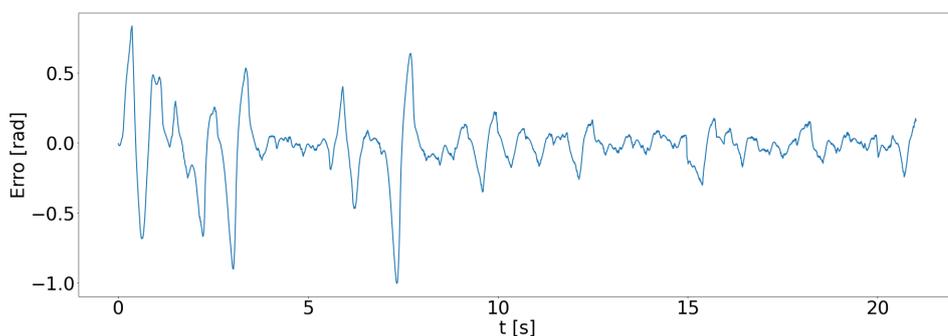
O modelo de predição FR, recebe somente dados iniciais do sistema, em seguida este utiliza as estimações obtidas para prever as previsões futuras. Com isso, o modelo possui a tendência de sofrer com o acúmulo de erro que pode afetar sua performance final. Levando isso em consideração, os resultados das previsões feitas usando o método de predição FR são comparados aos dados experimentais na Figura 22.

Analisando as Figuras 22a e 22b, constata-se que ao contrário da predição usando OSA, as trajetórias divergem mais dos dados reais em certos instantes, especialmente no período entre  $[0,10]$  segundos. Após este período, observa-se que o erro se mantém entre  $-0.5$  e  $0.5$  rad. Dito isso, o modelo é capaz de fazer previsões pertinentes. Segundo as métricas de erros, a arquitetura 4 indica ter um melhor desempenho na predição das velocidades angulares usando FR, tendo um  $R^2$  da velocidade angular maior que  $0.9$ . Este desempenho é representado na Figura 22c, onde pode-se observar uma convergência entre as trajetórias das velocidades angulares estimadas e experimentais. O erro da predição usando FR é representado na Figura 22d, se mantendo entre  $-2$  e  $2$  rad/s o que indica um erro de maior magnitude se comparado ao encontrado na predição de tipo OSA, representado na Figura 21d.

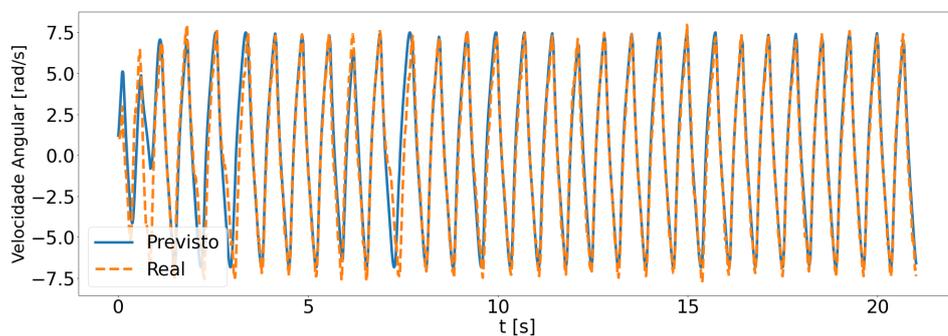
Através das métricas de erro e gráficos comparativos, podemos concluir que a arquitetura 4 de RNA demonstra um desempenho satisfatório na predição da posição e da velocidade angular da bancada experimental através da predição de tipo OSA. Apesar de uma queda de desempenho usando o tipo FR, os resultados de uma maneira geral se mantém de acordo com o esperado considerando a metodologia abordada.



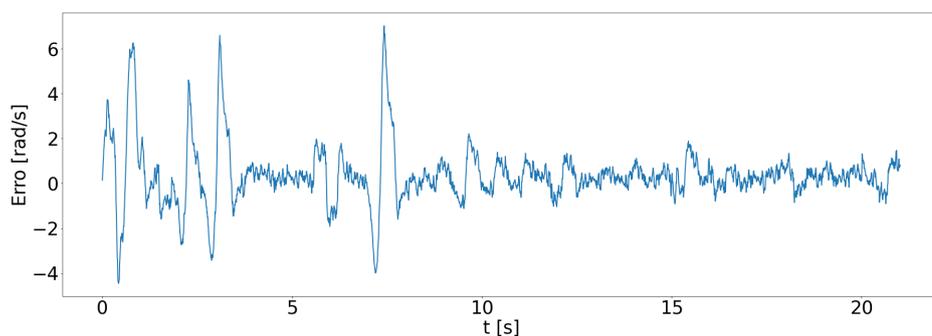
(a) Posição Experimental comparada com a Posição obtida usando FR



(b) Erro entre a Posição Experimental e a Posição obtida usando FR



(c) Velocidade Experimental comparada com a Velocidade obtida usando FR



(d) Erro entre a Velocidade Experimental e a Velocidade obtida usando FR

Figura 22: Comparação entre os Dados Experimentais e os Dados obtida usando a Arquitetura 4.

### 4.3

#### Discussão

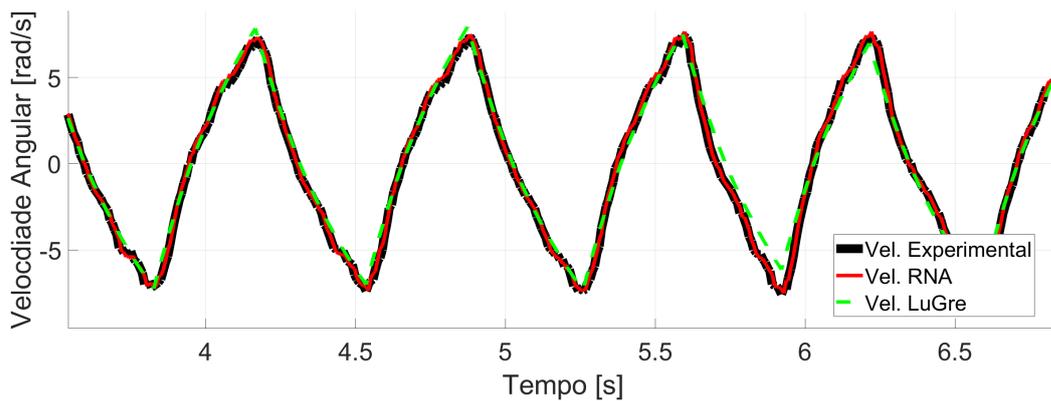
Nesta seção os melhores resultados dos três métodos de identificação apresentados no Capítulo 4 são comparados. Com o modelo de tipo caixa-cinza, identificamos parâmetros de diferentes modelos de atrito, para melhor modelagem da bancada experimental proposta. Outros métodos propostos são os modelos de caixa-preta usando redes neurais, o primeiro possui uma saída: a velocidade angular; o segundo possui duas saídas: a posição angular e a velocidade angular.

Ao comparar os resultados de caixa-preta, as melhores arquiteturas indicam resultados das velocidades angulares similares usando a predição de tipo OSA, com o modelo de uma saída tendo um  $R^2 = 0.999$  e o modelo com duas saídas tendo um  $R^2 = 0.998$ . Ao analisar o método de predições FR de cada método, observa-se que o modelo com uma saída tem erros MAE 67% menores que o do modelo com duas saídas. Dito isso, o modelo com duas saídas possui uma vantagem importante, tendo a capacidade de fazer predições de dois parâmetros da bancada experimental ao contrário de somente uma.

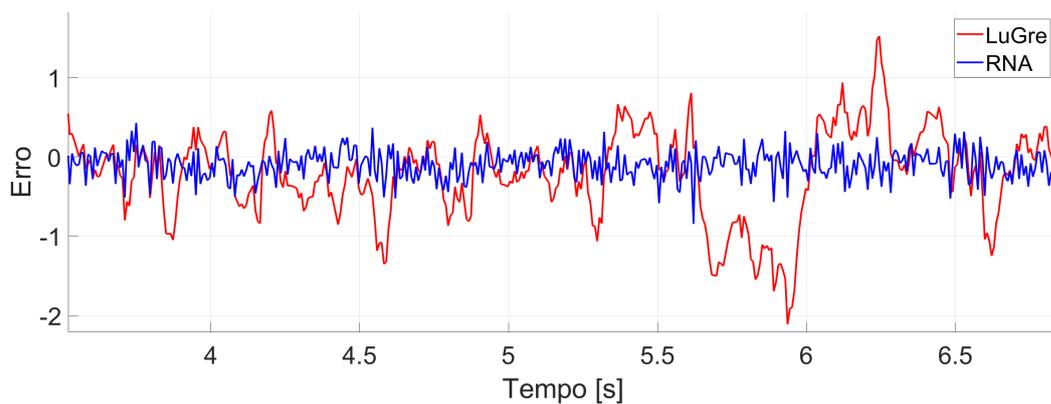
Tabela 9: Métricas de Erro dos Melhores Modelos.

Modelo	RMSE	MAE	MSE	$R^2$
Caixa-cinza: LuGre	0,7829	0,5202	0.6446	0,9700
Caixa-preta: Uma saída	0.7419	0.4872	0.5505	0.9743

Através da Tabela 9, o modelo de caixa-cinza demonstrou resultados adequados usando o modelo de LuGre com um coeficiente de determinação ( $R^2$ ) igual a 0.970 comparado ao melhor modelo de tipo caixa-preta: o modelo com uma saída, que tem um  $R^2$  de 0.974 do tipo FR. Além disso o erro MAE é 32% vezes maior, indicando um desempenho pior que o modelo de tipo caixa-preta. Através dos resultados pode-se dizer que o modelo usando RNA e Caixa-cinza tem performances similares para a tarefa de simulação, como mostram os resultados. O modelo Caixa-preta de uma saída tem uma performance um pouco melhor, com erros menos importantes. Na Figura 23 temos o comparativo entre os modelos, onde, para o modelo de duas saídas, apenas o gráfico de velocidade é apresentado.



(a) Velocidade Experimental comparada com as Velocidades Previstas



(b) Erro entre a Velocidade Experimental e as Velocidades Previstas

Figura 23: Comparação entre as Velocidades Experimentais e os Velocidades obtida usando os diferentes modelos.

Ao analisar a Figura 23, as observações feitas acima são confirmadas, com o modelo caixa-preta tendo um melhor desempenho.

## 5

### Conclusão

Neste trabalho foram abordados diferentes metodologias de identificação de sistemas não-lineares. Em específico, métodos caixa-cinza e caixa-preta foram utilizados para caracterizar a dinâmica da bancada experimental de um manipulador flexível. Após uma revisão sobre a modelagem de manipuladores robóticos de juntas rígidas e flexíveis, um modelo dinâmico foi proposto para modelar a bancada experimental composta por um motor DC, uma junta rígida, um elo. Em seguida, um estudo sobre os diferentes métodos de identificação foi feita. O objetivo da identificação caixa-cinza foi encontrar o modelo de atrito adequado ao servossistema estudado. Para isso, utilizamos RNAs para a identificação caixa-preta.

A primeira parte focou no método de tipo caixa-cinza, onde os diferentes parâmetros dos modelos de fricção foram identificados usando o método de *multiple shooting* e em seguida, foi feita uma comparação das estimações com os dados reais. Os dados experimentais consideravam como entrada o torque do motor e como saída a posição e a velocidade angular. O modelo de atrito LuGre teve o melhor desempenho, obtendo resultados com boa aderência dos dados reais com um coeficiente de determinação igual a 0.97, considerado adequado.

A parte da identificação caixa-preta, implementada através do uso do modelo NARX e RNA, foi dividida em duas partes: a primeira focando na predição de um estado, a velocidade angular, e a segunda focando na estimação dos dois estados, a posição angular e a velocidade angular. As predições de tipo FR tiveram performances adequadas, tendo erros acumulados causados pelo uso de predições anteriores para estimar os estados futuros, com o melhor modelo tendo um  $R^2$  igual a 0.974. As capacidades de predição dos dois modelos foram consideradas satisfatórias, lembrando que o segundo modelo tem a vantagem de fazer predições de dois estados da bancada experimental.

Comparando os modelos de identificação, o modelo caixa-cinza obteve um erro MAE 32% maior que o modelo caixa-preta com uma saída, indicando que o modelo caixa-preta tem uma performance similar ao modelo caixa-cinza usando o modelo de LuGre.

No futuro propomos a aplicação de um modelo mais completo da dinâmica do manipulador considerando a flexibilidade nas juntas. Outro foco poderia ser testar diferentes métodos de identificação caixa-cinza e caixa-preta comparando os desempenhos de cada algoritmo.

## Referências bibliográficas

ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B.; DUPONT, P.; WIT, C. C. D. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. **Automatica**, v. 30, p. 1083–1138, 07 1994. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 15.

ASADA, H.; SLOTINE, J. J. E. **Robot analysis and control**. [S.l.]: J. Wiley, 1986. Citado na página 18.

BEINTEMA, G. I.; TOTH, R.; SCHOUKENS, M. Non-linear state-space model identification from video data using deep encoders. **IFAC-PapersOnLine**, v. 54, p. 697–701, 2021. Citado na página 14.

BILLINGS, S. A. **Nonlinear System Identification NARMAX Methods in the Time, Frequency, and Spatio-Temporal Domains**. [S.l.]: Chichester, Uk John Wiley and Sons, Ltd, 2013. Citado na página 24.

BURTON, T. D. **Introduction to dynamic systems analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1994. Citado na página 18.

CASANOVA, C. **Modelagem e compensação de atrito em robôs manipuladores com flexibilidades nas juntas: identificação, análise e resultados experimentais**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 6, 13, 30, 31 e 32.

COULOMB, C. A. **Theorie des machines simples, en ayant egard au frottement de leurs parties, et a la roideur des cordages**. [S.l.]: A Paris, Chez Bachelier, 1809. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 29.

DAHL, P. R. A solid friction model. **The Aerospace Corportation**, 1968. Citado 3 vezes nas páginas 13, 29 e 31.

FORGIONE, M.; PIGA, D. Continuous-time system identification with neural networks: Model structures and fitting criteria. **European Journal of Control**, v. 59, p. 69–81, 05 2021. Citado na página 14.

GEDON, D. et al. Deep state space models for nonlinear system identification. **IFAC-PapersOnLine**, v. 54, p. 481–486, 2021. Citado na página 15.

HAESSIG, D. A.; FRIEDLAND, B. On the modeling and simulation of friction. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 113, p. 354–362, 09 1991. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 31.

HAYKIN, S.; ENGEL, P. M. **Redes neurais : principios e pratica**. [S.l.]: Bookman, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 6, 23, 25 e 26.

LEWIS, F. L.; ABDALLAH, C. T.; DAWSON, D. M. **Control of robot manipulators**. [S.l.]: Macmillan Pub. Co. ; Toronto, 1993. Citado na página 18.

- LIU, D. Parameter identification for lugre friction model using genetic algorithms. **International Conference on Machine Learning and Cybernetics**, v. 2006, p. 3419–3422, 2006. Citado na página 31.
- LJUNG, L. Perspectives on system identification. **Annual Reviews in Control**, v. 34, p. 1–12, 04 2010. Citado na página 20.
- LOPES, F.; MEGGIOLARO, M. Design of a low-cost series elastic actuator for application in robotic manipulators. In: . [S.l.: s.n.], 2021. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 33.
- LOPES, F. R. **Desenvolvimento e controle de posição e força de um atuador elástico em série baseado em elastômeros**. Tese (Doutorado) — PUC-RIO, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 34.
- LUCA, A.; BOOK, W. Springer handbook of robotics. In: \_\_\_\_\_. [S.l.: s.n.], 1998. cap. Robots with Flexible Elements, p. 287–319. Citado na página 19.
- MAKAROV, M. Contribution à la modélisation et la commande robuste de robots manipulateurs à articulations flexibles. applications à la robotique interactive. In: . [S.l.: s.n.], 2013. Citado 3 vezes nas páginas 6, 18 e 19.
- MASTI, D.; BEMPORAD, A. Learning nonlinear state–space models using autoencoders. **Automatica**, v. 129, p. 109666, 07 2021. Citado na página 14.
- MUVENGELI, O. M.; KIHU, J. M.; IKUA, B. W. Computational implementation of lugre friction model in a revolute joint with clearance. In: . [S.l.: s.n.], 2012. Citado na página 30.
- OLSSON, H. et al. Friction models and friction compensation. **European Journal of Control**, v. 4, p. 176–195, 01 1998. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 31.
- PENNESTRÍ, E. et al. Review and comparison of dry friction force models. **Nonlinear Dynamics**, v. 83, p. 1785–1801, 11 2015. Citado na página 13.
- QUARANTA, G.; LACARBONARA, W.; MASRI, S. F. A review on computational intelligence for identification of nonlinear dynamical systems. **Nonlinear Dynamics**, v. 99, p. 1709–1761, 01 2020. Citado 6 vezes nas páginas 14, 15, 20, 22, 24 e 27.
- RETZLER, A. et al. Shooting methods for identification of nonlinear state-space grey-box models. **2022 IEEE 17th International Conference on Advanced Motion Control (AMC)**, 02 2022. Citado na página 22.
- RIBEIRO, A. H.; AGUIRRE, L. A. Shooting methods for parameter estimation of output error models \* \*this work has been supported by the brazilian agencies capes, cnpq and fapemig. **IFAC-PapersOnLine**, v. 50, p. 13998–14003, 07 2017. Citado na página 22.
- RUINA, A. Slip instability and state variable friction laws. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, v. 88, n. B12, p. 10359–10370, 1983. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/JB088iB12p10359>>. Citado na página 15.

- SCIAVICCO, L.; SICILIANO, B. **Modeling and control of robot manipulators**. [S.l.]: Mcgraw-Hill Companies, Inc, 1996. Citado na página 18.
- SIMONI, L. et al. Inclusion of the dwell time effect in the lugre friction model. **Mechatronics**, v. 66, p. 102345, 04 2020. Citado na página 15.
- SJÖBERG, J. et al. Nonlinear black-box modeling in system identification: a unified overview. **Automatica**, v. 31, p. 1691–1724, 12 1995. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 20.
- SPONG, M. W. Modeling and control of elastic joint robots. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 109, p. 310–318, 12 1987. Citado na página 19.
- SPONG, M. W.; VIDYASAGAR, M. **Robot dynamics and control**. [S.l.]: Wiley, 1989. Citado na página 18.
- WANG, S.; NA, J. Parameter estimation and adaptive control for servo mechanisms with friction compensation. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, v. 16, p. 6816–6825, 11 2020. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 28.
- WANG, X.; LIN, S.; WANG, S. Dynamic friction parameter identification method with lugre model for direct-drive rotary torque motor. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2016, p. 1–8, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 29.
- WIT, C. A. Canudas de; SICILIANO, B.; BASTIN, G. **Theory of robot control**. [S.l.]: Springer, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 19.
- WIT, C. Canudas de et al. A new model for control of systems with friction. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 40, p. 419–425, 03 1995. Citado 4 vezes nas páginas 13, 29, 31 e 32.
- WORDEN, K. et al. Identification of pre-sliding and sliding friction dynamics: Grey box and black-box models. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 21, p. 514–534, 01 2007. Citado na página 13.