

6

Referências bibliográficas

- [1] AMATO, J. D. ; LAUBACH, T. **Forecast-based monetary policy**, *BIS Working Paper #89*, mimeo, 2000
- [2] AMATO, J. D. ; LAUBACH, T. Implications of habit formation for monetary policy, *BIS Working Paper #121*, mimeo, 2002
- [3] BALL, L. ; MANKIW, N. G. E REIS, R. **Monetary Policy for inattentive economies**, Johns Hopkins University e Harvard University, mimeo, 2003
- [4] BERNANKE, B ; WOODFORD, M. Inflation forecasts and monetary policy, *Journal of Money, Credit and Banking* 1997: 653-684, 1997
- [5] BHAGWATI, J. N. The generalized theory of distortions and welfare In BHAGWATI, J. N. ; JONES, R. W. ; MUNDELL, R. ; VANEK J. (eds.) **Trade, Balance of Payments and Growth: Papers in International Economics in Honor of Charles P. Kindleberger**, Amsterdam: North-Holland, 1971
- [6] BHAGWATI, J. N. ; RAMASWAMI, V. K. Domestic Distortions, Tariffs and the Theory of Optimum Subsidy, *Journal of Political Economy* v.71, p. 44-50, 1963
- [7] BLANCHARD, O. J. ; KAHN, C. M. The solution of linear difference models under rational expectations, *Econometrica* v.48, n.5, p. 1305-11, 1980
- [8] CALIXTO, N. ; LOYO, E. **Optimal monetary policy under fiscal dominance**, PUC-Rio, mimeo, 2003

[9] CALVO, G. Staggered prices in a utility maximizing framework , **Journal of Monetary Economics**, v.12 , p.383-398, 1980.

[10] CLARIDA, R. **The empirics of monetary policy rules in open economies**, *NBER Working Paper #8603*, mimeo, 2001.

[11] CLARIDA, R. ; GALI, J. ; GERTLER, M. **The science of monetary policy: a new keynesian perspective**, NBER Working Paper #7147, mimeo, 1999.

[12] CLARIDA, R. ; GALI, J. ; GERTLER, M. Optimal monetary policy in closed vs. open economies: an integrated approach, NBER Working Paper #8604, mimeo, 2001

[13] CLARIDA, R. ; GALI, J. ; GERTLER, M. **“A simple framework for international monetary policy analysis”**, NBER Working Paper #8870, mimeo, 2002

[14] GIANNONI, M. P. ; WOODFORD, M. **Optimal interest-rate rules: I. General theory**, *NBER Working Paper #9419*, mimeo, 2002a

[15] GIANNONI, M. P. ; WOODFORD, M. **Optimal interest-rate rules: II. Applications**. NBER Working Paper #9420, mimeo., 2002b

[16] GIANNONI, M. P. ; WOODFORD, M. **Optimal inflation targeting rules**, Columbia University e Princeton University, mimeo, 2003

[17] HEINEMANN, R. E. **Sustentabilidade fiscal frente a choques de política monetária: encontrando a trajetória ótima de acumulação de dívida**, PUC-Rio, mimeo, 2004

[18] KING, R. G. ; WATSON, M. W. The solution of singular linear difference systems under rational expectations, **International Economic Review** v.39, n.4, p. 1015-26, 1998

[19] LIPSEY, R. ; LANCASTER, K. J. The general theory of the second-best, **Review of Economic Studies**, v. 24,p. 11-32, 1956.

[20] LOYO, E. **Lecture notes: numerical solution of linear rational expectations models**, Harvard School of Government, parte I, mimeo, 2000a

[21] LOYO, E. **Lecture notes: numerical solution of linear rational expectations models**, Harvard School of Government, parte II, mimeo, 2000b

[22] LOYO, E. Imaginary money against sticky relative prices, **European Economic Review**, v.46, p. 1073-1092, 2002

[23] MANKIW, N. G. ; REIS, R. “Sticky information versus sticky prices: a proposal to replace the new-keynesian Phillips curve”, **Quarterly Journal of Economics**, v. 117, p. 1295-328, 2002

[24] ROTEMBERG, J. J. E WOODFORD, M. An optimization-based econometric framework for the evaluation of monetary policy, **NBER Macroeconomics Annual** 12, p. 297-361, 1997

[25] ROTEMBERG, J. J. E WOODFORD, M. Interest rate rules in an estimated sticky price model, In J. B. TAYLOR (ed.) **Monetary Policy Rules**, University of Chicago Press, 1999

[26] SVENSSON, L. E WOODFORD, M. **Implementing optimal policy through inflation forecast targeting**, Princeton University, mimeo, 1999

[27] WOODFORD, M. **Interest and prices: foundations of a theory of monetary policy**, Princeton University Press, 2004. 800p.

[28] WOODFORD, M. **Optimal monetary policy inertia**, NBER Working Paper #7261, mimeo, 1999

[29] WOODFORD, M. Commentary: how should monetary policy be conducted in an era of price stability? In **New Challenges for Monetary Policy**, Federal Reserve Bank of Kansas City, 1999b

7 Apêndices

7.1. Especialização na produção de insumos intermediários

Para demonstrar que a economia doméstica se especializa na produção de um dos insumos é conveniente partir da Lei do Preço Único (na ausência de livre comércio) para escrever:

$$\frac{P_X}{P_Y} = \lambda \frac{P_X^*}{P_Y^*} \quad (\text{A-1-1})$$

A hipótese de concorrência perfeita no setor de bens intermediários exige que:

$$P_X \leq \frac{w}{\delta_x} \quad (\text{A-1-2})$$

$$P_Y \leq \frac{w}{\delta_y} \quad (\text{A-1-3})$$

As expressões acima são satisfeitas com igualdade caso haja produção, enquanto que a desigualdade prevalece caso contrário. Devido à hipótese de livre entrada e saída de firmas em SBI, os preços não podem ser maiores que os custos marginais.

Repare que (A-1-2) e (A-1-3) não podem ser satisfeitas com igualdade ao mesmo tempo, pois o último passo da seqüência abaixo:

$$\frac{P_X}{P_Y} = \frac{w/\delta_x}{w/\delta_y} = \frac{\delta_y}{\delta_x} = \lambda \frac{P_X^*}{P_Y^*} \quad (\text{A-1-4})$$

só é verdade por mera coincidência. O caso no qual ambas são satisfeitas com desigualdade não pode constituir um equilíbrio porque, neste caso, não há produção alguma de insumos. Desta maneira só pode ocorrer que uma das duas expressões ((A-1-1), por exemplo), seja satisfeita com igualdade, enquanto que a outra é satisfeita com desigualdade.

Suponha que $\frac{\delta_y}{\delta_x} < \lambda \frac{P_X^*}{P_Y^*}$. Esta hipótese implica que $\frac{\delta_y}{\delta_x} < \frac{P_X}{P_Y}$ e, portanto,

$\frac{P_X}{P_Y} > \frac{w/\delta_x}{w/\delta_y}$. Ora, a única maneira desta desigualdade ser verdadeira é com

$P_X = \frac{w}{\delta_x}$ e $P_Y < \frac{w}{\delta_y}$, ou seja, a economia doméstica produz somente o insumo X.

7.2.

Efeitos de bem estar provocados por mudanças no grau de afastamento do livre comércio

Esta seção é dedicada ao estudo dos efeitos de bem estar provocados por alterações no parâmetro λ . A questão básica é: será que, nesta economia, o máximo de bem estar para o indivíduo representativo é alcançado quando $\lambda = 1$, ou seja, quando há livre comércio, ou é possível aumentar o bem estar do agente representativo afastando-se dele? Vamos demonstrar que, no contexto deste modelo, $\lambda = 1$ não é ótimo, e que o valor ótimo de λ vai depender, entre outras coisas, dos parâmetros estruturais.

Suponha que $g = \xi = 0$ e $a = 1$. As equações (2-30) a (2-34) podem ser reescritas como:

$$h = c \left[\left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \eta p_A^{\mu/(1-\mu)} + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon} \right) (1 - \eta) p_B^{\mu/(1-\mu)} \right] \quad (\text{A-2-1})$$

$$p_A = \mu \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) w^r \quad (\text{A-2-2})$$

$$p_B = \mu \left(1 + \frac{1}{\delta_x \lambda \varepsilon} \right) w^r \quad (\text{A-2-3})$$

$$1 = \eta p_A^{1/(1-\mu)} + (1-\eta) p_B^{1/(1-\mu)} \quad (\text{A-2-4})$$

$$\frac{v_h(h, 0)}{u_c(c, 0)} = w^r \quad (\text{A-2-5})$$

Substituindo (A-2-2) e (A-2-3) em (A-2-4) chega-se a uma expressão para o salário real w^r como função dos parâmetros estruturais μ , δ_x e η , da medida de termos de troca ε e do grau de intervenção λ , $w^r = w^r(\mu, \eta, \delta_x, \lambda, \varepsilon)$. O próximo passo é substituir (A-2-2) e (A-2-3) em (A-2-1) e, em seguida, inserir o resultado para w^r na expressão resultante. Ao final chega-se a uma relação entre h e c que deve ser obedecida em equilíbrio:

$$h = c \Psi_a \quad (\text{A-2-6})$$

onde Ψ_a é uma função de μ , η , δ_x , λ e ε . Substituindo o resultado para w^r em (A-2-5) chega-se a:

$$v_h(h, 0) = u_c(c, 0) \Psi_b \quad (\text{A-2-7})$$

onde Ψ_b também é função de μ , η , δ_x , λ e ε . As equações (A-2-6) e (A-2-7) compõem um sistema cuja solução corresponde aos valores de equilíbrio de h e c .

Suponha ainda que o Governo oferece às firmas de SBC um subsídio s aos seus gastos operacionais (despesas com salários e compras de insumo X). Nestas condições o problema resolvido pelas firmas de SBC a fim de determinar preços ótimos se transforma em:

$$\max_{P(z)} \left\{ \Pi(z) \equiv P(z) y(z) - (1-s) y(z) \frac{w + P_s}{a} \right\}, \forall z \in [0, 1] \quad (\text{A-2-8})$$

Quando $s = \frac{(\mu-1)}{\mu}$ as firmas de SBC são induzidas a operar eficientemente, ou seja, a igualarem o preço cobrado pelos seus produtos ao custo marginal de produção. Desta maneira as equações (A-2-2) e (A-2-3) são substituídas por:

$$p_A = \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) w^r \quad (\text{A-2-9})$$

$$p_B = \left(1 + \frac{1}{\delta_x \lambda \varepsilon}\right) w^r \quad (\text{A-2-10})$$

Finalmente suponha que há livre comércio ($\lambda = 1$). Sob estas duas últimas hipóteses a seqüência de operações descrita anteriormente resulta em novas versões para as equações (A-2-6) e (A-2-7):

$$h = c\Psi \quad (\text{A-2-11})$$

$$v_h(h, 0) = u_c(c, 0)\Psi \quad (\text{A-2-12})$$

Em outras palavras, quando o Governo corrige a ineficiência oriunda do poder de mercado das firmas de SBC através do pagamento de um subsídio s e, ao mesmo tempo, não há obstáculos ao livre comércio com o resto do mundo, então é verdade que $\Psi_a = \Psi_b = \Psi$.

Imagine agora que há um planejador central cujo objetivo é maximizar o bem estar do indivíduo representativo escolhendo diferentes valores para h e c de equilíbrio, porém consciente que as escolhas devem obedecer à equação (A-2-11). Este problema pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \max_{\{c, h\}} & u(c, 0) - v(h, 0) \\ \text{sa } & h = \Psi c \end{aligned}$$

A condição de 1ª ordem deste problema é exatamente a equação (A-2-12), cuja validade só se verifica sob as duas hipóteses citadas. Conclui-se que o livre comércio se torna ótimo quando as imperfeições existentes em SBC são corrigidas ou, de outra maneira, afastar-se do livre comércio é desejável porque logra-se

diminuir as distorções introduzidas pela concorrência monopolística vigente em SBC.

É necessário ressaltar que este resultado não possui nada de excepcional. Ao contrário, a idéia básica da Teoria das Distorções Domésticas é que afastar-se do livre comércio corrige ou minora os efeitos negativos de alguma imperfeição presente na economia. Tal solução, porém, deve ser vista como *second best*, pois o consenso da literatura é que as imperfeições devem ser combatidas de maneira direta e que somente na ausência de instrumentos de política próximos ao problema é que a utilização de medidas *second best* se justificaria. No presente modelo o subsídio oferecido às firmas de SBC seria um exemplo de solução *first best*.

Já que estabelecer $\lambda \neq 1$ pode ser ótimo, surge naturalmente a questão do grau de intervenção que maximiza o bem estar do agente representativo. Aqui adotamos a estratégia de escolher formatos convenientes para as funções $u(\cdot)$ e $v(\cdot)$ e, com isso, determinar a solução exata do sistema composto pelas equações (A-2-1) a (A-2-5). Os cálculos serão efetuados para uma situação na qual $g = \xi = 0$ e $a = 1$.

Considere que as funções $u(\cdot)$ e $v(\cdot)$, quando calculadas em $\xi = 0$, são as seguintes:

$$u(c, 0) = \tilde{u}(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

$$v(h, 0) = \tilde{v}(h) = \frac{h^{1+\phi}}{1+\phi}$$

Neste caso será verdade que:

$$\tilde{u}'(c) = c^{-\sigma}$$

$$\tilde{v}'(h) = h^{\phi}$$

Substituindo os resultados acima na equação (A-2-7) chega-se a um novo sistema envolvendo h e c :

$$h = c\Psi_a \quad (\text{A-2-13})$$

$$h^\phi c^\sigma = \Psi_b \quad (\text{A-2-14})$$

Basta agora substituir (A-2-13) em (A-2-14) e obter uma equação para c como função de Ψ_a e Ψ_b e, indiretamente, de ϕ , σ , μ , η , δ_x , λ e ε . A solução desta equação (designada por $c^{sol.}$) é inserida em (A-2-13) a fim de encontrar o valor de equilíbrio de h ($h^{sol.}$).

$$c^{sol.} = (\Psi_b \Psi_a^{-\phi})^{1/(\sigma+\phi)} \quad (\text{A-2-15})$$

$$h^{sol.} = \Psi_a (\Psi_b \Psi_a^{-\phi})^{1/(\sigma+\phi)} \quad (\text{A-2-16})$$

O bem estar do indivíduo representativo corresponde à diferença $u(c^{sol.}) - v(h^{sol.})$. Uma vez conhecidos os valores de $\phi(\theta_h)$, $\sigma(\theta_c)$, μ , η , δ_x , λ e ε é possível calcular o bem estar correspondente; em particular, é imediato calcular o bem estar do agente representativo como função de λ . Os resultados deste exercício estão ilustrados nos gráficos que se seguem para os valores de ϕ , σ , μ , η e δ_x constantes na Tabela 1 e para $\varepsilon = 1$. Os valores de ϕ , σ e μ são calibrados (ver, por exemplo, Rotemberg e Woodford (1997)), os demais são escolhidos de maneira conveniente.

A Figura 33 comprova que o livre comércio, em geral, não é ótimo, pois o valor máximo para o bem estar do agente representativo (0,0249) ocorre quando $\lambda = 1,24$ e não quando $\lambda = 1$. A Figura 34, por sua vez, mostra que se o Governo corrige a ineficiência presente em SBC através do pagamento de um subsídio às firmas, então o livre comércio passa a ser ótimo.

É interessante perguntar qual deve ser o valor ótimo de λ como função de ε na ausência da intervenção corretiva do Governo em SBC. A Tabela 14 mostra os valores calculados para $\lambda_{\text{ótimo}}$ e para o máximo de bem estar (denotado por $W_{\text{máximo}}$) quando ε varia de 0,75 a 1,25. Os resultados sugerem que $\lambda_{\text{ótimo}}$ é uma função crescente de ε .

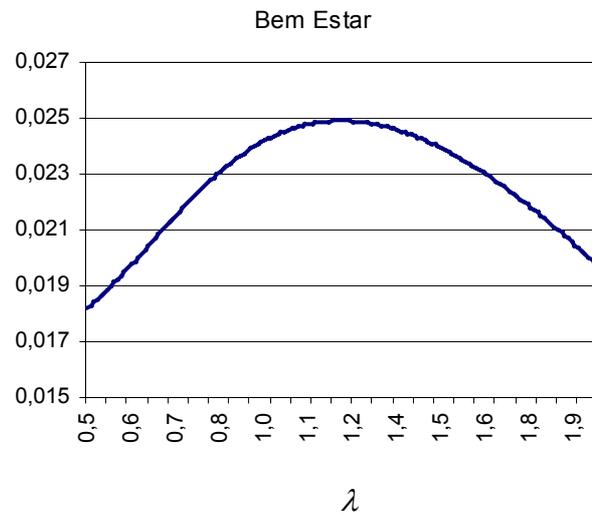


Figura 33: Bem estar como função do grau de afastamento do livre comércio.

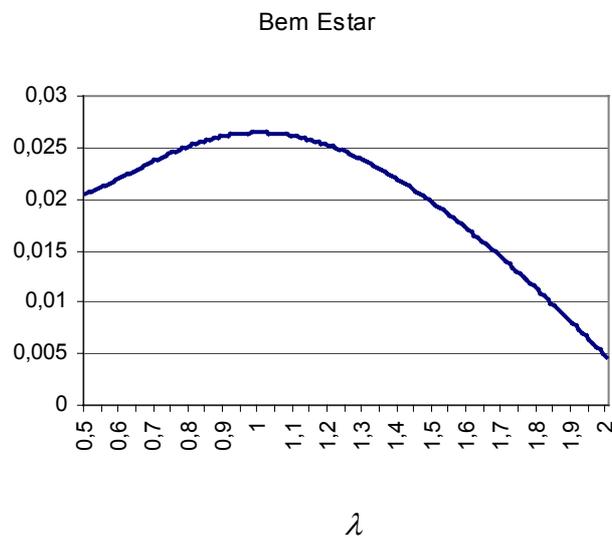


Figura 34: Bem estar como função do grau de afastamento do livre comércio (caso com subsídios governamentais).

ε	$\lambda_{\text{ótimo}}$	$W_{\text{máximo}}$
0,75	1,16	0,0200
0,80	1,18	0,0208
0,85	1,19	0,0217
0,90	1,21	0,0227
0,95	1,23	0,0238
1,00	1,24	0,0249
1,05	1,26	0,0261
1,10	1,28	0,0274
1,15	1,30	0,0287
1,20	1,31	0,0300
1,25	1,33	0,0314

Tabela 14: λ ótimo como função de ε .

η	$\lambda_{\text{ótimo}}$	$W_{\text{máximo}}$
0,1	1,33	0,0261
0,2	1,31	0,0257
0,3	1,29	0,0254
0,4	1,27	0,0252
0,5	1,24	0,0249
0,6	1,22	0,0247
0,7	1,20	0,0245
0,8	1,18	0,0243
0,9	1,16	0,0242

Tabela 15: λ ótimo como função de η .

Também pode ser de interesse investigar como o valor ótimo de λ varia em função da importância relativa do sub-setor A de SBC, dada por η . A Tabela 15 mostra os resultados obtidos quando η varia entre 0,1 e 0,9 ($\varepsilon = 1$ em todos os casos). Os resultados sugerem que $\lambda_{\text{ótimo}}$ é uma função decrescente de η .

Os resultados acima ilustram a natureza *second best* da intervenção sobre o livre comércio. Quando o Governo corrige a priori a ineficiência em SBC (e

quando $\varepsilon = 1$), o valor ótimo de λ é 1 e o bem estar é aproximadamente igual a 0,0264. Este valor, por sua vez, é maior do que os valores encontrados na terceira coluna da Tabela 15. Concluimos, portanto, que afastar-se do livre comércio a fim de compensar o poder de mercado das firmas de SBC provê um resultado sub-ótimo; melhor seria atuar diretamente sobre o problema e simplesmente subsidiar as firmas de SBC.

7.3.

Solução do sistema formado pelas equações (2-44) a (2-48)

O primeiro passo do processo de substituição é, com o auxílio de (2-47), reescrever (2-44):

$$\hat{h} = \hat{y} - \hat{a} - \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon} \quad (\text{A-3-1})$$

O segundo passo é obter a solução para o salário real substituindo-se (2-45) e (2-46) em (2-47). O resultado é:

$$\hat{w}^r = \hat{a} + \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} (\hat{\varepsilon} + \hat{\lambda}) \quad (\text{A-3-2})$$

Tendo encontrado \hat{w}^r é imediato obter soluções para \hat{p}_A e \hat{p}_B , bastando para isso substituir (A-3-2) em (2-45) e (2-46):

$$\hat{p}_A = \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} (\hat{\varepsilon} + \hat{\lambda}) \quad (\text{A-3-3})$$

$$\hat{p}_B = \frac{-\eta}{\delta_x + 1} (\hat{\varepsilon} + \hat{\lambda}) \quad (\text{A-3-4})$$

Para encontrar as soluções de \hat{y} e \hat{h} substitua (A-3-2) em (2-48). O resultado é:

$$\theta_h \hat{h} - \theta_c \hat{y} = \hat{a} + \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} (\hat{\varepsilon} + \hat{\lambda}) - \theta_c \hat{g} - \theta \xi \quad (\text{A-3-5})$$

As equações (A-3-5) e (A-3-1) formam um sistema linear com duas variáveis endógenas, a saber, \hat{y} e \hat{h} , que podem ser obtidas como função das variáveis exógenas. A solução deste sistema é:

$$\hat{y} = \frac{1}{\theta_h - \theta_c} \left[(\theta_h + 1) \hat{a} + (\theta_h + 1) \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon} - \theta_c \hat{g} - \theta \xi + \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\lambda} \right] \quad (\text{A-3-6})$$

$$\hat{h} = \frac{1}{\theta_h - \theta_c} \left[(\theta_c + 1) \hat{a} + (\theta_c + 1) \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon} - \theta_c \hat{g} - \theta \xi + \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\lambda} \right] \quad (\text{A-3-7})$$

7.4.

Solução do sistema formado pelas equações (2-80) a (2-86)

A equação (2-86) implica que:

$$\eta \alpha \hat{P}_A + \eta (1-\alpha) \hat{P}_A' + (1-\eta) \alpha \hat{P}_B + (1-\eta) (1-\alpha) \hat{P}_B' - \hat{P} = 0$$

Inserindo o resultado acima em (2-80) obtém-se:

$$\hat{h} = \hat{y} - \hat{a} - \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon} \quad (\text{A-4-1})$$

O próximo passo é substituir (2-81) a (2-84) em (2-86). O resultado é:

$$\hat{P} = (1-\alpha) \hat{w} - (1-\alpha) \hat{a} + \alpha E[\hat{w}] - (1-\alpha) \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} (\hat{\varepsilon} + \hat{\lambda}) \quad (\text{A-4-2})$$

Calculando o valor esperado de ambos os lados da equação (A-4-2) chega-se a:

$$E[\hat{P}] = E[\hat{w}] \quad (\text{A-4-3})$$

Usando (A-4-3) é possível reescrever (A-4-2) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\alpha)}\hat{P} &= \hat{w} - \hat{a} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)}E[\hat{P}] - \frac{1-\eta}{\delta_x+1}(\hat{\varepsilon} + \hat{\lambda}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{w} &= \frac{1}{(1-\alpha)}\hat{P} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)}E[\hat{P}] + \hat{a} + \frac{1-\eta}{\delta_x+1}(\hat{\varepsilon} + \hat{\lambda}) \end{aligned} \quad (\text{A-4-4})$$

Substituindo o resultado acima em (2-85) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\alpha)}\hat{P} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)}E[\hat{P}] + \hat{a} + \frac{1-\eta}{\delta_x+1}(\hat{\varepsilon} + \hat{\lambda}) - \hat{P} &= \theta_h \hat{h} - \theta_c \hat{y} + \theta_c \hat{g} + \theta \xi \Rightarrow \dots \\ \dots \Rightarrow \frac{\alpha}{(1-\alpha)}(\hat{P} - E[\hat{P}]) + \hat{a} + \frac{1-\eta}{\delta_x+1}(\hat{\varepsilon} + \hat{\lambda}) - \theta_c \hat{g} - \theta \xi &= \theta_h \hat{h} - \theta_c \hat{y} \end{aligned}$$

Este procedimento nos conduz a um sistema linear com duas equações, duas variáveis endógenas (\hat{y} e \hat{h}) e seis variáveis exógenas ($\xi, \hat{g}, \hat{a}, \hat{\varepsilon}, \hat{\lambda}$ e $\hat{P} - E[\hat{P}]$):

$$\hat{y} - \hat{h} = \hat{a} + \frac{1-\eta}{\delta_x+1} \hat{\varepsilon} \quad (\text{A-4-5})$$

$$\theta_h \hat{h} - \theta_c \hat{y} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}(\hat{P} - E[\hat{P}]) + \hat{a} + \frac{1-\eta}{\delta_x+1}(\hat{\varepsilon} + \hat{\lambda}) - \theta_c \hat{g} - \theta \xi \quad (\text{A-4-6})$$

A fim de obter a solução para \hat{y} basta multiplicar (A-4-5) por θ_h e somar a equação resultante com (A-4-6). O resultado é:

$$\hat{y} = \frac{1}{\theta_h - \theta_c} \left[\begin{aligned} &\frac{\alpha}{(1-\alpha)}(\hat{P} - E[\hat{P}]) + (\theta_h + 1)\hat{a} + \dots \\ &\dots + (\theta_h + 1)\frac{1-\eta}{\delta_x+1}\hat{\varepsilon} - \theta_c \hat{g} - \theta \xi + \frac{1-\eta}{\delta_x+1}\hat{\lambda} \end{aligned} \right] \quad (\text{A-4-7})$$

A solução para \hat{h} pode ser calculada substituindo-se (A-4-7) em (A-4-5):

$$\hat{h} = \frac{1}{\theta_h - \theta_c} \left[\begin{array}{l} \frac{\alpha}{(1-\alpha)} (\hat{P} - E[\hat{P}]) + (\theta_c + 1) \hat{a} + \dots \\ \dots + (\theta_c + 1) \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon} - \theta_c \hat{g} - \theta \xi + \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\lambda} \end{array} \right] \quad (\text{A-4-8})$$

Agora defina:

$$p_A = \frac{P_A}{P}, \quad p_B = \frac{P_B}{P}, \quad p'_A = \frac{P'_A}{P}, \quad p'_B = \frac{P'_B}{P}, \quad w^r = \frac{w}{P}$$

Estas variáveis correspondem aos preços praticados por cada grupo de firmas e ao salário, todas medidas em termos reais¹⁴. É possível encontrar soluções para as mesmas continuando o processo de substituição. De (2-83) e (2-84) chega-se a:

$$\hat{P}_A = E[\hat{w}] = E[\hat{P}] \Rightarrow \hat{P}_A - \hat{P} = \hat{p}_A = -(\hat{P} - E[\hat{P}]) \quad (\text{A-4-9})$$

$$\hat{P}_B = E[\hat{w}] = \hat{P}_A \Rightarrow \hat{p}_B = \hat{p}_A = -(\hat{P} - E[\hat{P}]) \quad (\text{A-4-10})$$

Substituindo a expressão para \hat{w} encontrada em (A-4-4) na equação (2-81) e subtraindo \hat{P} de ambos os lados da equação assim obtida chega-se a:

$$\hat{P}'_A - \hat{P} = \hat{p}'_A = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} (\hat{P} - E[\hat{P}]) + \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} (\hat{\varepsilon} + \hat{\lambda}) \quad (\text{A-4-11})$$

Seguindo um procedimento análogo chega-se à solução para \hat{p}'_B :

$$\hat{p}'_B = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} (\hat{P} - E[\hat{P}]) - \frac{\eta}{\delta_x + 1} (\hat{\varepsilon} + \hat{\lambda}) \quad (\text{A-4-12})$$

A taxa real de salário é facilmente obtida a partir de (A-4-4):

¹⁴ Os seus desvios percentuais com relação aos valores assumidos no ponto de aproximação são dados por $\hat{p}_A = \hat{P}_A - \hat{P}$, $\hat{p}_B = \hat{P}_B - \hat{P}$, $\hat{p}'_A = \hat{P}'_A - \hat{P}$, $\hat{p}'_B = \hat{P}'_B - \hat{P}$, $\hat{w}^r = \hat{w} - \hat{P}$.

$$\hat{w} - \hat{P} = \hat{w}^r = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} (\hat{P} - E[\hat{P}]) + \hat{a} + \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} (\hat{\varepsilon} + \hat{\lambda}) \quad (\text{A-4-13})$$

7.5.

Aproximação de 2ª ordem da função de bem estar do agente representativo

O cálculo da aproximação de 2ª ordem de $U = u(c, \xi) - v(h, \xi)$ começa com a expansão de Taylor de 2ª ordem de $u(c, \xi)$:

$$\begin{aligned} u(c, \xi) &= u(y - g, \xi) = u(\bar{y}, 0) + u_c(\bar{y}, 0)(y - \bar{y}) - u_c(\bar{y}, 0)g + u_{c\xi}(\bar{y}, 0)\xi + \\ &+ \frac{1}{2}u_{cc}(\bar{y}, 0)(y - \bar{y})^2 + \frac{1}{2}u_{cc}(\bar{y}, 0)g^2 + \frac{1}{2}u_{\xi\xi}(\bar{y}, 0)\xi^2 - u_{cc}(\bar{y}, 0)(y - \bar{y})g + \\ &+ u_{c\xi}(\bar{y}, 0)(y - \bar{y})\xi - u_{c\xi}(\bar{y}, 0)g\xi + O^3 \end{aligned}$$

Na expressão acima ‘ O^3 ’ indica que os termos desprezados na aproximação são de ordem igual ou superior a três. Alguns dos termos presentes são independentes de política, ou seja, seu valor não depende dos valores assumidos pelos instrumentos \hat{s} e $\hat{\lambda}$, logo podem ser ignorados se estamos interessados em comparar o bem estar proporcionado por políticas alternativas (esses termos serão reunidos sob a designação “t.i.p”). Incorporando esta convenção e prosseguindo com os cálculos chega-se a:

$$\begin{aligned} u(c, \xi) &= u_c(\bar{y}, 0)(y - \bar{y}) + \frac{1}{2}u_{cc}(\bar{y}, 0)(y - \bar{y})^2 - \\ &- u_{cc}(\bar{y}, 0)(y - \bar{y})g + u_{c\xi}(\bar{y}, 0)(y - \bar{y})g + tip + O^3 \\ u(c, \xi) &= u_c(\bar{y}, 0)\bar{y} \times \\ &\times \left[\left(\frac{y - \bar{y}}{\bar{y}} \right) + \frac{1}{2} \frac{u_{cc}(\bar{y}, 0)\bar{y}}{u_c(\bar{y}, 0)} \left(\frac{y - \bar{y}}{\bar{y}} \right)^2 - \right. \\ &\left. - \frac{u_{cc}(\bar{y}, 0)\bar{y}}{u_c(\bar{y}, 0)} \left(\frac{y - \bar{y}}{\bar{y}} \right) \left(\frac{g}{\bar{y}} \right) + \frac{u_{c\xi}(\bar{y}, 0)}{u_c(\bar{y}, 0)} \left(\frac{y - \bar{y}}{\bar{y}} \right) \xi \right] + tip + O^3 \\ u(c, \xi) &= u_c(\bar{y}, 0)\bar{y} \left[\hat{y} + \frac{1}{2}\theta_c \hat{y}^2 - \theta_c \hat{y} \hat{g} + \theta_2 \hat{y} \xi \right] + tip + O^3 \quad (\text{A-5-1}) \end{aligned}$$

onde $\theta_2 = \frac{u_{c\xi}(\bar{y}, 0)}{u_c(\bar{y}, 0)}$. O segundo passo é calcular uma expansão de Taylor de 2ª ordem para $v(h, \xi)$, onde h é dado por (2-72). Reescrevendo (2-72) em função de preços relativos chega-se a:

$$h = \frac{y}{a} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \eta \left[(1-\alpha) p_A'^{\mu/(1-\mu)} + \alpha p_A^{\mu/(1-\mu)} \right] + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon} \right) (1-\eta) \left[(1-\alpha) p_B'^{\mu/(1-\mu)} + \alpha p_B^{\mu/(1-\mu)} \right] \right\} \quad (\text{A-5-2})$$

Assim sendo:

$$h = \frac{y}{a} \Omega \quad (\text{A-5-3})$$

onde Ω é definido como:

$$\Omega = \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \eta \left[(1-\alpha) p_A'^{\mu/(1-\mu)} + \alpha p_A^{\mu/(1-\mu)} \right] + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon} \right) (1-\eta) \left[(1-\alpha) p_B'^{\mu/(1-\mu)} + \alpha p_B^{\mu/(1-\mu)} \right] \quad (\text{A-5-4})$$

Esta variável pode ser interpretada como uma medida da dispersão dos preços relativos e seu valor no ponto de aproximação é $\bar{\Omega} = \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right)$.

Substituindo (A-5-3) em $v(h, \xi)$ percebe-se que a desutilidade do trabalho é uma função de quatro variáveis, quais sejam, y , a , Ω e ξ . A expansão de Taylor de 2ª ordem desta função é dada por:

$$v(y, a, \Omega, \xi) = v\left(\bar{y}, 1, 1 + \frac{1}{\delta_x}, 0\right) + v_y\left(\bar{y}, 1, 1 + \frac{1}{\delta_x}, 0\right)(y - \bar{y}) +$$

$$\begin{aligned}
& +v_a\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(a-1)+v_\Omega\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)\left(\Omega-\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)\right)+ \\
& +v_\xi\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)\xi+\frac{1}{2}v_{yy}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(y-\bar{y})^2+ \\
& +\frac{1}{2}v_{aa}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(a-1)^2+\frac{1}{2}v_{\Omega\Omega}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)\left(\Omega-\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)\right)^2+ \\
& +\frac{1}{2}v_{\xi\xi}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)\xi^2+v_{ya}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(y-\bar{y})(a-1)+ \\
& +v_{y\Omega}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(y-\bar{y})\left(\Omega-\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)\right)+v_{y\xi}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(y-\bar{y})\xi+ \\
& +v_{a\Omega}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(a-1)\left(\Omega-\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)\right)+v_{a\xi}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(a-1)\xi+ \\
& +v_{\Omega\xi}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)\left(\Omega-\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)\right)\xi+O^3
\end{aligned}$$

O próximo passo é aglutinar todos os termos independentes de política dentro da designação “t.i.p”:

$$\begin{aligned}
v(y,a,\Omega,\xi) & =v_y\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(y-\bar{y})+v_\Omega\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)\left(\Omega-\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)\right)+ \\
& +\frac{1}{2}v_{yy}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(y-\bar{y})^2+\frac{1}{2}v_{\Omega\Omega}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)\left(\Omega-\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)\right)^2+ \\
& +v_{ya}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(y-\bar{y})(a-1)+v_{y\Omega}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(y-\bar{y})\left(\Omega-\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)\right)+ \\
& +v_{y\xi}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(y-\bar{y})\xi+v_{a\Omega}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)(a-1)\left(\Omega-\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)\right)+ \\
& +v_{\Omega\xi}\left(\bar{y},1,1+\frac{1}{\delta_x},0\right)\left(\Omega-\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)\right)\xi+tip+O^3
\end{aligned}$$

Substituindo o valor assumido pelas derivadas relevantes de $v(\dots)$ no ponto de aproximação chega-se a:

$$\begin{aligned}
v(y,a,\Omega,\xi) & = \\
& =\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)v_h\left(\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)\bar{y},0\right)(y-\bar{y})+\bar{y}v_h\left(\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)\bar{y},0\right)\left(\Omega-\left(1+\frac{1}{\delta_x}\right)\right)+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right)^2 \frac{1}{2} v_{hh} \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right) (y - \bar{y})^2 + \\
& + \frac{1}{2} \bar{y}^2 v_{hh} \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right) \left(\Omega - \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \right)^2 + \\
& - \left[\bar{y} \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right)^2 v_{hh} \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right) + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) v_h \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right) \right] (y - \bar{y})(a-1) + \\
& + \left[\bar{y} \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) v_{hh} \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right) + v_h \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right) \right] (y - \bar{y}) \left(\Omega - \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \right) + \\
& + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) v_{h\xi} \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right) (y - \bar{y}) \xi + \\
& - \left[\bar{y}^2 \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) v_{hh} \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right) + \bar{y} v_h \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right) \right] (a-1) \left(\Omega - \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \right) + \\
& + \bar{y} v_{h\xi} \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right) \left(\Omega - \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \right) \xi + tip + O^3
\end{aligned}$$

Colocando $\bar{y} \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) v_h \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right)$ em evidência e utilizando as

definições dos parâmetros θ_h e θ_1 ($\theta_1 = \frac{v_{h\xi}(\bar{h}, 0)}{v_h(\bar{h}, 0)}$) obtém-se:

$$\begin{aligned}
v(y, a, \Omega, \xi) &= \bar{y} \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) v_h \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right) \times \\
& \times \left[\frac{y - \bar{y}}{\bar{y}} + \frac{\Omega - \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}} + \frac{1}{2} \theta_h \left(\frac{y - \bar{y}}{\bar{y}} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta_h \left(\frac{\Omega - \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}} \right)^2 - \right. \\
& \times \left. - (\theta_h + 1) \left(\frac{y - \bar{y}}{\bar{y}} \right) (a-1) + (\theta_h + 1) \left(\frac{y - \bar{y}}{\bar{y}} \right) \left(\frac{\Omega - \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}} \right) + \right. \\
& \left. + \theta_1 \left(\frac{y - \bar{y}}{\bar{y}} \right) \xi - (\theta_h + 1) \left(\frac{\Omega - \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}} \right) (a-1) + \theta_1 \left(\frac{\Omega - \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}} \right) \xi \right] \\
& + tip + O^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(y, a, \Omega, \xi) &= \bar{y} \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) v_h \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right) \times \\
& \times \left[\hat{y} + \hat{\Omega} + \frac{1}{2} \theta_h \hat{y}^2 + \frac{1}{2} \theta_h \hat{\Omega}^2 - (\theta_h + 1) \hat{y} \hat{a} + \right. \\
& \left. + (\theta_h + 1) \hat{y} \hat{\Omega} + \theta_1 \hat{y} \xi - (\theta_h + 1) \hat{\Omega} \hat{a} + \theta_1 \hat{\Omega} \xi \right] \\
& + tip + O^3
\end{aligned} \tag{A-5-6}$$

A aproximação de 1ª ordem de (A-5-3) é:

$$\hat{h} = \hat{y} - \hat{a} + \hat{\Omega} + O^2 \quad (\text{A-5-7})$$

Comparando-se (A-5-7) com (A-4-1) conclui-se que a aproximação de 1ª ordem de Ω é:

$$\hat{\Omega} = -\frac{1-\eta}{\delta_x+1} \hat{\varepsilon} + O^2 \quad (\text{A-5-8})$$

ou seja, contém apenas um termo não nulo (relacionado com o desvio da medida dos termos de troca). Elevando $\hat{\Omega}$ ao quadrado chega-se a:

$$\hat{\Omega}^2 = \left(\frac{1-\eta}{\delta_x+1} \hat{\varepsilon} \right)^2 + O^3$$

Em outras palavras, o quadrado da aproximação de 1ª ordem de $\hat{\Omega}$ é um termo independente de política. O resultado (A-5-8) indica que quaisquer termos envolvendo produtos de $\hat{\Omega}$, \hat{a} e ξ são independentes de política e, portanto, é possível reescrever (A-5-6) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} v(y, a, \Omega, \xi) &= \bar{y} \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) v_h \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \bar{y}, 0 \right) \times \\ &\times \left[\hat{y} + \hat{\Omega} + \frac{1}{2} \theta_h \hat{y}^2 - (\theta_h + 1) \hat{y} \hat{a} - (\theta_h + 1) \frac{1-\eta}{\delta_x+1} \hat{y} \hat{\varepsilon} + \theta_1 \hat{y} \xi \right] + \\ &+ tip + O^3 \end{aligned} \quad (\text{A-5-9})$$

A partir do valor do nível geral de preços no ponto de aproximação chega-se a:

$$\bar{P} = \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \bar{w} = \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \bar{P} \frac{v_h(\bar{h}, 0)}{u_c(\bar{y}, 0)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_c(\bar{y}, 0) &= \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) v_h \left(\bar{y} \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{h}, 0\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{y} u_c(\bar{y}, 0) &= \bar{y} \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) v_h \left(\bar{y} \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{h}, 0\right) \end{aligned}$$

Já estamos aptos a determinar uma expressão simples para o bem estar do agente representativo. Calculando a diferença entre (A-5-1) e (A-5-9) e utilizando o resultado acima é possível executar a seqüência de operações abaixo relacionada:

$$\begin{aligned} u(c, \xi) - v(h, \xi) &= u_c(\bar{y}, 0) \bar{y} \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}(\theta_h - \theta_c) \hat{y}^2 - \theta_c \hat{y} \hat{g} + \alpha_2 \hat{y} \xi - \hat{\Omega} + \dots \\ \dots + (\theta_h + 1) \hat{y} \hat{a} + (\theta_h + 1) \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{y} \hat{e} - \theta_1 \hat{y} \xi \end{array} \right] + tip + O^3 = \\ &= -\frac{u_c(\bar{y}, 0) \bar{y}}{2} \left[(\theta_h - \theta_c) \hat{y}^2 + 2\hat{y} \left(\begin{array}{l} \theta_c \hat{g} + (\theta_1 - \theta_2) \xi + \dots \\ \dots - (\theta_h + 1) \hat{a} - (\theta_h + 1) \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{e} \end{array} \right) + 2\hat{\Omega} \right] + tip + O^3 = \\ &= -\frac{u_c(\bar{y}, 0) \bar{y}}{2} \left[(\theta_h - \theta_c) \hat{y}^2 - 2(\theta_h - \theta_c) \hat{y} \hat{y}^n + 2\hat{\Omega} \right] + tip + O^3 = \\ &= -\frac{u_c(\bar{y}, 0) \bar{y}}{2} \left[(\theta_h - \theta_c) (\hat{y} - \hat{y}^n)^2 + 2\hat{\Omega} \right] + tip + O^3 = \\ &= -\frac{u_c(\bar{y}, 0) \bar{y}}{2} \left[(\theta_h - \theta_c) \hat{x}^2 + 2\hat{\Omega} \right] + tip + O^3 \end{aligned}$$

No terceiro passo dos cálculos aplica-se a definição para o produto potencial da economia doméstica (ver (2-54)). O quarto passo consiste em completar o quadrado dos dois primeiros termos da expressão entre colchetes que resulta do terceiro passo, porém incorporando o fato de que termos envolvendo \hat{y}^n isoladamente são independentes de política. No último passo aplica-se a definição para o hiato do produto ($\hat{x} = \hat{y} - \hat{y}^n$).

7.6.

Aproximação de 2ª ordem da expressão para a medida de dispersão de preços relativos

É conveniente reescrever a expressão para Ω em função de variáveis auxiliares construídas a partir dos preços relativos. Estas variáveis são definidas assim:

$$\tilde{p}_A = p_A^{1/(1-\mu)}, \quad \tilde{p}_B = p_B^{1/(1-\mu)}, \quad \tilde{p}'_A = p'_A^{1/(1-\mu)}, \quad \tilde{p}'_B = p'_B^{1/(1-\mu)}$$

A expressão para Ω se torna:

$$\Omega = \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \eta \left[(1-\alpha) \tilde{p}'_A{}^\mu + \alpha \tilde{p}_A{}^\mu \right] + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon}\right) (1-\eta) \left[(1-\alpha) \tilde{p}'_B{}^\mu + \alpha \tilde{p}_B{}^\mu \right]$$

O lado direito da expressão acima é uma função de \tilde{p}_A , \tilde{p}_B , \tilde{p}'_A , \tilde{p}'_B e ε .

A expressão geral para a sua aproximação de 2ª ordem é:

$$\begin{aligned} f(\tilde{p}_A, \tilde{p}'_A, \tilde{p}_B, \tilde{p}'_B, \varepsilon) &= f^P + \frac{\delta f^P}{\delta \tilde{p}_A} (\tilde{p}_A - 1) + \frac{\delta f^P}{\delta \tilde{p}_B} (\tilde{p}_B - 1) + \frac{\delta f^P}{\delta \tilde{p}'_A} (\tilde{p}'_A - 1) + \\ &+ \frac{\delta f^P}{\delta \tilde{p}'_B} (\tilde{p}'_B - 1) + \frac{\delta f^P}{\delta \varepsilon} (\varepsilon - 1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^P}{\partial \tilde{p}_A^2} (\tilde{p}_A - 1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^P}{\partial \tilde{p}_B^2} (\tilde{p}_B - 1)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^P}{\partial \tilde{p}'_A^2} (\tilde{p}'_A - 1)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^P}{\partial \tilde{p}'_B^2} (\tilde{p}'_B - 1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^P}{\partial \varepsilon^2} (\varepsilon - 1)^2 + \frac{\partial^2 f^P}{\partial \tilde{p}_B \partial \varepsilon} (\tilde{p}_B - 1)(\varepsilon - 1) + \frac{\partial^2 f^P}{\partial \tilde{p}'_B \partial \varepsilon} (\tilde{p}'_B - 1)(\varepsilon - 1) + O^3 \end{aligned}$$

onde o sobrescrito P indica que a função f e suas derivadas parciais foram avaliadas no ponto de aproximação (caracterizado por $\tilde{p}_A = \tilde{p}_B = \tilde{p}'_A = \tilde{p}'_B = \varepsilon = 1$).

Substituindo os resultados destas avaliações obtém-se:

$$\Omega = \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) + \eta \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \alpha \mu (\tilde{p}_A - 1) + \eta \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) (1-\alpha) \mu (\tilde{p}'_A - 1) +$$

$$\begin{aligned}
& + (1-\eta) \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \alpha \mu (\tilde{p}_B - 1) + (1-\eta) \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) (1-\alpha) \mu (\tilde{p}'_B - 1) + \\
& - (1-\eta) \left(\frac{1}{\delta_x}\right) (\varepsilon - 1) + \frac{1}{2} \eta \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \alpha \mu (\mu - 1) (\tilde{p}_A - 1)^2 + \\
& + \frac{1}{2} (1-\eta) \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \alpha \mu (\mu - 1) (\tilde{p}_B - 1)^2 + \frac{1}{2} \eta \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) (1-\alpha) \mu (\mu - 1) (\tilde{p}'_A - 1)^2 + \\
& + \frac{1}{2} (1-\eta) \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) (1-\alpha) \mu (\mu - 1) (\tilde{p}'_B - 1)^2 + (1-\eta) \left(\frac{1}{\delta_x}\right) (\varepsilon - 1)^2 + \\
& - (1-\eta) \left(\frac{1}{\delta_x}\right) \alpha \mu (\tilde{p}_B - 1) (\varepsilon - 1) - (1-\eta) \left(\frac{1}{\delta_x}\right) (1-\alpha) \mu (\tilde{p}'_B - 1) (\varepsilon - 1) + O^3
\end{aligned}$$

O próximo passo é subtrair $1 + \frac{1}{\delta_x}$ de ambos os lados do resultado acima e dividir a expressão resultante pelo mesmo número. A expressão assim obtida possui termos que dependem exclusivamente de $\hat{\varepsilon}$ e que, portanto, são independentes de política. Inserindo os mesmos na categoria “t.i.p” e fazendo algumas simplificações adicionais chega-se a:

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega - \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right)} = \hat{\Omega} = \mu \left[\begin{aligned} & \eta \alpha (\tilde{p}_A - 1) + \eta (1-\alpha) (\tilde{p}'_A - 1) + \\ & + (1-\eta) \alpha (\tilde{p}_B - 1) + (1-\eta) (1-\alpha) (\tilde{p}'_B - 1) \end{aligned} \right] + \\
+ \frac{1}{2} \mu (\mu - 1) \left[\begin{aligned} & \eta \alpha (\tilde{p}_A - 1)^2 + (1-\eta) \alpha (\tilde{p}_B - 1)^2 + \\ & + \eta (1-\alpha) (\tilde{p}'_A - 1)^2 + (1-\eta) (1-\alpha) (\tilde{p}'_B - 1)^2 \end{aligned} \right] + \quad (A-6-1) \\
- \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \mu \left[\alpha (\tilde{p}_B - 1) (\varepsilon - 1) + (1-\alpha) (\tilde{p}'_B - 1) (\varepsilon - 1) \right] + tip + O^3
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da expressão (2-78) por $P^{\frac{1}{(1-\mu)}}$ e escrevendo a expressão resultante em função das variáveis auxiliares definidas anteriormente é possível chegar ao seguinte resultado:

$$1 = \eta \alpha p_A^{\frac{1}{(1-\mu)}} + \eta (1-\alpha) p'_A{}^{\frac{1}{(1-\mu)}} + (1-\eta) \alpha p_B^{\frac{1}{(1-\mu)}} + (1-\eta) (1-\alpha) p'_B{}^{\frac{1}{(1-\mu)}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \eta\alpha\tilde{p}_A + \eta(1-\alpha)\tilde{p}'_A + (1-\eta)\alpha\tilde{p}_B + (1-\eta)(1-\alpha)\tilde{p}'_B - 1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \eta\alpha(\tilde{p}_A - 1) + \eta(1-\alpha)(\tilde{p}'_A - 1) + (1-\eta)\alpha(\tilde{p}_B - 1) + (1-\eta)(1-\alpha)(\tilde{p}'_B - 1) = 0 \end{aligned}$$

Este resultado nos permite eliminar o primeiro termo de (A-6-1), pois o seu valor é zero. Assim sendo:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} = &\frac{1}{2}\mu(\mu-1) \left[\eta\alpha(\tilde{p}_A - 1)^2 + (1-\eta)\alpha(\tilde{p}_B - 1)^2 + \right. \\ &\left. + \eta(1-\alpha)(\tilde{p}'_A - 1)^2 + (1-\eta)(1-\alpha)(\tilde{p}'_B - 1)^2 \right] + \\ &- \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \mu \left[\alpha(\tilde{p}_B - 1)(\varepsilon - 1) + (1-\alpha)(\tilde{p}'_B - 1)(\varepsilon - 1) \right] + tip + O^3 \end{aligned} \quad (\text{A-6-2})$$

Sabe-se ainda que:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_A = p_A^{1/(1-\mu)} &\Rightarrow \tilde{p}_A = 1 + \frac{1}{1-\mu}(p_A - 1) + O^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{p}_A - 1 = \frac{1}{1-\mu}(p_A - 1) + O^2 &\Rightarrow \tilde{p}_A - 1 = \frac{1}{1-\mu}\hat{p}_A + O^2 \end{aligned}$$

e portanto:

$$(\tilde{p}_A - 1)^2 = \left(\frac{1}{\mu - 1} \right)^2 \hat{p}_A^2 + O^3$$

O mesmo argumento pode ser repetido para as demais funções dos preços relativos de cada grupo. Com isto é possível reescrever (A-6-2) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} = &\frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu-1} \left[\eta\alpha\hat{p}_A^2 + (1-\eta)\alpha\hat{p}_B^2 + \eta(1-\alpha)\hat{p}'_A{}^2 + (1-\eta)(1-\alpha)\hat{p}'_B{}^2 \right] + \\ &+ \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \frac{\mu}{\mu-1} \left[\alpha\hat{p}_B\hat{\varepsilon} + (1-\alpha)\hat{p}'_B\hat{\varepsilon} \right] + tip + O^3 \end{aligned} \quad (\text{A-6-3})$$

que é o resultado presente em (2-98).

7.7.

Análise da influência dos choques básicos sobre a taxa de juros natural

Suponha que os choques básicos $\hat{g}_t, \hat{\xi}_t, \hat{\varepsilon}_t$ e \hat{a}_t são processos estocásticos AR-1 com coeficientes auto-regressivos iguais a $\rho_g, \rho_\xi, \rho_\varepsilon$ e ρ_a (que, por hipótese, são números positivos e inferiores à unidade). Para um processo estocástico AR-1 genérico é verdade que:

$$\begin{aligned} \hat{z}_t &= \rho_z \hat{z}_{t-1} + v_{z,t} \Rightarrow \hat{z}_{t+1} = \rho_z \hat{z}_t + v_{z,t+1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_t \hat{z}_{t+1} = \rho_z \hat{z}_t \Rightarrow E_t \hat{z}_{t+1} - \hat{z}_t = (\rho_z - 1) \hat{z}_t \end{aligned} \quad (\text{A-7-1})$$

O resultado acima decorre da hipótese de que $E_t v_{z,t+j} = 0 \quad \forall j > 0$ e permite que reescrevamos a taxa de juros natural da seguinte maneira:

$$\hat{r}_t^n = \theta_c (\rho_g - 1) \hat{g}_t - \theta_2 (\rho_\xi - 1) \hat{\xi}_t - \theta_c (E_t \hat{y}_{t+1}^n - \hat{y}_t^n) \quad (\text{A-7-2})$$

O terceiro termo do lado direito de (A-7-2) depende da surpresa no produto potencial em $t+1$. Esta, por sua vez, pode ser escrita em função de $\hat{g}_t, \hat{\xi}_t, \hat{\varepsilon}_t$ e \hat{a}_t , bastando para isso utilizar (3-28). Repare que:

$$\begin{aligned} E_t \hat{y}_{t+1}^n - \hat{y}_t^n &= \frac{1}{\theta_h - \theta_c} \left[(\theta_h + 1) E_t \hat{a}_{t+1} + (\theta_h + 1) \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} E_t \hat{\varepsilon}_{t+1} - \theta_c E_t \hat{g}_{t+1} - \theta E_t \hat{\xi}_{t+1} \right] - \\ &- \frac{1}{\theta_h - \theta_c} \left[(\theta_h + 1) \hat{a}_t + (\theta_h + 1) \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t - \theta_c \hat{g}_t - \theta \hat{\xi}_t \right] = \\ &= \frac{1}{\theta_h - \theta_c} \left[(\theta_h + 1) (E_t \hat{a}_{t+1} - \hat{a}_t) + (\theta_h + 1) \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} (E_t \hat{\varepsilon}_{t+1} - \hat{\varepsilon}_t) - \right. \\ &\quad \left. - \theta_c (E_t \hat{g}_{t+1} - \hat{g}_t) - \theta (E_t \hat{\xi}_{t+1} - \hat{\xi}_t) \right] = \\ &= \frac{1}{\theta_h - \theta_c} \left[(\theta_h + 1) (\rho_a - 1) \hat{a}_t + (\theta_h + 1) \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} (\rho_\varepsilon - 1) \hat{\varepsilon}_t - \right. \\ &\quad \left. - \theta_c (\rho_g - 1) \hat{g}_t - \theta (\rho_\xi - 1) \hat{\xi}_t \right] \end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima em (A-7-2) chega-se a:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_t^n &= \theta_c (\rho_g - 1) \hat{g}_t - \theta_2 (\rho_\xi - 1) \xi_t - \\
&\quad - \frac{\theta_c}{\theta_h - \theta_c} \left[(\theta_h + 1)(\rho_a - 1) \hat{a}_t + (\theta_h + 1) \frac{1 - \eta}{\delta_x + 1} (\rho_\varepsilon - 1) \hat{\varepsilon}_t - \right. \\
&\quad \left. - \theta_c (\rho_g - 1) \hat{g}_t - \theta (\rho_\xi - 1) \xi_t \right] = \\
&= \frac{\theta_c}{\theta_h - \theta_c} (\theta_h + 1) (1 - \rho_a) \hat{a}_t + \frac{\theta_c}{\theta_h - \theta_c} (\theta_h + 1) \frac{1 - \eta}{\delta_x + 1} (1 - \rho_\varepsilon) \hat{\varepsilon}_t + \\
&\quad + \theta_c \frac{\theta_h}{\theta_h - \theta_c} (\rho_g - 1) \hat{g}_t + \frac{\theta_1 \theta_c - \theta_2 \theta_h}{\theta_h - \theta_c} (\rho_\xi - 1) \xi_t
\end{aligned} \tag{A-7-3}$$

É fácil verificar que, neste caso, um choque favorável de produtividade tende a diminuir a taxa de juros natural (pois $\frac{\theta_c}{\theta_h - \theta_c} (\theta_h + 1) (1 - \rho_a)$ possui o mesmo sinal de θ_c , ou seja, é um número negativo); pelo mesmo motivo um choque que melhore os termos de troca da economia doméstica tende a diminuir \hat{r}_t^n . Um choque positivo de gastos governamentais força um aumento em \hat{r}_t^n , enquanto que um choque $\xi_t > 0$ de preferências tem efeito ambíguo sobre a taxa de juros natural em virtude de $\theta_1 \theta_c - \theta_2 \theta_h$ poder ser positivo ou negativo (o sinal do resultado depende do termo que tem maior magnitude, se $\theta_1 \theta_c$ ou $\theta_2 \theta_h$).

Será útil para os desenvolvimentos posteriores escrever o resultado (A-7-3) no seguinte formato:

$$\hat{r}_t^n = \hat{z}_t + \frac{\theta_c}{\theta_h - \theta_c} (\theta_h + 1) \frac{1 - \eta}{\delta_x + 1} (1 - \rho_\varepsilon) \hat{\varepsilon}_t \tag{A-7-4}$$

onde o processo estocástico \hat{z}_t é um agregado de choques internos, ou seja, intrínsecos à própria economia doméstica, enquanto $\hat{\varepsilon}_t$ é um choque externo (pois reflete alterações nos preços internacionais dos insumos).

Também será útil reescrever \hat{z}_t da seguinte maneira:

$$\hat{z}_t = \hat{z}'_t + \frac{\theta_h \theta_c}{\theta_h - \theta_c} (\rho_g - 1) \hat{g}_t \tag{A-7-5}$$

onde separamos o choque de gastos governamentais \hat{g}_t . Assim sendo, é possível escrever a taxa de juros natural de duas maneiras diferentes:

$$\hat{r}_t^n = \hat{z}_t + B\hat{\varepsilon}_t \quad (\text{A-7-6})$$

$$\hat{r}_t^n = \hat{z}_t + B'\hat{g}_t + B\hat{\varepsilon}_t \quad (\text{A-7-7})$$

onde:

$$B = \frac{\theta_c}{\theta_h - \theta_c} (\theta_h + 1) \frac{1 - \eta}{\delta_x + 1} (1 - \rho_\varepsilon) \quad (\text{A-7-8})$$

$$B' = \frac{\theta_h \theta_c}{\theta_h - \theta_c} (\rho_g - 1) \quad (\text{A-7-9})$$

7.8. Derivação da curva de Phillips

É conveniente para a álgebra que se segue introduzir a notação abaixo:

$$\hat{s}_t = \text{desv}(s_t) = \frac{s_t - \bar{s}}{\bar{s}}$$

Utilizando esta notação é possível escrever (3-33) na forma de desvios com relação a valores assumidos em *steady-state*:

$$\begin{aligned} \text{desv}(P_{z,t}) &= \\ &= \hat{P}_{z,t} = E_t \left(\text{desv} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j u_c(y_{t+j} - g_{t+j}, \xi_{t+j}) y_{t+j} P_{t+j}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+j} + P_{S,t+j}}{a_{t+j}} \right) \right\} \right) - \\ &- E_t \left(\text{desv} \left\{ \sum_{\tau=t}^{\infty} (\alpha\beta)^j u_c(y_{t+j} - g_{t+j}, \xi_{t+j}) y_{t+j} P_{t+j}^{\frac{1}{\mu-1}} \right\} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-8-1})$$

onde $S = X (Y)$ se a z -ésima firma pertence ao sub-setor A (B) de SBC. Em primeiro lugar vamos calcular o resultado final para o primeiro termo do lado direito da expressão acima:

$$\begin{aligned}
 & \text{desv} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j u_c(y_{t+j} - g_{t+j}, \xi_{t+j}) y_{t+j} P_{t+j}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+j} + P_{S,t+j}}{a_{t+j}} \right) \right\} = \dots \\
 & \dots = \text{desv} \left(\begin{aligned} & u_c(y_t - g_t, \xi_t) y_t P_t^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_t + P_{S,t}}{a_t} \right) + \dots \\ & \dots + \alpha\beta u_c(y_{t+1} - g_{t+1}, \xi_{t+1}) y_{t+1} P_{t+1}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+1} + P_{S,t+1}}{a_{t+1}} \right) + \dots \\ & \dots + (\alpha\beta)^2 u_c(y_{t+2} - g_{t+2}, \xi_{t+2}) y_{t+2} P_{t+2}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+2} + P_{S,t+2}}{a_{t+2}} \right) + \dots \end{aligned} \right) = \dots
 \end{aligned}$$

Usando o resultado abaixo:

$$\begin{aligned}
 & \text{desv}(f(x) + g(y)) = \\
 & = \frac{f(\bar{x})}{f(\bar{x}) + g(\bar{y})} \text{desv}(f(x)) + \frac{g(\bar{y})}{f(\bar{x}) + g(\bar{y})} \text{desv}(g(y)) + O^2 \quad (\text{A-8-2})
 \end{aligned}$$

é possível escrever:

$$\begin{aligned}
 & \text{desv} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j u_c(y_{t+j} - g_{t+j}, \xi_{t+j}) y_{t+j} P_{t+j}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+j} + P_{S,t+j}}{a_{t+j}} \right) \right\} = \\
 & = \frac{u_c(\bar{y}, 0) \bar{y} \bar{P}^{\frac{1}{\mu-1}} (\bar{w} + \bar{P}_S)}{u_c(\bar{y}, 0) \bar{y} \bar{P}^{\frac{1}{\mu-1}} (\bar{w} + \bar{P}_S) + \alpha\beta u_c(\bar{y}, 0) \bar{y} \bar{P}^{\frac{1}{\mu-1}} (\bar{w} + \bar{P}_S) + (\alpha\beta)^2 u_c(\bar{y}, 0) \bar{y} \bar{P}^{\frac{1}{\mu-1}} (\bar{w} + \bar{P}_S) + \dots} \times \\
 & \times \left[\begin{aligned} & \text{desv} \left(u_c(y_t - g_t, \xi_t) y_t P_t^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_t + P_{S,t}}{a_t} \right) \right) + \\ & + \alpha\beta \text{desv} \left(u_c(y_{t+1} - g_{t+1}, \xi_{t+1}) y_{t+1} P_{t+1}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+1} + P_{S,t+1}}{a_{t+1}} \right) \right) + \\ & + (\alpha\beta)^2 \text{desv} \left(u_c(y_{t+2} - g_{t+2}, \xi_{t+2}) y_{t+2} P_{t+2}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+2} + P_{S,t+2}}{a_{t+2}} \right) \right) + \dots \end{aligned} \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2 + \dots} \times \left[\begin{aligned} &desv \left(u_c(y_t - g_t, \xi_t) y_t P_t^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_t + P_{S,t}}{a_t} \right) \right) + \\ &+ \alpha\beta desv \left(u_c(y_{t+1} - g_{t+1}, \xi_{t+1}) y_{t+1} P_{t+1}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+1} + P_{S,t+1}}{a_{t+1}} \right) \right) + \\ &+ (\alpha\beta)^2 desv \left(u_c(y_{t+2} - g_{t+2}, \xi_{t+2}) y_{t+2} P_{t+2}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+2} + P_{S,t+2}}{a_{t+2}} \right) \right) + \dots \end{aligned} \right] = \\
&= (1 - \alpha\beta) \left[\begin{aligned} &desv \left(u_c(y_t - g_t, \xi_t) y_t P_t^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_t + P_{S,t}}{a_t} \right) \right) + \\ &+ \alpha\beta desv \left(u_c(y_{t+1} - g_{t+1}, \xi_{t+1}) y_{t+1} P_{t+1}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+1} + P_{S,t+1}}{a_{t+1}} \right) \right) + \\ &+ (\alpha\beta)^2 desv \left(u_c(y_{t+2} - g_{t+2}, \xi_{t+2}) y_{t+2} P_{t+2}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+2} + P_{S,t+2}}{a_{t+2}} \right) \right) + \dots \end{aligned} \right] = \\
&= (1 - \alpha\beta) \sum_{j=0}^{\infty} \left[(\alpha\beta)^j desv \left(u_c(y_{t+j} - g_{t+j}, \xi_{t+j}) y_{t+j} P_{t+j}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+j} + P_{S,t+j}}{a_{t+j}} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

Calcula-se o segundo termo do lado direito de (A-8-1) de forma análoga, chegando-se a:

$$\begin{aligned}
&desv \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j u_c(y_{t+j} - g_{t+j}, \xi_{t+j}) y_{t+j} P_{t+j}^{\frac{1}{\mu-1}} \right\} = \\
&= (1 - \alpha\beta) \sum_{j=0}^{\infty} \left[(\alpha\beta)^j desv \left(u_c(y_{t+j} - g_{t+j}, \xi_{t+j}) y_{t+j} P_{t+j}^{\frac{1}{\mu-1}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Logo (A-8-1) pode ser simplificada para:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{z,t} &= E_t \left(desv \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j u_c(y_{t+j} - g_{t+j}, \xi_{t+j}) y_{t+j} P_{t+j}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+j} + P_{S,t+j}}{a_{t+j}} \right) \right\} \right) - \\
&- E_t \left(desv \left\{ \sum_{\tau=t}^{\infty} (\alpha\beta)^j u_c(y_{t+j} - g_{t+j}, \xi_{t+j}) y_{t+j} P_{t+j}^{\frac{1}{\mu-1}} \right\} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left[(\alpha\beta)^j \operatorname{desv} \left(u_c \left(y_{t+j} - g_{t+j}, \xi_{t+j} \right) y_{t+j} P_{t+j}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+j} + P_{S,t+j}}{a_{t+j}} \right) \right) \right] \right\} - \\
&- (1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left[(\alpha\beta)^j \operatorname{desv} \left(u_c \left(y_{t+j} - g_{t+j}, \xi_{t+j} \right) y_{t+j} P_{t+j}^{\frac{1}{\mu-1}} \right) \right] \right\} = \\
&= (1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left[(\alpha\beta)^j \operatorname{desv} \left(\frac{w_{t+j} + P_{S,t+j}}{a_{t+j}} \right) \right] \right\} \tag{A-8-3}
\end{aligned}$$

O resultado acima faz uso da seguinte fórmula:

$$\operatorname{desv}(f(x) \times g(y)) = \operatorname{desv}(f(x)) + \operatorname{desv}(g(y)) + O^2 \tag{A-8-4}$$

para escrever:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{desv} \left(u_c \left(y_{t+j} - g_{t+j}, \xi_{t+j} \right) y_{t+j} P_{t+j}^{\frac{1}{\mu-1}} \left(\frac{w_{t+j} + P_{S,t+j}}{a_{t+j}} \right) \right) = \dots \\
&\dots = \operatorname{desv} \left(u_c \left(y_{t+j} - g_{t+j}, \xi_{t+j} \right) y_{t+j} P_{t+j}^{\frac{1}{\mu-1}} \right) + \operatorname{desv} \left(\frac{w_{t+j} + P_{S,t+j}}{a_{t+j}} \right)
\end{aligned}$$

Observando (A-8-3) conclui-se que $\hat{P}_{z,t}$ só depende de variáveis comuns a todas as firmas, a saber, desvios do salário nominal, do preço do insumo e da produtividade das firmas de SBC. Logo é possível retirar a dependência com relação a z e escrever as seguintes expressões para os desvios dos preços ótimos escolhidos pelas firmas dos sub-setores A e B (denotados por $\hat{P}_{A,t}^{\bullet}$ e $\hat{P}_{B,t}^{\bullet}$, respectivamente):

$$\hat{P}_{A,t}^{\bullet} = (1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left[(\alpha\beta)^j \operatorname{desv} \left(\frac{w_{t+j} + P_{X,t+j}}{a_{t+j}} \right) \right] \right\} \tag{A-8-5}$$

$$\hat{P}_{B,t}^{\bullet} = (1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left[(\alpha\beta)^j \operatorname{desv} \left(\frac{w_{t+j} + P_{Y,t+j}}{a_{t+j}} \right) \right] \right\} \tag{A-8-6}$$

Essas expressões podem ser escritas como se segue:

$$\hat{P}_{A,t}^* = (1-\alpha\beta)E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j (\hat{P}_{t+j} + desv(w_{t+j}^r + p_{X,t+j}) - \hat{a}_{t+j})] \right\} \quad (\text{A-8-7})$$

$$\hat{P}_{B,t}^* = (1-\alpha\beta)E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j (\hat{P}_{t+j} + desv(w_{t+j}^r + p_{Y,t+j}) - \hat{a}_{t+j})] \right\} \quad (\text{A-8-8})$$

A expressão para o nível geral de preços P_t pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P_t^{1/(1-\mu)} &= \int_0^1 P_t(z)^{1/(1-\mu)} dz = \int_{fix} P_t(z)^{1/(1-\mu)} dz + \int_{flex} P_t(z)^{1/(1-\mu)} dz = \\ &= \int_{fix} P_t(z)^{1/(1-\mu)} dz + \int_{flex^A} P_t(z)^{1/(1-\mu)} dz + \int_{flex^B} P_t(z)^{1/(1-\mu)} dz \end{aligned}$$

onde *fix* designa o conjunto formado pelas firmas de SBC que são obrigadas a manter o mesmo preço praticado no período anterior e *flex^A* (*flex^B*) identifica o conjunto de firmas de A (B) que podem escolher novos preços no período corrente. Levando em consideração que as firmas em *fix* continuam cobrando o preço vigente no período $t-1$, que as firmas em *flex^A* e *flex^B* escolhem preços iguais e que a medida desses conjuntos é igual a α , $(1-\alpha)\eta$ e $(1-\alpha)(1-\eta)$, é possível escrever o resultado anterior da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_t^{1/(1-\mu)} &= \int_{fix} P_{t-1}(z)^{1/(1-\mu)} dz + \int_{flex^A} P_{A,t}^*{}^{1/(1-\mu)} dz + \int_{flex^B} P_{B,t}^*{}^{1/(1-\mu)} dz = \\ &= \alpha P_{t-1}^{1/(1-\mu)} + P_{A,t}^*{}^{1/(1-\mu)} \int_{flex^A} dz + P_{B,t}^*{}^{1/(1-\mu)} \int_{flex^B} dz = \\ &= \alpha P_{t-1}^{1/(1-\mu)} + (1-\alpha)\eta P_{A,t}^*{}^{1/(1-\mu)} + (1-\alpha)(1-\eta) P_{B,t}^*{}^{1/(1-\mu)} \end{aligned}$$

O resultado acima também decorre da Lei dos Grandes Números. Com efeito, é ela que permite dizer que o nível geral de preços em $t-1$, quando calculado somente a partir de firmas do conjunto *fix*, é o mesmo que seria obtido caso calculássemos este indicador tomando firmas do contínuo $[0,1]$ como um

todo. É essencial para esta conclusão a aleatoriedade do sorteio que define quem reajusta ou não.

A expressão final para P_t como função de P_{t-1} , $P_{A,t}^\bullet$ e $P_{B,t}^\bullet$ é, portanto:

$$P_t^{1/(1-\mu)} = \alpha P_{t-1}^{1/(1-\mu)} + (1-\alpha)\eta P_{A,t}^{\bullet 1/(1-\mu)} + (1-\alpha)(1-\eta) P_{B,t}^{\bullet 1/(1-\mu)} \quad (\text{A-8-9})$$

A equação (A-8-9), ao ser linearizada, se transforma em:

$$\hat{P}_t = \alpha \hat{P}_{t-1} + (1-\alpha)\eta \hat{P}_{A,t}^\bullet + (1-\alpha)(1-\eta) \hat{P}_{B,t}^\bullet \quad (\text{A-8-10})$$

Para chegar ao resultado acima utilizamos (A-8-4) juntamente com:

$$desv(x^a) = a \cdot desv(x) + O^2 \quad (\text{A-8-11})$$

$$desv(ax) = desv(x) = \hat{x} \quad (\text{A-8-12})$$

A equação (A-8-10) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\hat{\pi}_t = (1-\alpha) \left[\eta \hat{P}_{A,t}^\bullet + (1-\eta) \hat{P}_{B,t}^\bullet - \hat{P}_{t-1} \right] \quad (\text{A-8-13})$$

bastando para isso subtrair \hat{P}_{t-1} de ambos os lados e reconhecer que $\hat{P}_t - \hat{P}_{t-1} = \hat{\pi}_t$.

O próximo passo é substituir (A-8-7) e (A-8-8) em (A-8-13) para obter:

$$\hat{\pi}_t = (1-\alpha) \left[\begin{aligned} & \eta(1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j (\hat{P}_{t+j} + desv(w_{t+j}^r + p_{X,t+j}) - \hat{a}_{t+j})] \right\} + \\ & + (1-\eta)(1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j (\hat{P}_{t+j} + desv(w_{t+j}^r + p_{Y,t+j}) - \hat{a}_{t+j})] \right\} - \\ & - (1-\alpha\beta) \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \hat{P}_{t-1} \end{aligned} \right]$$

onde utilizamos o fato de \hat{P}_{t-1} ser igual a $(1-\alpha\beta)\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha\beta)^j\hat{P}_{t-1}$. Coletando termos

comuns chega-se a:

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_t &= (1-\alpha)(1-\alpha\beta)E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}[(\alpha\beta)^j(\hat{P}_{t+j}-\hat{P}_{t-1})]\right\}+ \\ &+ (1-\alpha)\eta(1-\alpha\beta)E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}[(\alpha\beta)^j\text{desv}(w_{t+j}^r+p_{X,t+j})]\right\}+ \\ &+ (1-\alpha)(1-\eta)(1-\alpha\beta)E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}[(\alpha\beta)^j\text{desv}(w_{t+j}^r+p_{Y,t+j})]\right\}- \\ &- (1-\alpha)(1-\alpha\beta)E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty}[(\alpha\beta)^j\hat{a}_{t+j}]\right\}\end{aligned}\tag{A-8-14}$$

Porém, ao menos em uma aproximação de 1ª ordem, é verdade que:

$$\hat{P}_{t+j}-\hat{P}_{t-1}=\text{desv}\left(\frac{P_{t+j}}{P_{t-1}}\right)=\text{desv}\left(\frac{P_{t+j}}{P_{t+j-1}}\frac{P_{t+j-1}}{P_{t+j-2}}\dots\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)=\text{desv}\left(\prod_{k=0}^j\pi_{t+k}\right)=\sum_{k=0}^j\hat{\pi}_{t+k}$$

O resultado acima permite escrever o primeiro termo de (A-8-14) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}[(\alpha\beta)^j(\hat{P}_{t+j}-\hat{P}_{t-1})] &= \sum_{j=0}^{\infty}\left[(\alpha\beta)^j\sum_{k=0}^j\hat{\pi}_{t+k}\right]= \\ &= \hat{\pi}_t+\alpha\beta(\hat{\pi}_t+\hat{\pi}_{t+1})+(\alpha\beta)^2(\hat{\pi}_t+\hat{\pi}_{t+1}+\hat{\pi}_{t+2})+\dots= \\ &= (1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2+\dots)\hat{\pi}_t+(\alpha\beta+(\alpha\beta)^2+\dots)\hat{\pi}_{t+1}+((\alpha\beta)^2+\dots)\hat{\pi}_{t+2}+\dots= \\ &= (1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2+\dots)(\hat{\pi}_t+\alpha\beta\hat{\pi}_{t+1}+(\alpha\beta)^2\hat{\pi}_{t+2}+\dots)= \\ &= \frac{1}{1-\alpha\beta}\sum_{j=0}^{\infty}\hat{\pi}_{t+j}\end{aligned}$$

Com este resultado (A-8-14) se transforma em:

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_t &= (1-\alpha) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \hat{\pi}_{t+j} \right\} + \dots \\
&+ (1-\alpha)\eta(1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j \text{desv}(w_{t+j}^r + p_{X,t+j})] \right\} + \\
&+ (1-\alpha)(1-\eta)(1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j \text{desv}(w_{t+j}^r + p_{Y,t+j})] \right\} - \\
&- (1-\alpha)(1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j \hat{a}_{t+j}] \right\}
\end{aligned} \tag{A-8-15}$$

Separando os termos correspondentes a $j=0$ dos demais é imediato escrever (A-8-15) como se segue:

$$\begin{aligned}
\alpha\hat{\pi}_t &= (1-\alpha)\eta(1-\alpha\beta) \text{desv}(w_t^r + p_{X,t}) + \\
&+ (1-\alpha)(1-\eta)(1-\alpha\beta) \text{desv}(w_t^r + p_{Y,t}) - \\
&- (1-\alpha)(1-\alpha\beta)\hat{a}_t + (1-\alpha) E_t \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha\beta)^j \hat{\pi}_{t+j} \right\} + \\
&+ (1-\alpha)\eta(1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [(\alpha\beta)^j \text{desv}(w_{t+j}^r + p_{X,t+j})] \right\} + \\
&+ (1-\alpha)(1-\eta)(1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [(\alpha\beta)^j \text{desv}(w_{t+j}^r + p_{Y,t+j})] \right\} - \\
&- (1-\alpha)(1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [(\alpha\beta)^j \hat{a}_{t+j}] \right\}
\end{aligned} \tag{A-8-16}$$

Avaliando (A-8-15) em $t+1$ resulta em:

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_{t+1} &= (1-\alpha) E_{t+1} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \hat{\pi}_{t+j+1} \right\} + \\
&+ (1-\alpha)\eta(1-\alpha\beta) E_{t+1} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j \text{desv}(w_{t+j+1}^r + p_{X,t+j+1})] \right\} + \\
&+ (1-\alpha)(1-\eta)(1-\alpha\beta) E_{t+1} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j \text{desv}(w_{t+j+1}^r + p_{Y,t+j+1})] \right\} - \\
&- (1-\alpha)(1-\alpha\beta) E_{t+1} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j \hat{a}_{t+j+1}] \right\}
\end{aligned}$$

A seqüência de operações que detalhamos a seguir corresponde a uma troca de variáveis ($k = j+1$), seguida da multiplicação do resultado por $\alpha\beta$ e do cálculo do valor esperado, em t , da equação que resulta deste procedimento:

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_{t+1} &= (1-\alpha) E_{t+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha\beta)^{k-1} \hat{\pi}_{t+k} \right\} + \\
&+ (1-\alpha)\eta(1-\alpha\beta) E_{t+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [(\alpha\beta)^{k-1} \text{desv}(w_{t+k}^r + p_{X,t+k})] \right\} + \\
&+ (1-\alpha)(1-\eta)(1-\alpha\beta) E_{t+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [(\alpha\beta)^{k-1} \text{desv}(w_{t+k}^r + p_{Y,t+k})] \right\} - \\
&- (1-\alpha)(1-\alpha\beta) E_{t+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [(\alpha\beta)^{k-1} \hat{a}_{t+k}] \right\} \\
\alpha\beta\hat{\pi}_{t+1} &= (1-\alpha) E_{t+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha\beta)^k \hat{\pi}_{t+k} \right\} + \\
&+ (1-\alpha)\eta(1-\alpha\beta) E_{t+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [(\alpha\beta)^k \text{desv}(w_{t+k}^r + p_{X,t+k})] \right\} + \\
&+ (1-\alpha)(1-\eta)(1-\alpha\beta) E_{t+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [(\alpha\beta)^k \text{desv}(w_{t+k}^r + p_{Y,t+k})] \right\} - \\
&- (1-\alpha)(1-\alpha\beta) E_{t+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [(\alpha\beta)^k \hat{a}_{t+k}] \right\} \\
\alpha\beta E_t \hat{\pi}_{t+1} &= (1-\alpha) E_t \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha\beta)^k \hat{\pi}_{t+k} \right\} + \\
&+ (1-\alpha)\eta(1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [(\alpha\beta)^k \text{desv}(w_{t+k}^r + p_{X,t+k})] \right\} + \\
&+ (1-\alpha)(1-\eta)(1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [(\alpha\beta)^k \text{desv}(w_{t+k}^r + p_{Y,t+k})] \right\} - \\
&- (1-\alpha)(1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [(\alpha\beta)^k \hat{a}_{t+k}] \right\}
\end{aligned} \tag{A-8-17}$$

O último passo decorre da Lei das Expectativas Iteradas. Repare que os últimos quatro termos de (A-8-16) são idênticos à expressão encontrada para $\alpha\beta E_t \hat{\pi}_{t+1}$, dada por (A-8-17). Fazendo a substituição chega-se, após algumas simplificações adicionais, ao seguinte resultado:

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{\alpha} \left[\eta \text{desv}(w_t^r + p_{X,t}) + (1-\eta) \text{desv}(w_t^r + p_{Y,t}) - \hat{a}_t \right] \quad (\text{A-8-18})$$

que é a versão primitiva da Curva de Phillips neo-keynesiana discutida na Seção 3.3. Nela, a taxa de inflação no instante t depende das expectativas, formadas no mesmo momento, acerca do valor desta variável em $t+1$ e do custo marginal real das firmas de SBC. Refletindo o fato delas se dividirem em dois sub-setores, a dependência com relação ao custo marginal real é traduzida por um termo envolvendo a soma ponderada dos custos marginais reais em cada sub-setor. O peso da contribuição de cada sub-setor, por sua vez, depende da sua importância relativa, medida pelo parâmetro η .

O próximo passo é converter o resultado (A-8-18) para um formato relacionando a inflação corrente com as expectativas acerca da sua trajetória no futuro e alguma medida do nível de atividade. O ponto de partida para isso é traduzir (2-2) para o contexto de um modelo dinâmico e calcular a aproximação de 1ª ordem da expressão obtida. O resultado é:

$$\begin{aligned} P_{X,t} = \frac{w_t}{\delta_x} &\Rightarrow p_{X,t} = \frac{w_t^r}{\delta_x} \Rightarrow w_t^r + p_{X,t} = \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) w_t^r \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{desv}(w_t^r + p_{X,t}) = \hat{w}_t^r \end{aligned} \quad (\text{A-8-19})$$

O último passo envolve a aplicação de (A-8-12). Adota-se um procedimento análogo para (2-26) a fim de obter:

$$\begin{aligned} P_{Y,t} = \frac{P_{X,t}}{\lambda_t \varepsilon_t} &\Rightarrow p_{Y,t} = \frac{P_{X,t}}{\lambda_t \varepsilon_t} \Rightarrow w_t^r + p_{Y,t} = w_t^r + \frac{P_{X,t}}{\lambda_t \varepsilon_t} = \left(1 + \frac{1}{\delta_x \lambda_t \varepsilon_t}\right) w_t^r \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{desv}(w_t^r + p_{Y,t}) = \text{desv}\left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x \lambda_t \varepsilon_t}\right) w_t^r\right) = \text{desv}\left(1 + \frac{1}{\delta_x \lambda_t \varepsilon_t}\right) + \hat{w}_t^r = \\ &= -\frac{(\hat{\varepsilon}_t + \hat{\lambda}_t)}{\delta_x + 1} + \hat{w}_t^r \Rightarrow \text{desv}(w_t^r + p_{Y,t}) = \hat{w}_t^r - \frac{(\hat{\varepsilon}_t + \hat{\lambda}_t)}{\delta_x + 1} \end{aligned} \quad (\text{A-8-20})$$

Substituindo (A-8-19) e (A-8-20) em (A-8-18) chega-se a:

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{\alpha} \left[\hat{w}_t^r - \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} (\hat{\lambda}_t + \hat{\varepsilon}_t) - \hat{a}_t \right] \quad (\text{A-8-21})$$

Resta agora encontrar uma expressão que ligue o desvio do salário real ao que ocorre com o nível de atividade. Uma versão dinâmica de (2-28), repetida abaixo por conveniência, será o nosso ponto de partida:

$$h_t = \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) h_{A,t} + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t} \right) h_{B,t} \quad (\text{A-8-22})$$

A quantidade de horas utilizada por uma firma de SBC, denotada por $h_t(z)$, é dada por:

$$h_t(z) = \frac{y_t(z)}{a_t} = \frac{y_t}{a_t} \left(\frac{P_t(z)}{P_t} \right)^{\mu/(1-\mu)} = \frac{y_t}{a_t} p_t(z)^{\mu/(1-\mu)} \quad (\text{A-8-23})$$

O resultado acima é consequência direta da tecnologia aplicada pelas firmas de SBC, do formato da curva de demanda do z -ésimo bem (ver (2-10)) e da seguinte definição:

$$p_t(z) = \frac{P_t(z)}{P_t} \quad (\text{A-8-24})$$

A variável $p_t(z)$, portanto, indica o preço relativo da z -ésima firma de SBC. O número de horas de trabalho utilizadas em cada sub-setor de SBC é:

$$h_{A,t} = \int_0^\eta h_t(z) dz = \frac{y_t}{a_t} \int_0^\eta p_t(z)^{\mu/(1-\mu)} dz$$

$$h_{B,t} = \int_\eta^1 h_t(z) dz = \frac{y_t}{a_t} \int_\eta^1 p_t(z)^{\mu/(1-\mu)} dz$$

Desta maneira, (A-8-22) pode ser reescrita como se segue:

$$h_t = \frac{y_t}{a_t} \left[\left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \int_0^\eta p_t(z)^{\mu/(1-\mu)} dz + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t} \right) \int_\eta^1 p_t(z)^{\mu/(1-\mu)} dz \right] \quad (\text{A-8-25})$$

Conforme já ocorria na análise do modelo estático, é conveniente definir uma variável que mede a dispersão de preços relativos observada em SBC:

$$\Omega_t = \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \int_0^\eta p_t(z)^{\mu/(1-\mu)} dz + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t} \right) \int_\eta^1 p_t(z)^{\mu/(1-\mu)} dz \quad (\text{A-8-26})$$

Com ela podemos escrever (A-8-25) assim:

$$h_t = \frac{y_t}{a_t} \Omega_t \quad (\text{A-8-27})$$

A aproximação de 1ª ordem da equação acima é:

$$\hat{h}_t = \hat{y}_t - \hat{a}_t + \hat{\Omega}_t \quad (\text{A-8-28})$$

Este resultado foi obtido utilizando-se (A-8-4). O próximo passo é calcular uma aproximação de 1ª ordem de (A-8-26). Em primeiro lugar defina a seguinte variável auxiliar:

$$\tilde{p}_t(z) = p_t(z)^{1/(1-\mu)} \quad (\text{A-8-29})$$

e a utilize para reescrever (A-8-26) da maneira que se segue:

$$\Omega_t = \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \int_0^\eta \tilde{p}_t(z)^\mu dz + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t} \right) \int_\eta^1 \tilde{p}_t(z)^\mu dz \quad (\text{A-8-30})$$

Repare que, em *steady-state*, o valor assumido pela medida de dispersão de preços relativos é:

$$\bar{\Omega} = 1 + \frac{1}{\delta_x}$$

Para calcular $desv(\Omega_t) = \frac{\Omega_t - \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}}$ note que:

$$\tilde{p}_t(z)^\mu = 1 + \left[\mu \tilde{p}_t(z)^{\mu-1} \right]_{SS} (\tilde{p}_t(z) - 1) + O^2 = 1 + \mu(\tilde{p}_t(z) - 1) + O^2$$

e também que:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t}\right) \tilde{p}_t(z)^\mu &= \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) + \left[\left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t}\right) \mu \tilde{p}_t(z)^{\mu-1} \right]_{SS} (\tilde{p}_t(z) - 1) + \\ &+ \left[\left(-\frac{1}{\delta_x \varepsilon_t^2}\right) \tilde{p}_t(z)^\mu \right]_{SS} (\varepsilon_t - 1) + O^2 = \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \mu (\tilde{p}_t(z) - 1) - \\ &-\frac{1}{\delta_x} (\varepsilon_t - 1) + O^2 \end{aligned}$$

onde a notação $f|_{ss}$ indica que estamos avaliando a função f no *steady-state* dado por (3-12) a (3-17) e (3-34). Substituindo os dois últimos resultados em (A-8-30) obtém-se:

$$\begin{aligned} \Omega_t &= \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \int_0^\eta [1 + \mu(\tilde{p}_t(z) - 1) + O^2] dz + \\ &+ \int_\eta^1 \left[\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \mu (\tilde{p}_t(z) - 1) - \frac{1}{\delta_x} (\varepsilon_t - 1) + O^2 \right] dz \end{aligned} \quad (\text{A-8-31})$$

Desenvolvendo (A-8-31) chega-se a:

$$\begin{aligned} \Omega_t &= \eta \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \mu \int_0^\eta (\tilde{p}_t(z) - 1) dz + (1 - \eta) \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \mu \int_\eta^1 (\tilde{p}_t(z) - 1) dz - \frac{1 - \eta}{\delta_x + 1} (\varepsilon_t - 1) + O^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Omega_t = \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \mu \int_0^1 (\tilde{p}_t(z) - 1) dz - \frac{1-\eta}{\delta_x+1} (\varepsilon_t - 1) + O^2 \quad (\text{A-8-32})$$

Porém é verdade que:

$$\begin{aligned} P_t^{1/(1-\mu)} &= \int_0^1 P_t(z)^{1/(1-\mu)} dz \Rightarrow 1 = \int_0^1 p_t(z)^{1/(1-\mu)} dz \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 = \int_0^1 \tilde{p}_t(z) dz \Rightarrow \int_0^1 (\tilde{p}_t(z) - 1) dz = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-8-33})$$

Para obter o resultado acima utilizamos as definições para o nível geral de preços P_t e para a variável auxiliar $\tilde{p}_t(z)$.

O último passo deste procedimento é substituir (A-8-33) em (A-8-32) para, após mais alguma álgebra, chegar a:

$$\hat{\Omega}_t = \frac{\Omega_t - \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right)}{1 + \frac{1}{\delta_x}} = -\frac{1-\eta}{\delta_x+1} \hat{\varepsilon}_t + O^2 \quad (\text{A-8-34})$$

Conclui-se que choques exógenos que atingem igualmente todas as firmas de SBC não afetam a aproximação de 1ª ordem da medida de dispersão de preços relativos; esta só se altera quando a economia doméstica é atingida pelo choque nos termos de troca $\hat{\varepsilon}_t$ que, obviamente, atinge os sub-setores A e B de forma diferenciada.

Substituindo (A-8-34) em (A-8-28) e, em seguida, substituindo o resultado em (3-22) chega-se à seguinte expressão para o desvio do salário real:

$$\hat{w}_t^r = (\theta_h - \theta_c) \hat{y}_t - \theta_h \hat{a}_t - \theta_h \frac{1-\eta}{\delta_x+1} \hat{\varepsilon}_t + \theta_c \hat{g}_t + \theta_c \xi_t \quad (\text{A-8-35})$$

Finalmente substitui-se (A-8-35) em (A-8-21) e simplifica-se a expressão resultante utilizando as definições (3-28) e (3-37) para o produto potencial e o hiato do produto:

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_t &= \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{\alpha} \left[(\theta_h - \theta_c) \hat{y}_t - (\theta_h + 1) \hat{a}_t - (\theta_h + 1) \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t + \right. \\
&\quad \left. + \theta_c \hat{g}_t + \theta \xi_t - \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\lambda}_t \right] = \\
&= \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{\alpha} \left[(\theta_h - \theta_c) (\hat{y}_t - \hat{y}_t^n) - \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\lambda}_t \right] = \\
&= \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{\alpha} \left[(\theta_h - \theta_c) \hat{x}_t - \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\lambda}_t \right] = \\
&= \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \gamma (\theta_h - \theta_c) \hat{x}_t - \gamma \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\lambda}_t
\end{aligned}$$

onde:

$$\gamma = \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{\alpha}$$

O resultado final é a versão da Curva de Phillips neo-keynesiana que será largamente utilizada ao longo deste trabalho:

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \gamma (\theta_h - \theta_c) \hat{x}_t - \gamma \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\lambda}_t \quad (\text{A-8-36})$$

7.9.

Derivação das curvas de Phillips sub-setoriais

Utilizando as definições (3-42) e (3-43) para os agregados sub-setoriais de preços é possível reescrever a equação para o nível geral de preços como se segue:

$$P_t^{1/(1-\mu)} = \eta P_{A,t}^{1/(1-\mu)} + (1-\eta) P_{B,t}^{1/(1-\mu)} \quad (\text{A-9-1})$$

Substituindo os resultados (A-8-19) e (A-8-20) nas expressões já linearizadas para os preços ótimos escolhidos pelas firmas que reajustam (ver (A-8-7) e (A-8-8)) chega-se a:

$$\hat{P}_{A,t}^* = (1 - \alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j (\hat{P}_{t+j} + \hat{w}_{t+j}^r - \hat{a}_{t+j})] \right\} \quad (\text{A-9-2})$$

$$\hat{P}_{B,t}^* = (1 - \alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j \left(\hat{P}_{t+j} + \hat{w}_{t+j}^r - \frac{(\hat{\varepsilon}_{t+j} + \hat{\lambda}_{t+j})}{\delta_x + 1} - \hat{a}_{t+j} \right)] \right\} \quad (\text{A-9-3})$$

A partir de (3-42) é possível escrever:

$$\begin{aligned} P_{A,t}^{1/(1-\mu)} &= \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} P_t(z)^{1/(1-\mu)} dz = \frac{1}{\eta} \left[\int_{fix^A} P_t(z)^{1/(1-\mu)} dz + \int_{flex^A} P_t(z)^{1/(1-\mu)} dz \right] = \\ &= \frac{1}{\eta} \left[\int_{fix^A} P_{t-1}(z)^{1/(1-\mu)} dz + P_{A,t}^* \int_{flex^A} dz \right] = \\ &= \frac{1}{\eta} \left[\eta\alpha P_{A,t-1}^{1/(1-\mu)} + \eta(1-\alpha) P_{A,t}^* \right] = \\ &= \alpha P_{A,t-1}^{1/(1-\mu)} + (1-\alpha) P_{A,t}^* \end{aligned} \quad (\text{A-9-4})$$

onde fix^A e $flex^A$ identificam as firmas do sub-setor A de SBC que, no período corrente, precisam manter o mesmo preço praticado no período anterior ou podem escolher novos preços, respectivamente. O desenvolvimento acima leva em conta que as firmas de fix^A cobram em t o preço que vigorava em $t-1$, que todas as firmas de $flex^A$ escolhem o mesmo preço ótimo (dado por $P_{A,t}^*$) e que a medida desses dois conjuntos é $\alpha\eta$ e $(1-\alpha)\eta$. A derivação também faz uso da Lei dos Grandes Números; as condições que permitem a sua aplicação já foram discutidas e se repetem aqui.

A versão linearizada de (A-9-4) é:

$$\hat{P}_{A,t} = \alpha \hat{P}_{A,t-1} + (1-\alpha) \hat{P}_{A,t}^* \quad (\text{A-9-5})$$

cuja obtenção faz uso das fórmulas (A-8-4), (A-8-11) e (A-8-12). Ela pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\hat{\pi}_{A,t} = (1-\alpha) [\hat{P}_{A,t}^* - \hat{P}_{A,t-1}] \quad (\text{A-9-6})$$

bastando para isso subtrair $\hat{P}_{A,t-1}$ de ambos os lados de (A-9-5) e utilizar o resultado abaixo:

$$\pi_{A,t} = \frac{P_{A,t}}{P_{A,t-1}} \Rightarrow \hat{\pi}_{A,t} = \hat{P}_{A,t} - \hat{P}_{A,t-1} + O^2$$

O próximo passo é substituir (A-9-2) em (A-9-6) para obter:

$$\hat{\pi}_{A,t} = (1-\alpha) \left[(1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j (\hat{P}_{t+j} + \hat{w}_{t+j}^r - \hat{a}_{t+j})] \right\} - (1-\alpha\beta) \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \hat{P}_{A,t-1} \right]$$

onde escrevemos $\hat{P}_{A,t-1}$ como $(1-\alpha\beta) \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \hat{P}_{A,t-1}$. O restante do procedimento

é análogo ao que já foi descrito na Seção 7.8:

- 1) Reescrevemos a expressão para $\hat{\pi}_{A,t}$ da seguinte maneira:

$$\hat{\pi}_{A,t} = (1-\alpha) \left[\begin{array}{l} (1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j (\hat{P}_{t+j} - \hat{P}_{A,t+j} + \hat{w}_{t+j}^r - \hat{a}_{t+j})] \right\} - \dots \\ \dots - (1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j (\hat{P}_{A,t+j} - \hat{P}_{A,t-1}) \right\} \end{array} \right]$$

- 2) Utilizamos o resultado:

$$\hat{P}_{A,t+j} - \hat{P}_{A,t-1} = desv \left(\frac{P_{A,t+j}}{P_{A,t-1}} \right) = \dots = \sum_{k=0}^j \hat{\pi}_{A,t+k}$$

para simplificar o termo $\sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j (\hat{P}_{A,t+j} - \hat{P}_{A,t-1})]$ como se segue:

$$\sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha\beta)^j (\hat{P}_{A,t+j} - \hat{P}_{A,t-1})] = \frac{1}{1-\alpha\beta} \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \hat{\pi}_{A,t+j}$$

- 3) Separamos os termos correspondentes a $j=0$ dos demais.

- 4) Utilizamos o resultado:

$$\alpha\beta E_t \hat{\pi}_{t+1} = (1-\alpha) E_t \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha\beta)^j \hat{\pi}_{A,t+j} \right\} + \dots$$

$$\dots + (1-\alpha)(1-\alpha\beta) E_t \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(\hat{P}_{t+j} - \hat{P}_{A,t+j} + \hat{w}_{t+j}^r - \hat{a}_{t+j} \right) \right\} + \dots$$

para reescrever a expressão obtida no passo 3 da seguinte maneira:

$$\hat{\pi}_{A,t} = \beta E_t \hat{\pi}_{A,t+1} + \gamma \left[\left(\hat{P}_t - \hat{P}_{A,t} \right) + \hat{w}_t^r - \hat{a}_t \right]$$

- 5) Substituímos (A-8-35) no resultado do passo anterior e, em seguida, inserimos as definições (3-9), (3-28) e (3-37)¹⁵.

O resultado final é uma Curva de Phillips para o sub-setor A de SBC:

$$\hat{\pi}_{A,t} = \beta E_t \hat{\pi}_{A,t+1} + \gamma (\theta_h - \theta_c) \hat{x}_t - \gamma \hat{p}_{A,t} + \gamma \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t \quad (\text{A-9-7})$$

A derivação de uma Curva de Phillips para o sub-setor B é análoga. O resultado final é:

$$\hat{\pi}_{B,t} = \beta E_t \hat{\pi}_{B,t+1} + \gamma (\theta_h - \theta_c) \hat{x}_t - \gamma \hat{p}_{B,t} - \gamma \frac{\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t - \gamma \frac{1}{\delta_x + 1} \hat{\lambda}_t \quad (\text{A-9-8})$$

7.10. Derivação da medida de bem estar

A aproximação de 2^a ordem de $u(c_t, \xi_t)$ é obtida através de procedimento análogo ao já discutido no âmbito do modelo estático (ver Seção 7.5). O resultado é:

$$u(c_t, \xi_t) = u_c(\bar{y}, 0) \bar{y} \left[\hat{y}_t + \frac{1}{2} \theta_c \hat{y}_t^2 - \theta_c \hat{y}_t \hat{g}_t + \theta_2 \hat{y}_t \hat{\xi}_t \right] + tip + O^3$$

¹⁵ Levar em conta que $p_{A,t} = \frac{P_{A,t}}{P_t} \Rightarrow \hat{p}_{A,t} = \hat{P}_{A,t} - \hat{P}_t + O^2$

onde $\theta_2 = \frac{u_{c\xi}(\bar{y}, 0)}{u_c(\bar{y}, 0)}$ e, como antes, ‘ O^3 ’ e “*t.i.p*” indicam termos de ordem igual ou superior a três e termos independentes de política, respectivamente.

Para calcular a aproximação de 2ª ordem de $v(h_t, \xi_t)$ é preciso levar em conta que $h_t = \frac{y_t}{a_t} \Omega_t$, onde a variável Ω_t é dada por:

$$\Omega_t = \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \int_0^{\eta} p_t(z)^{\mu/(1-\mu)} dz + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t}\right) \int_{\eta}^1 p_t(z)^{\mu/(1-\mu)} dz \quad (\text{A-10-1})$$

O cálculo da aproximação de 2ª ordem de $v(h_t, \xi_t)$ segue o mesmo procedimento já discutido na Seção 7.5. O resultado é:

$$v(y_t, a_t, \Omega_t, \xi_t) = \bar{y} \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) v_h \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \bar{y}, 0 \right) \times \\ \times \left[\hat{y}_t + \hat{\Omega}_t + \frac{1}{2} \theta_h \hat{y}_t^2 + \frac{1}{2} \theta_h \hat{\Omega}_t^2 - (\theta_h + 1) \hat{y}_t \hat{a}_t + \right. \\ \left. + (\theta_h + 1) \hat{y}_t \hat{\Omega}_t + \theta_1 \hat{y}_t \xi_t - (\theta_h + 1) \hat{\Omega}_t \hat{a}_t + \theta_1 \hat{\Omega}_t \xi_t \right] + \text{tip} + O^3$$

$$\text{onde } \theta_1 = \frac{v_{h\xi}(\bar{h}, 0)}{v_h(\bar{h}, 0)}.$$

Na Seção 7.8 demonstramos que a aproximação de 1ª ordem da medida de dispersão de preços relativos Ω_t só depende do choque nos termos de troca $\hat{\varepsilon}_t$ (ver (A-8-34); os demais choques, quais sejam, \hat{g}_t , $\hat{\xi}_t$ e \hat{a}_t , são incapazes de influenciá-la. Isto nos permite dizer que, pelo menos até uma aproximação de 2ª ordem, $\hat{\Omega}_t^2$ só depende de $\hat{\varepsilon}_t$, que é independente de política (para confirmar este resultado basta calcular o quadrado de (A-8-34)). De maneira análoga, termos

envolvendo produtos de $\hat{\Omega}_t$, \hat{a}_t e ξ_t também são independentes de política¹⁶.

Assim sendo:

$$v(y_t, a_t, \Omega_t, \xi_t) = \bar{y} \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) v_h \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \bar{y}, 0 \right) \times \\ \times \left[\hat{y}_t + \hat{\Omega}_t + \frac{1}{2} \theta_h \hat{y}_t^2 - (\theta_h + 1) \hat{y}_t \hat{a}_t - (\theta_h + 1) \frac{1 - \eta}{\delta_x + 1} \hat{y}_t \hat{\varepsilon}_t + \theta_1 \hat{y}_t \xi_t \right] + tip + O^3$$

A hipótese de que o Governo pratica uma política de subsídios visando eliminar a ineficiência existente em SBC faz com que, em *steady-state*:

$$\bar{y} u_c(\bar{y}, 0) = \bar{y} \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) v_h \left(\bar{y} \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right), 0 \right)$$

Com o auxílio da igualdade acima e das definições (3-28) e (3-37) podemos chegar ao seguinte resultado para a diferença entre $u(c_t, \xi_t)$ e $v(h_t, \xi_t)$:

$$u(c_t, \xi_t) - v(h_t, \xi_t) = -\frac{u_c(\bar{y}, 0) \bar{y}}{2} \left[(\theta_h - \theta_c) \hat{x}_t^2 + 2\hat{\Omega}_t \right] + tip + O^3$$

que é aquele constante em (3-48).

O próximo passo é calcular a aproximação de 2ª ordem da expressão para a variável Ω_t , que é dada por:

$$\Omega_t = \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \int_0^\eta \left(\frac{P_t(z)}{P_t} \right)^{\frac{\mu}{1-\mu}} dz + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t} \right) \int_\eta^1 \left(\frac{P_t(z)}{P_t} \right)^{\frac{\mu}{1-\mu}} dz \quad (\text{A-10-2})$$

Usando os agregados sub-setoriais de preços definidos em (3-42) e (3-43) é possível escrever a expressão (A-10-2) da maneira indicada a seguir:

¹⁶ Por exemplo, $\hat{\Omega}_t \hat{a}_t = \left(-\frac{1-\eta}{\delta_x+1} \hat{\varepsilon}_t + O^2 \right) \hat{a}_t = -\frac{1-\eta}{\delta_x+1} \hat{\varepsilon}_t \hat{a}_t + O^3$. Como o produto $\hat{\varepsilon}_t \hat{a}_t$ é um termo independente de política, segue que $\hat{\Omega}_t \hat{a}_t$ também o é.

$$\begin{aligned} \Omega_t = & \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \left(\frac{P_{A,t}}{P_t}\right)^{\mu/(1-\mu)} \int_0^\eta \left(\frac{P_t(z)}{P_{A,t}}\right)^{\mu/(1-\mu)} dz + \\ & + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t}\right) \left(\frac{P_{B,t}}{P_t}\right)^{\mu/(1-\mu)} \int_\eta^1 \left(\frac{P_t(z)}{P_{B,t}}\right)^{\mu/(1-\mu)} dz \end{aligned} \quad (\text{A-10-3})$$

Defina agora os seguintes preços relativos:

$$p_t^A(z) = \frac{P_t(z)}{P_{A,t}} \quad (\text{A-10-4})$$

$$p_t^B(z) = \frac{P_t(z)}{P_{B,t}} \quad (\text{A-10-5})$$

As definições acima, juntamente com (3-9), permitem escrever a expressão (A-10-3) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Omega_t = & \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) p_{A,t}^{\mu/(1-\mu)} \int_0^\eta p_t^A(z)^{\mu/(1-\mu)} dz + \\ & + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t}\right) p_{B,t}^{\mu/(1-\mu)} \int_\eta^1 p_t^B(z)^{\mu/(1-\mu)} dz \end{aligned} \quad (\text{A-10-6})$$

Esta, por sua vez, pode ser reescrita usando variáveis auxiliares análogas a (A-8-29). O resultado é:

$$\Omega_t = \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \tilde{p}_{A,t}^\mu \int_0^\eta \tilde{p}_t^A(z)^\mu dz + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t}\right) \tilde{p}_{B,t}^\mu \int_\eta^1 \tilde{p}_t^B(z)^\mu dz \quad (\text{A-10-7})$$

O primeiro passo para calcular a aproximação de 2ª ordem de (A-10-7) é o que se segue:

$$\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \tilde{p}_{A,t}^\mu \tilde{p}_t^A(z)^\mu = \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \left(\mu \tilde{p}_{A,t}^{\mu-1} \tilde{p}_t^A(z)^\mu\right) \Big|_{\text{SS}} (\tilde{p}_{A,t} - 1) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \left(\tilde{p}_{A,t}^\mu \mu \tilde{p}_t^A(z)^{\mu-1} \right) \Big|_{SS} (\tilde{p}_t^A(z) - 1) + \\
& + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \left(\mu(\mu-1) \tilde{p}_{A,t}^{\mu-2} \tilde{p}_t^A(z)^\mu \right) \Big|_{SS} \frac{(\tilde{p}_{A,t} - 1)^2}{2} + \\
& + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \left(\tilde{p}_{A,t}^\mu \mu(\mu-1) \tilde{p}_t^A(z)^{\mu-2} \right) \Big|_{SS} \frac{(\tilde{p}_t^A(z) - 1)^2}{2} + \\
& + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \left(\mu^2 \tilde{p}_{A,t}^{\mu-1} \tilde{p}_t^A(z)^{\mu-1} \right) \Big|_{SS} (\tilde{p}_{A,t} - 1)(\tilde{p}_t^A(z) - 1) + O^3
\end{aligned}$$

Inserindo os resultados das derivadas parciais calculadas no *steady-state* chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \tilde{p}_{A,t}^\mu \tilde{p}_t^A(z)^\mu = \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \mu (\tilde{p}_{A,t} - 1) + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \mu (\tilde{p}_t^A(z) - 1) + \\
& + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \mu(\mu-1) \frac{(\tilde{p}_{A,t} - 1)^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \mu(\mu-1) \frac{(\tilde{p}_t^A(z) - 1)^2}{2} + \\
& + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \mu^2 (\tilde{p}_{A,t} - 1)(\tilde{p}_t^A(z) - 1) + O^3
\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento para o segundo termo de (A-10-7) chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t}\right) \tilde{p}_{B,t}^\mu \tilde{p}_t^B(z)^\mu = \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) - \left(\frac{1}{\delta_x} \frac{1}{\varepsilon_t^2} \tilde{p}_{B,t}^\mu \tilde{p}_t^B(z)^\mu \right) \Big|_{SS} (\varepsilon_t - 1) + \\
& + \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t}\right) \mu \tilde{p}_{B,t}^{\mu-1} \tilde{p}_t^B(z)^\mu \right) \Big|_{SS} (\tilde{p}_{B,t} - 1) + \\
& + \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t}\right) \tilde{p}_{B,t}^\mu \mu \tilde{p}_t^B(z)^{\mu-1} \right) \Big|_{SS} (\tilde{p}_t^B(z) - 1) + \\
& + \left(\frac{2}{\delta_x} \frac{1}{\varepsilon_t^3} \tilde{p}_{B,t}^\mu \tilde{p}_t^B(z)^\mu \right) \Big|_{SS} \frac{(\varepsilon_t - 1)^2}{2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t} \right) \mu (\mu - 1) \tilde{p}_{B,t}^{\mu-2} \tilde{p}_t^B(z)^\mu \right) \Big|_{SS} \frac{(\tilde{p}_{B,t} - 1)^2}{2} + \\
& + \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t} \right) \tilde{p}_{B,t}^\mu \mu (\mu - 1) \tilde{p}_t^B(z)^{\mu-2} \right) \Big|_{SS} \frac{(\tilde{p}_t^B(z) - 1)^2}{2} - \\
& - \left(\frac{1}{\delta_x} \frac{1}{\varepsilon_t^2} \mu \tilde{p}_{B,t}^{\mu-1} \tilde{p}_t^B(z)^\mu \right) \Big|_{SS} (\varepsilon_t - 1)(\tilde{p}_{B,t} - 1) - \\
& - \left(\frac{1}{\delta_x} \frac{1}{\varepsilon_t^2} \tilde{p}_{B,t}^\mu \mu \tilde{p}_t^B(z)^{\mu-1} \right) \Big|_{SS} (\varepsilon_t - 1)(\tilde{p}_t^B(z) - 1) + \\
& + \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t} \right) \mu^2 \tilde{p}_{B,t}^{\mu-1} \tilde{p}_t^B(z)^{\mu-1} \right) \Big|_{SS} (\tilde{p}_{B,t} - 1)(\tilde{p}_t^B(z) - 1) + O^3
\end{aligned}$$

O próximo passo é inserir os resultados das derivadas parciais calculadas em *steady-state*:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t} \right) \tilde{p}_{B,t}^\mu \tilde{p}_t^B(z)^\mu = \\
& = \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) - \frac{1}{\delta_x} (\varepsilon_t - 1) + \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \mu (\tilde{p}_{B,t} - 1) + \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \mu (\tilde{p}_t^B(z) - 1) + \\
& + \frac{1}{\delta_x} (\varepsilon_t - 1)^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \mu (\mu - 1) \frac{(\tilde{p}_{B,t} - 1)^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{\delta_x \varepsilon_t} \right) \mu (\mu - 1) \frac{(\tilde{p}_t^B(z) - 1)^2}{2} - \\
& - \frac{\mu}{\delta_x} (\varepsilon_t - 1)(\tilde{p}_{B,t} - 1) - \frac{\mu}{\delta_x} (\varepsilon_t - 1)(\tilde{p}_t^B(z) - 1) + \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \mu^2 (\tilde{p}_{B,t} - 1)(\tilde{p}_t^B(z) - 1) + O^3
\end{aligned}$$

Os resultados acima permitem que escrevamos (A-10-7) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\Omega_t & = \eta \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) + \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \eta \mu (\tilde{p}_{A,t} - 1) + \\
& + \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \mu \int_0^\eta (\tilde{p}_t^A(z) - 1) dz + \eta \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) \frac{\mu (\mu - 1)}{2} (\tilde{p}_{A,t} - 1)^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \frac{\mu(\mu-1)}{2} \int_0^\eta (\tilde{p}_t^A(z)-1)^2 dz + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \mu^2 (\tilde{p}_{A,t}-1) \int_0^\eta (\tilde{p}_t^A(z)-1) dz + \\
& + (1-\eta) \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) - \frac{1-\eta}{\delta_x} (\varepsilon_t-1) + (1-\eta) \mu \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) (\tilde{p}_{B,t}-1) + \\
& + \mu \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \int_\eta^1 (\tilde{p}_t^B(z)-1) dz + \frac{1-\eta}{\delta_x} (\varepsilon_t-1)^2 + \\
& + (1-\eta) \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \frac{\mu(\mu-1)}{2} (\tilde{p}_{B,t}-1)^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \frac{\mu(\mu-1)}{2} \int_\eta^1 (\tilde{p}_t^B(z)-1)^2 dz - \\
& - \frac{1-\eta}{\delta_x} \mu (\varepsilon_t-1) (\tilde{p}_{B,t}-1) - \frac{\mu}{\delta_x} (\varepsilon_t-1) \int_\eta^1 (\tilde{p}_t^B(z)-1) dz + \\
& + \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right) \mu^2 (\tilde{p}_{B,t}-1) \int_\eta^1 (\tilde{p}_t^B(z)-1) dz + O^3
\end{aligned}$$

Subtraindo $1 + \frac{1}{\delta_x}$ de ambos os lados da expressão obtida acima para Ω_t ,

e, em seguida, dividindo o resultado pelo mesmo número chega-se a:

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega_t - \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right)} & = \eta \mu (\tilde{p}_{A,t}-1) + \mu \int_0^\eta (\tilde{p}_t^A(z)-1) dz + (1-\eta) \mu (\tilde{p}_{B,t}-1) + \\
& + \mu \int_\eta^1 (\tilde{p}_t^B(z)-1) dz - \frac{1-\eta}{\delta_x+1} (\varepsilon_t-1) + \frac{\eta \mu (\mu-1)}{2} (\tilde{p}_{A,t}-1)^2 + \\
& + \frac{\mu(\mu-1)}{2} \int_0^\eta (\tilde{p}_t^A(z)-1)^2 dz + \mu^2 (\tilde{p}_{A,t}-1) \int_0^\eta (\tilde{p}_t^A(z)-1) dz + \frac{1-\eta}{\delta_x+1} (\varepsilon_t-1)^2 + \\
& + (1-\eta) \frac{\mu(\mu-1)}{2} (\tilde{p}_{B,t}-1)^2 + \frac{\mu(\mu-1)}{2} \int_\eta^1 (\tilde{p}_t^B(z)-1)^2 dz - \\
& - \mu \frac{1-\eta}{\delta_x+1} (\varepsilon_t-1) (\tilde{p}_{B,t}-1) - \frac{\mu}{\delta_x+1} (\varepsilon_t-1) \int_\eta^1 (\tilde{p}_t^B(z)-1) dz + \\
& + \mu^2 (\tilde{p}_{B,t}-1) \int_\eta^1 (\tilde{p}_t^B(z)-1) dz + O^3 \tag{A-10-8}
\end{aligned}$$

Usando as definições (3-42) e (3-43) e a equação (A-9-1) demonstra-se que:

$$(1) P_{A,t}^{1/(1-\mu)} = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta P_t(z)^{1/(1-\mu)} dz \Rightarrow \eta = \int_0^\eta p_t^A(z)^{1/(1-\mu)} dz \Rightarrow \eta = \int_0^\eta \tilde{p}_t^A(z) dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^\eta (\tilde{p}_t^A(z) - 1) dz$$

$$(2) P_{B,t}^{1/(1-\mu)} = \frac{1}{(1-\eta)} \int_\eta^1 P_t(z)^{1/(1-\mu)} dz \Rightarrow (1-\eta) = \int_\eta^1 p_t^B(z)^{1/(1-\mu)} dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\eta) = \int_\eta^1 \tilde{p}_t^B(z) dz \Rightarrow 0 = \int_\eta^1 (\tilde{p}_t^B(z) - 1) dz$$

$$(3) P_t^{1/(1-\mu)} = \eta P_{A,t}^{1/(1-\mu)} + (1-\eta) P_{B,t}^{1/(1-\mu)} \Rightarrow 1 = \eta p_{A,t}^{1/(1-\mu)} + (1-\eta) p_{B,t}^{1/(1-\mu)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \eta \tilde{p}_{A,t} + (1-\eta) \tilde{p}_{B,t} \Rightarrow 0 = \eta (\tilde{p}_{A,t} - 1) + (1-\eta) (\tilde{p}_{B,t} - 1)$$

Estes resultados permitem que se chegue à seguinte expressão para Ω_t :

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_t - \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right)} &= -\frac{1-\eta}{\delta_x+1} (\varepsilon_t - 1) + \eta \frac{\mu(\mu-1)}{2} (\tilde{p}_{A,t} - 1)^2 + \frac{\mu(\mu-1)}{2} \int_0^\eta (\tilde{p}_t^A(z) - 1)^2 dz + \\ &+ \frac{1-\eta}{\delta_x+1} (\varepsilon_t - 1)^2 + (1-\eta) \frac{\mu(\mu-1)}{2} (\tilde{p}_{B,t} - 1)^2 + \frac{\mu(\mu-1)}{2} \int_\eta^1 (\tilde{p}_t^B(z) - 1)^2 dz + \\ &- \mu \frac{1-\eta}{\delta_x+1} (\varepsilon_t - 1) (\tilde{p}_{B,t} - 1) + O^3 \end{aligned}$$

Separando os termos independentes de política chega-se, após alguma álgebra, a:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_t - \left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right)} &= \frac{\mu(\mu-1)}{2} \left[\eta (\tilde{p}_{A,t} - 1)^2 + (1-\eta) (\tilde{p}_{B,t} - 1)^2 \right] + \\ &+ \frac{\mu(\mu-1)}{2} \left[\int_0^\eta (\tilde{p}_t^A(z) - 1)^2 dz + \int_\eta^1 (\tilde{p}_t^B(z) - 1)^2 dz \right] - \\ &- \mu \frac{1-\eta}{\delta_x+1} (\varepsilon_t - 1) (\tilde{p}_{B,t} - 1) + tip + O^3 \end{aligned} \tag{A-10-9}$$

Porém é verdade que:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x^{1/(1-\mu)} = \tilde{x}|_{SS} + \left(\frac{1}{(1-\mu)} x^{1/(1-\mu)-1} \right) \Big|_{SS} (x - x|_{SS}) + O^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\tilde{x} - \tilde{x}|_{SS}}{\tilde{x}|_{SS}} &= \frac{1}{(1-\mu)} \left(\frac{x - x|_{SS}}{x|_{SS}} \right) + O^2 \Rightarrow desv(\tilde{x}) = \frac{1}{(1-\mu)} desv(x) + O^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (desv(\tilde{x}))^2 &= \frac{1}{(\mu-1)^2} (desv(x))^2 + O^3\end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima em (A-10-9) obtém-se:

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}_t &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{(\mu-1)} [\eta \hat{p}_{A,t}^2 + (1-\eta) \hat{p}_{B,t}^2] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\mu}{(\mu-1)} \left[\int_0^\eta (\hat{p}_t^A(z))^2 dz + \int_\eta^1 (\hat{p}_t^B(z))^2 dz \right] + \quad (A-10-10) \\ &+ \frac{\mu}{(\mu-1)} \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t \hat{p}_{B,t} + tip + O^3\end{aligned}$$

Substituindo (A-10-10) em (3-48) chega-se a:

$$U_t = -\frac{u_c(\bar{y}, 0)\bar{y}}{2} \left[\begin{aligned} &(\theta_h - \theta_c) \hat{x}_t^2 + \frac{\mu}{(\mu-1)} [\eta \hat{p}_{A,t}^2 + (1-\eta) \hat{p}_{B,t}^2] + \\ &+ \frac{\mu}{(\mu-1)} \left[\int_0^\eta (\hat{p}_t^A(z))^2 dz + \int_\eta^1 (\hat{p}_t^B(z))^2 dz \right] + \\ &+ 2 \frac{\mu}{(\mu-1)} \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t \hat{p}_{B,t} \end{aligned} \right] + tip + O^3 \quad (A-10-11)$$

O último passo do procedimento é calcular $\int_0^\eta (\hat{p}_t^A(z))^2 dz$ e $\int_\eta^1 (\hat{p}_t^B(z))^2 dz$.

Para calcular a primeira integral faça:

$$\int_0^\eta (\hat{p}_t^A(z))^2 dz = \int_0^\eta \left(desv \left(\frac{P_t(z)}{P_{A,t}} \right) \right)^2 dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\text{fix}^A} \left(\text{desv} \left(\frac{P_t(z)}{P_{A,t}} \right) \right)^2 dz + \int_{\text{flex}^A} \left(\text{desv} \left(\frac{P_t(z)}{P_{A,t}} \right) \right)^2 dz = \\
&= \int_{\text{fix}^A} \left(\text{desv} \left(\frac{P_{t-1}(z)}{P_{A,t}} \right) \right)^2 dz + \int_{\text{flex}^A} \left(\text{desv} \left(\frac{P_{A,t}^{\bullet}}{P_{A,t}} \right) \right)^2 dz = \int_{\text{fix}^A} \left(\text{desv} \left(\frac{P_{t-1}(z) P_{A,t-1}}{P_{A,t-1} P_{A,t}} \right) \right)^2 dz + \\
&+ \int_{\text{flex}^A} \left(\text{desv} \left(\frac{P_{A,t}^{\bullet}}{P_{A,t}} \right) \right)^2 dz = \int_{\text{fix}^A} \left(\text{desv} \left(\frac{p_{t-1}^A(z)}{\pi_{A,t}} \right) \right)^2 dz + \int_{\text{flex}^A} \left(\text{desv} (p_{A,t}^{\bullet}) \right)^2 dz = \\
&= \int_{\text{fix}^A} \left(\hat{p}_{t-1}^A(z) - \hat{\pi}_{A,t} \right)^2 dz + \int_{\text{flex}^A} \left(\hat{p}_{A,t}^{\bullet} \right)^2 dz = \int_{\text{fix}^A} \left[\left(\hat{p}_{t-1}^A(z) \right)^2 - 2 \hat{p}_{t-1}^A(z) \hat{\pi}_{A,t} + \left(\hat{\pi}_{A,t} \right)^2 \right] dz + \\
&+ \left(\hat{p}_{A,t}^{\bullet} \right)^2 \int_{\text{flex}^A} dz = \int_{\text{fix}^A} \left(\hat{p}_{t-1}^A(z) \right)^2 dz - 2 \hat{\pi}_{A,t} \int_{\text{fix}^A} \hat{p}_{t-1}^A(z) dz + \left(\hat{\pi}_{A,t} \right)^2 \int_{\text{fix}^A} dz + \\
&+ \eta(1-\alpha) \left(\hat{p}_{A,t}^{\bullet} \right)^2 = \int_{\text{fix}^A} \left(\hat{p}_{t-1}^A(z) \right)^2 dz + \eta \alpha \left(\hat{\pi}_{A,t} \right)^2 + \eta(1-\alpha) \left(\hat{p}_{A,t}^{\bullet} \right)^2 = \alpha \int_0^{\eta} \left(\hat{p}_{t-1}^A(z) \right)^2 dz + \\
&+ \eta \alpha \left(\hat{\pi}_{A,t} \right)^2 + \eta(1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \left(\hat{\pi}_{A,t} \right)^2 = \alpha \int_0^{\eta} \left(\hat{p}_{t-1}^A(z) \right)^2 dz + \frac{\eta \alpha}{1-\alpha} \hat{\pi}_{A,t}^2
\end{aligned}$$

Ou seja, demonstra-se que:

$$\int_0^{\eta} \left(\hat{p}_t^A(z) \right)^2 dz = \alpha \int_0^{\eta} \left(\hat{p}_{t-1}^A(z) \right)^2 dz + \frac{\eta \alpha}{1-\alpha} \hat{\pi}_{A,t}^2 \quad (\text{A-10-12})$$

Para obter (A-10-12) utilizamos os seguintes resultados intermediários:

$$(1') \quad P_{A,t}^{1/(1-\mu)} = \alpha P_{A,t-1}^{1/(1-\mu)} + (1-\alpha) P_{A,t}^{\bullet 1/(1-\mu)} \Rightarrow 1 = \alpha \pi_{A,t}^{1/(\mu-1)} + (1-\alpha) p_{A,t}^{\bullet 1/(1-\mu)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = -\alpha \hat{\pi}_{A,t} + (1-\alpha) \hat{p}_{A,t}^{\bullet} + O^2 \Rightarrow \hat{p}_{A,t}^{\bullet} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \hat{\pi}_{A,t} + O^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\hat{p}_{A,t}^{\bullet} \right)^2 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \hat{\pi}_{A,t}^2 + O^3$$

$$(2') \quad P_{A,t}^{1/(1-\mu)} = \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} P_t(z)^{1/(1-\mu)} dz \Rightarrow \eta = \int_0^{\eta} p_t^A(z)^{1/(1-\mu)} dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta = \int_0^{\eta} \left(1 + \frac{1}{(1-\mu)} \left(p_t^A(z)^{1/(1-\mu)-1} \right) \right) \Big|_{\text{ISS}} \left(p_t^A(z) - 1 \right) dz + O^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta = \eta + \frac{1}{(1-\mu)} \int_0^{\eta} \hat{p}_t^A(z) dz + O^2 \Rightarrow O^2 = \int_0^{\eta} \hat{p}_t^A(z) dz \Rightarrow O^2 = \int_{fix^A} \hat{p}_t^A(z) dz$$

O último passo de (2') decorre da Lei dos Grandes Números. Como a expressão (2') é verdadeira para um instante de tempo genérico, ela também é válida para $t-1$.

Defina agora $\Omega_{A,t} = \int_0^{\eta} (\hat{p}_t^A(z))^2 dz$ e reescreva (A-10-12) da seguinte

maneira:

$$\Omega_{A,t} = \alpha \Omega_{A,t-1} + \frac{\eta \alpha}{1-\alpha} \hat{\pi}_{A,t}^2 \quad (\text{A-10-13})$$

que pode ser vista como uma lei de movimento para $\Omega_{A,t}$. Integrando (A-10-13) a partir de uma condição inicial $\Omega_{A,-1}$ chega-se a:

$$\Omega_{A,t} = \alpha^{t+1} \Omega_{A,-1} + \frac{\eta \alpha}{1-\alpha} \sum_{k=0}^t \alpha^{t-k} \hat{\pi}_{A,k}^2 \quad (\text{A-10-14})$$

O cálculo de $\int_{\eta}^1 (\hat{p}_t^B(z))^2 dz$ é análogo. Os resultados relevantes são:

$$\Omega_{B,t} = \alpha \Omega_{B,t-1} + \frac{(1-\eta)\alpha}{1-\alpha} \hat{\pi}_{A,t}^2 \quad (\text{A-10-15})$$

$$\Omega_{B,t} = \alpha^{t+1} \Omega_{B,-1} + \frac{(1-\eta)\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=0}^t \alpha^{t-k} \hat{\pi}_{B,k}^2 \quad (\text{A-10-16})$$

Substituindo (A-10-14) e (A-10-16) em (A-10-11) obtém-se:

$$U_t = -\frac{u_c(\bar{y}, 0)\bar{y}}{2} \left[\begin{aligned} &(\theta_h - \theta_c)\hat{x}_t^2 + \\ &+ \frac{\mu}{(\mu-1)} [\eta\hat{p}_{A,t}^2 + (1-\eta)\hat{p}_{B,t}^2] + \\ &+ \frac{\mu}{(\mu-1)} \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\eta \sum_{k=0}^t \alpha^{t-k} \hat{\pi}_{A,k}^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1-\eta) \sum_{k=0}^t \alpha^{t-k} \hat{\pi}_{B,k}^2 \right] + \\ &+ 2 \frac{\mu}{(\mu-1)} \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t \hat{p}_{B,t} \end{aligned} \right] + tip + O^3 \quad (\text{A-10-17})$$

Repare que, por serem independentes de política, os termos associados às condições iniciais $\Omega_{A,-1}$ e $\Omega_{B,-1}$ foram inseridos em ‘t.i.p.’.

Sabe-se, porém, que o bem estar do agente representativo no presente não é influenciado somente pelo seu nível de satisfação corrente; toda a utilidade que se espera desfrutar em instantes de tempo posteriores também exerce influência sobre ele (apesar do indivíduo, no período corrente, atribuir um peso menor a utilidades futuras). Formalmente:

$$W = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U_t \quad (\text{A-10-18})$$

Substituindo (A-10-17) em (A-10-18) chega-se a:

$$W = -\frac{u_c(\bar{y}, 0)\bar{y}}{2} \times E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\begin{aligned} &(\theta_h - \theta_c)\hat{x}_t^2 + \frac{\mu}{(\mu-1)} [\eta\hat{p}_{A,t}^2 + (1-\eta)\hat{p}_{B,t}^2] + \\ &+ \frac{\mu}{(\mu-1)} \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\eta \sum_{k=0}^t \alpha^{t-k} \hat{\pi}_{A,k}^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1-\eta) \sum_{k=0}^t \alpha^{t-k} \hat{\pi}_{B,k}^2 \right] + \\ &+ 2 \frac{\mu}{(\mu-1)} \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t \hat{p}_{B,t} \end{aligned} \right] + tip + O^3 \quad (\text{A-10-19})$$

A expressão (A-10-19) pode ser simplificada se utilizarmos:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sum_{k=0}^t \alpha^{t-k} \hat{\pi}_{A,k}^2 &= \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha\beta)^t \sum_{k=0}^t \alpha^{-k} \hat{\pi}_{A,k}^2 = \hat{\pi}_{A,0}^2 + \alpha\beta \left(\hat{\pi}_{A,0}^2 + \frac{1}{\alpha} \hat{\pi}_{A,1}^2 \right) + \\
&+ (\alpha\beta)^2 \left(\hat{\pi}_{A,0}^2 + \frac{1}{\alpha} \hat{\pi}_{A,1}^2 + \frac{1}{\alpha^2} \hat{\pi}_{A,2}^2 \right) + (\alpha\beta)^3 \left(\hat{\pi}_{A,0}^2 + \frac{1}{\alpha} \hat{\pi}_{A,1}^2 + \frac{1}{\alpha^2} \hat{\pi}_{A,2}^2 + \frac{1}{\alpha^3} \hat{\pi}_{A,3}^2 \right) + \\
&+ \dots = \hat{\pi}_{A,0}^2 \left(1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2 + (\alpha\beta)^3 + \dots \right) + \beta \hat{\pi}_{A,1}^2 \left(1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2 + (\alpha\beta)^3 + \dots \right) + \\
&+ \beta^2 \hat{\pi}_{A,2}^2 \left(1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2 + (\alpha\beta)^3 + \dots \right) + \dots = \frac{1}{1-\alpha\beta} \left(\hat{\pi}_{A,0}^2 + \beta \hat{\pi}_{A,1}^2 + \beta^2 \hat{\pi}_{A,2}^2 + \dots \right) = \\
&= \frac{1}{1-\alpha\beta} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \hat{\pi}_{A,t}^2
\end{aligned}$$

para obter:

$$\begin{aligned}
W &= -\frac{u_c(\bar{y}, 0) \bar{y}}{2} \times \\
&\times E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\begin{aligned} & \left((\theta_h - \theta_c) \hat{x}_t^2 + \frac{\mu}{(\mu-1)} \left[\eta \hat{p}_{A,t}^2 + (1-\eta) \hat{p}_{B,t}^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{(\mu-1)} \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{1-\alpha\beta} \left[\eta \hat{\pi}_{A,t}^2 + (1-\eta) \hat{\pi}_{B,t}^2 \right] + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\mu}{(\mu-1)} \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t \hat{p}_{B,t} \right] + tip + O^3 \end{aligned} \right] \quad (A-10-20)
\end{aligned}$$

que é o resultado final desejado.

7.11. Simplificação da expressão para L_t

O primeiro resultado define um relacionamento entre $\hat{p}_{A,t}$ e $\hat{p}_{B,t}$ que é consequência de (A-9-1):

$$\begin{aligned}
P_t^{1/(1-\mu)} &= \eta P_{A,t}^{1/(1-\mu)} + (1-\eta) P_{B,t}^{1/(1-\mu)} \Rightarrow 1 = \eta p_{A,t}^{1/(1-\mu)} + (1-\eta) p_{B,t}^{1/(1-\mu)} \Rightarrow \\
\Rightarrow 0 &= \eta \hat{p}_{A,t} + (1-\eta) \hat{p}_{B,t} + O^2 \Rightarrow \hat{p}_{B,t} = -\frac{\eta}{1-\eta} \hat{p}_{A,t} + O^2 \Rightarrow \hat{p}_{B,t}^2 = \left(\frac{\eta}{1-\eta} \right)^2 \hat{p}_{A,t}^2 + O^3
\end{aligned}$$

O segundo permite expressar $\hat{\pi}_{A,t}$ como função de $\hat{p}_{A,t}$, $\hat{p}_{A,t-1}$ e $\hat{\pi}_t$. A partir da definição de $\pi_{A,t}$ é possível escrever:

$$\pi_{A,t} = \frac{P_{A,t}}{P_{A,t-1}} = \frac{P_{A,t}}{P_t} \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{A,t-1}} = p_{A,t} \pi_t p_{A,t-1}^{-1} \Rightarrow \hat{\pi}_{A,t} = \hat{p}_{A,t} + \hat{\pi}_t - \hat{p}_{A,t-1} + O^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\pi}_{A,t}^2 = (\hat{p}_{A,t} + \hat{\pi}_t - \hat{p}_{A,t-1})^2 + O^3$$

O terceiro é obtido de maneira similar e permite escrever $\hat{\pi}_{B,t}$ em função das mesmas variáveis:

$$\hat{\pi}_{B,t}^2 = \left(-\frac{\eta}{1-\eta} \hat{p}_{A,t} + \hat{\pi}_t + \frac{\eta}{1-\eta} \hat{p}_{A,t-1} \right)^2 + O^3$$

Basta agora substituir os resultados acima em (3-53), aplicar a definição de L'_t e fazer a seguinte substituição:

$$\hat{p}_{A,t}^2 - 2 \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{p}_{A,t} \hat{\varepsilon}_t = \left(\hat{p}_{A,t} - \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t \right)^2 - \left(\frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \right)^2 \hat{\varepsilon}_t^2$$

para chegar a:

$$L'_t = \left[\begin{array}{l} \hat{x}_t^2 + \lambda_p \left(\hat{p}_{A,t} - \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t \right)^2 + \\ \eta \left(\hat{p}_{A,t} + \hat{\pi}_t - \hat{p}_{A,t-1} \right)^2 + \\ + \lambda_\pi \left[(1-\eta) \left(-\frac{\eta}{1-\eta} \hat{p}_{A,t} + \hat{\pi}_t + \frac{\eta}{1-\eta} \hat{p}_{A,t-1} \right)^2 \right] \end{array} \right] \quad (\text{A-11-1})$$

onde:

$$\lambda_p = \frac{\mu}{\mu-1} \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{\theta_h - \theta_c} \quad \lambda_\pi = \frac{\mu}{\mu-1} \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{1-\alpha\beta} \frac{1}{\theta_h - \theta_c}$$

Repare que omitimos $\left(\frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \right)^2 \hat{\varepsilon}_t^2$ pelo fato deste termo ser independente de

política.

A expressão (A-11-1) pode ser escrita de maneira mais simples se levarmos em conta que:

$$\begin{aligned} (\hat{p}_{A,t} + \hat{\pi}_t - \hat{p}_{A,t-1})^2 &= (\hat{p}_{A,t} - \hat{p}_{A,t-1})^2 + 2(\hat{p}_{A,t} - \hat{p}_{A,t-1})\hat{\pi}_t + \hat{\pi}_t^2 \\ \left(-\frac{\eta}{1-\eta}\hat{p}_{A,t} + \hat{\pi}_t + \frac{\eta}{1-\eta}\hat{p}_{A,t-1} \right)^2 &= \frac{\eta^2}{(1-\eta)^2}(\hat{p}_{A,t} - \hat{p}_{A,t-1})^2 - \\ &\quad - \frac{2\eta}{1-\eta}(\hat{p}_{A,t} - \hat{p}_{A,t-1})\hat{\pi}_t + \hat{\pi}_t^2 \end{aligned}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \eta(\hat{p}_{A,t} + \hat{\pi}_t - \hat{p}_{A,t-1})^2 + (1-\eta) \left(-\frac{\eta}{1-\eta}\hat{p}_{A,t} + \hat{\pi}_t + \frac{\eta}{1-\eta}\hat{p}_{A,t-1} \right)^2 &= \\ = \frac{\eta}{1-\eta}(\hat{p}_{A,t} - \hat{p}_{A,t-1})^2 + \hat{\pi}_t^2 \end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima em (A-11-1) chega-se a:

$$L'_t = \hat{x}_t^2 + \lambda_\pi \hat{\pi}_t^2 + \lambda_p \left(\hat{p}_{A,t} - \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t \right)^2 + \lambda_\pi \frac{\eta}{1-\eta} (\hat{p}_{A,t} - \hat{p}_{A,t-1})^2 \quad (\text{A-11-2})$$

que é o resultado constante em (3-55).

7.12.

Cálculo da aproximação de 1ª ordem da identidade orçamentária do Governo

O objetivo deste Apêndice é calcular a aproximação de 1ª ordem da identidade orçamentária do Governo, repetida abaixo por conveniência:

$$b_t^r = \frac{b_{t-1}^r i_{t-1}}{\pi_t} - T_t + (s - \tau_t) C_t^r + g_t - \Pi_t \quad (\text{A-12-1})$$

A expansão de Taylor de 1ª ordem da equação acima é:

$$\begin{aligned}
& \left(b_t^r - \bar{b}^r \right) - \frac{i_{t-1}}{\pi_t} \Big|_{SS} \left(b_{t-1}^r - \bar{b}^r \right) - \frac{b_{t-1}^r}{\pi_t} \Big|_{SS} \left(i_{t-1} - \bar{i} \right) + \\
& + \frac{b_{t-1}^r i_{t-1}}{\pi_t^2} \Big|_{SS} \left(\pi_t - \bar{\pi} \right) + \left(T_t - \bar{T} \right) - \left(s - \tau_t \right) \Big|_{SS} \left(C_t^r - \bar{C}^r \right) + \\
& + C_t^r \Big|_{SS} \left(\tau_t - \bar{\tau} \right) - \left(g_t - \bar{g} \right) + \left(\Pi_t - \bar{\Pi} \right) + O^2 = 0
\end{aligned} \tag{A-12-2}$$

O valor da taxa de juros nominal em *steady-state* é igual a $\frac{1}{\beta}$, enquanto que o valor da alíquota extra τ_t é zero. Em *steady-state*, por hipótese, o Governo não intervém no livre comércio e, portanto, $\lambda_t = 1$ para todo t . Em virtude disso, o resultado auferido com tributos (ou subsídios) de comércio exterior é igual a zero (ou seja, $\bar{\Pi} = 0$). Finalmente, em *steady-state*, $\bar{a} = \bar{\pi} = 1$ e $\bar{g} = 0$.

Os gastos operacionais reais totais das firmas de SBC são dados por:

$$C_t^r = y_t \left[\left(\frac{w_t^r + p_{X,t}}{a_t} \right) \int_0^\eta p_t(z)^{\mu/(1-\mu)} dz + \left(\frac{w_t^r + p_{Y,t}}{a_t} \right) \int_\eta^1 p_t(z)^{\mu/(1-\mu)} dz \right]$$

Em *steady-state* $\bar{p}_X = \bar{p}_Y$ porque, por hipótese, $\bar{\varepsilon} = 1$. É verdade também que todas as firmas de SBC cobram o mesmo preço P_t e, portanto, $\bar{p}(z) = 1$ para todo z . Assim sendo, o valor assumido em *steady state* pelos gastos operacionais totais reais é:

$$\bar{C}^r = \bar{y}(\bar{w}^r + \bar{p}_X)$$

Sabemos que, em *steady-state*, $\bar{p}_X = \frac{\bar{w}^r}{\delta_x}$ ¹⁷ e $\bar{w}^r = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\delta_x}\right)}$. Logo:

¹⁷ Recordando, em SBI há concorrência perfeita e livre entrada e saída de firmas. Com isso,

$p_{X,t} = \frac{w_t^r}{\delta_x}$ é verdade para todo t , inclusive no *steady-state*.

$$\bar{C}^r = \bar{w}^r \left(1 + \frac{1}{\delta_x} \right) = \bar{y}$$

Substituindo todos esses resultados em (A.XII.2) obtém-se:

$$\begin{aligned} & (b_t^r - \bar{b}^r) - \frac{1}{\beta} (b_{t-1}^r - \bar{b}^r) - \bar{b}^r (i_{t-1} - \bar{i}) + \frac{\bar{b}^r}{\beta} (\pi_t - 1) + (\bar{T}_t - \bar{T}) - \\ & - s(C_t^r - \bar{C}^r) + \bar{y}\tau_t - g_t + \Pi_t + O^2 = 0 \end{aligned}$$

Dividindo o resultado acima por \bar{y} e escrevendo todas as variáveis, sempre que possível, na forma de desvios percentuais com relação aos valores de *steady-state* chega-se a:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{b}^r}{\bar{y}} \left(\frac{b_t^r - \bar{b}^r}{\bar{b}^r} \right) - \frac{1}{\beta} \frac{\bar{b}^r}{\bar{y}} \left(\frac{b_{t-1}^r - \bar{b}^r}{\bar{b}^r} \right) - \frac{1}{\beta} \frac{\bar{b}^r}{\bar{y}} \left(\frac{i_{t-1} - \bar{i}}{\bar{i}} \right) + \frac{1}{\beta} \frac{\bar{b}^r}{\bar{y}} (\pi_t - 1) + \\ & + \frac{\bar{T}}{\bar{y}} \left(\frac{\bar{T}_t - \bar{T}}{\bar{T}} \right) - s \left(\frac{C_t^r - \bar{C}^r}{\bar{C}^r} \right) + \tau_t - \frac{g_t}{\bar{y}} + \frac{\Pi_t}{\bar{y}} + O^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-12-3})$$

ou ainda:

$$\Phi \left(\hat{b}_t^r - \frac{1}{\beta} \hat{b}_{t-1}^r \right) - \frac{\Phi}{\beta} (\hat{i}_{t-1} - \hat{\pi}_t) + \tilde{\Phi} \hat{T}_t - s \hat{C}_t^r + \tau_t - \hat{g}_t + \hat{\Pi}_t + O^2 = 0 \quad (\text{A-12-4})$$

onde, como antes, as variáveis estão escritas em termos de desvios percentuais (por exemplo, $\hat{C}_t^r = \frac{C_t^r - \bar{C}^r}{\bar{C}^r}$), com exceção de $\hat{g}_t = \frac{g_t}{\bar{y}}$ e $\hat{\Pi}_t = \frac{\Pi_t}{\bar{y}}$.

O valor de $\tilde{\Phi}$ é obtido a partir de (A-12-1) calculada em *steady-state*:

$$\bar{b}^r - \frac{1}{\beta} \bar{b}^r = s \bar{C}^r - \bar{T} \Rightarrow \tilde{\Phi} = s - \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \Phi$$

7.13.

Obtenção dos sistemas que caracterizam as trajetórias ótimas das variáveis endógenas do modelo

Calculando as derivadas parciais do Lagrangeano do problema (4-1) com relação às suas variáveis de escolha e igualando os resultados a zero chega-se, após alguma álgebra, às seguintes equações:

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{x}_t} = 0 \Rightarrow \hat{x}_t - \gamma(\theta_h - \theta_c)M_{1,t} = 0 \quad (\text{A-13-1})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\pi}_t} = 0 \Rightarrow \lambda_\pi \hat{\pi}_t + M_{1,t} - M_{1,t-1} = 0 \quad (\text{A-13-2})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\lambda}_t} = 0 \Rightarrow M_{1,t} - M_{2,t} = 0 \quad (\text{A-13-3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \hat{p}_{A,t}} = 0 \Rightarrow & -\beta E_t \hat{p}_{A,t+1} + (\gamma + \beta + 1) \hat{p}_{A,t} - \hat{p}_{A,t-1} - \gamma \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t - \dots \\ & \dots - \frac{1-\eta}{\eta} \frac{1}{\lambda_\pi} (\beta E_t M_{2,t+1} - (\gamma + \beta + 1) M_{2,t} + M_{2,t-1}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-13-4})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{x}_0} = 0 \Rightarrow \hat{x}_0 - \gamma(\theta_h - \theta_c)M_{1,0} = 0 \quad (\text{A-13-5})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\pi}_0} = 0 \Rightarrow \lambda_\pi \hat{\pi}_0 + M_{1,0} = 0 \quad (\text{A-13-6})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\lambda}_0} = 0 \Rightarrow M_{1,0} - M_{2,0} = 0 \quad (\text{A-13-7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \hat{p}_{A,0}} = 0 \Rightarrow & -\beta E_0 \hat{p}_{A,1} + (\gamma + \beta + 1) \hat{p}_{A,0} - \hat{p}_{A,-1} - \gamma \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t - \dots \\ & \dots - \frac{1-\eta}{\eta} \frac{1}{\lambda_\pi} (\beta E_0 M_{2,1} - (\gamma + \beta + 1) M_{2,0}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-13-8})$$

onde (A-13-1) a (A-13-4) são válidas para $t > 0$ e (A-13-5) a (A-13-8) vigoram apenas em $t = 0$. Estas oito equações podem ser reduzidas a um conjunto com apenas quatro se escolhermos duas condições iniciais convenientes para os multiplicadores de Lagrange:

$$\hat{x}_t - \gamma(\theta_h - \theta_c)M_{1,t} = 0 \quad (\text{A-13-9})$$

$$\lambda_\pi \hat{\pi}_t + M_{1,t} - M_{1,t-1} = 0 \quad (\text{A-13-10})$$

$$M_{1,t} - M_{2,t} = 0 \quad (\text{A-13-11})$$

$$-\beta E_t \hat{p}_{A,t+1} + (\gamma + \beta + 1) \hat{p}_{A,t} - \hat{p}_{A,t-1} - \gamma \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t - \dots \quad (\text{A-13-12})$$

$$\dots - \frac{1-\eta}{\eta} \frac{1}{\lambda_\pi} (\beta E_t M_{2,t+1} - (\gamma + \beta + 1) M_{2,t} + M_{2,t-1}) = 0$$

$$M_{1,-1} = M_{2,-1} = 0 \quad (\text{A-13-13})$$

O sistema acima é válido para todo $t \geq 0$. Quando acrescido da Curva de Phillips (3-41), da restrição adicional (3-60) e da caracterização estocástica dos choques, ele define completamente as trajetórias ótimas para as variáveis endógenas, os multiplicadores de Lagrange e os instrumentos de política.

Ao calcular as derivadas parciais do Lagrangeano de (4-14) com relação às respectivas variáveis de escolha e, em seguida, igualar os resultados a zero, chega-se aos seguintes resultados:

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{x}_t} = 0 \Rightarrow \hat{x}_t - \gamma(\theta_h - \theta_c)M_{1,t} + M_{2,t} - \frac{1}{\beta} M_{2,t-1} = 0 \quad (\text{A-13-14})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\pi}_t} = 0 \Rightarrow \lambda_\pi \hat{\pi}_t + M_{1,t} - M_{1,t-1} - \frac{1}{\beta |\theta_c|} M_{2,t-1} = 0 \quad (\text{A-13-15})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\lambda}_t} = 0 \Rightarrow M_{1,t} - M_{3,t} = 0 \quad (\text{A-13-16})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{p}_{A,t}} = 0 \Rightarrow -\beta E_t \hat{p}_{A,t+1} + (\gamma + \beta + 1) \hat{p}_{A,t} - \hat{p}_{A,t-1} - \gamma \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t - \dots \quad (\text{A-13-17})$$

$$\dots - \frac{1-\eta}{\eta} \frac{1}{\lambda_\pi} (\beta E_t M_{3,t+1} - (\gamma + \beta + 1) M_{3,t} + M_{3,t-1}) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{i}_t} = 0 \Rightarrow |\theta_c| \lambda_t \hat{i}_t + M_{2,t} = 0 \quad (\text{A-13-18})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{x}_0} = 0 \Rightarrow \hat{x}_0 - \gamma(\theta_h - \theta_c)M_{1,0} + M_{2,0} = 0 \quad (\text{A-13-19})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\pi}_0} = 0 \Rightarrow \lambda_\pi \hat{\pi}_0 + M_{1,0} = 0 \quad (\text{A-13-20})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\lambda}_0} = 0 \Rightarrow M_{1,0} - M_{3,0} = 0 \quad (\text{A-13-21})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \hat{p}_{A,0}} = 0 \Rightarrow & -\beta E_0 \hat{p}_{A,1} + (\gamma + \beta + 1) \hat{p}_{A,0} - \hat{p}_{A,-1} - \gamma \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t - \dots \\ & \dots - \frac{1-\eta}{\eta} \frac{1}{\lambda_\pi} (\beta E_0 M_{3,1} - (\gamma + \beta + 1) M_{3,0}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-13-22})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{i}_0} = 0 \Rightarrow |\theta_c| \lambda_i \hat{i}_0 + M_{2,0} = 0 \quad (\text{A-13-23})$$

As equações (A-13-14) a (A-13-18) são válidas para $t > 0$, enquanto que (A-13-19) a (A-13-23) vigoram apenas em $t = 0$. Estas dez equações podem ser reduzidas a um conjunto com apenas cinco desde que se atribuam condições iniciais para os multiplicadores de Lagrange:

$$\hat{x}_t - \gamma (\theta_h - \theta_c) M_{1,t} + M_{2,t} - \frac{1}{\beta} M_{2,t-1} = 0 \quad (\text{A-13-24})$$

$$\lambda_\pi \hat{\pi}_t + M_{1,t} - M_{1,t-1} - \frac{1}{\beta |\theta_c|} M_{2,t-1} = 0 \quad (\text{A-13-25})$$

$$M_{1,t} - M_{3,t} = 0 \quad (\text{A-13-26})$$

$$\begin{aligned} & -\beta E_t \hat{p}_{A,t+1} + (\gamma + \beta + 1) \hat{p}_{A,t} - \hat{p}_{A,t-1} - \gamma \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t - \dots \\ & \dots - \frac{1-\eta}{\eta} \frac{1}{\lambda_\pi} (\beta E_t M_{3,t+1} - (\gamma + \beta + 1) M_{3,t} + M_{3,t-1}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-13-27})$$

$$|\theta_c| \lambda_i \hat{i}_t + M_{2,t} = 0 \quad (\text{A-13-28})$$

$$M_{1,-1} = M_{2,-1} = M_{3,-1} = 0 \quad (\text{A-13-29})$$

As condições iniciais (A-13-29) permitem escrever um sistema válido para todo $t \geq 0$. As condições de 1ª ordem (4-22) a (4-25) relativas ao problema (4-21) foram obtidas utilizando um procedimento análogo.

Os cálculos relativos ao Lagrangeano do problema (4-46) chegam às mesmas equações (A-13-14) a (A-13-23); como anteriormente, as cinco primeiras

são válidas para $t > 0$ e as restantes vigoram apenas em $t = 0$. Para obter um conjunto de cinco equações válido para todo $t \geq 0$ basta adotar as mesmas condições iniciais dadas em (A-13-29); o sistema resultante continua sendo dado por (A-13-24) a (A-13-29) e, ao ser acrescido da IS intertemporal (3-39), da Curva de Phillips (4-43), da restrição adicional (3-59) e da caracterização estocástica dos choques, ele define completamente as trajetórias ótimas para as variáveis endógenas, os multiplicadores de Lagrange e os instrumentos de política.

Os cálculos relativos ao Lagrangeano do problema (4-52) também levam às mesmas equações (A-13-14) a (A-13-23), as cinco primeiras válidas para $t > 0$ e as restantes vigorando apenas em $t = 0$. Para obter um conjunto de cinco equações válido para todo $t \geq 0$ basta adotar as mesmas condições iniciais em (A-13-29); o sistema resultante continua sendo dado por (A-13-24) a (A-13-29) e, ao ser acrescido da IS intertemporal (3-39), da Curva de Phillips (4-43) (com o termo $\gamma \hat{\tau}_t$ substituído por $\gamma \mu \hat{g}_t$), da restrição adicional (3-59) e da caracterização estocástica dos choques, ele define completamente as trajetórias ótimas para as variáveis endógenas, os multiplicadores de Lagrange e os instrumentos de política.

No que diz respeito ao problema (4-58), calculando as derivadas parciais do Lagrangeano com relação às variáveis de escolha pertinentes e igualando os resultados a zero chega-se, após alguma álgebra, às mesmas equações (A-13-14), (A-13-16) e (A-13-17), porém (A-13-15) e (A-13-18) se transformam em:

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\pi}_t} = 0 \Rightarrow \lambda_{\pi} \hat{\pi}_t + (1 + \phi) M_{1,t} - M_{1,t-1} - \frac{1}{\beta |\theta_c|} M_{2,t-1} = 0 \quad (\text{A-13-30})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{i}_t} = 0 \Rightarrow \lambda_i \hat{i}_t + \frac{M_{2,t}}{|\theta_c|} - \phi \beta E_t M_{1,t+1} = 0 \quad (\text{A-13-31})$$

A única equação válida somente para $t = 0$ que se modifica é (A-13-23):

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{i}_0} = 0 \Rightarrow \lambda_i \hat{i}_0 + \frac{M_{2,0}}{|\theta_c|} - \phi \beta E_0 M_{1,1} = 0 \quad (\text{A-13-32})$$

A redução do conjunto de equações resulta em:

$$\hat{x}_t - \gamma(\theta_h - \theta_c)M_{1,t} + M_{2,t} - \frac{1}{\beta}M_{2,t-1} = 0 \quad (\text{A-13-33})$$

$$\lambda_\pi \hat{\pi}_t + (1 + \phi)M_{1,t} - M_{1,t-1} - \frac{1}{\beta|\theta_c|}M_{2,t-1} = 0 \quad (\text{A-13-34})$$

$$M_{1,t} - M_{3,t} = 0 \quad (\text{A-13-35})$$

$$\begin{aligned} & -\beta E_t \hat{p}_{A,t+1} + (\gamma + \beta + 1)\hat{p}_{A,t} - \hat{p}_{A,t-1} - \gamma \frac{1-\eta}{\delta_x + 1} \hat{\varepsilon}_t - \dots \\ & \dots - \frac{1-\eta}{\eta} \frac{1}{\lambda_\pi} (\beta E_t M_{3,t+1} - (\gamma + \beta + 1)M_{3,t} + M_{3,t-1}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-13-36})$$

$$\lambda_i \hat{i}_t + \frac{M_{2,t}}{|\theta_c|} - \phi \beta E_t M_{1,t+1} = 0 \quad (\text{A-13-37})$$

$$M_{1,-1} = M_{2,-1} = M_{3,-1} = 0 \quad (\text{A-13-38})$$

onde, como já havíamos feito anteriormente, atribuímos condições iniciais para os multiplicadores de Lagrange.

7.14.

Alguns comentários sobre as regras ótimas de política monetária discutidas na Seção 4

De acordo com Giannoni e Woodford (2002a, 2002b), uma regra de política monetária ótima é aquela que implementa a solução do problema de maximização do bem estar do agente representativo. Esta solução deve respeitar um determinado conjunto de restrições formado pelas equações estruturais da economia em questão. A função objetivo pode ser microfundamentada, conforme sugerido por Rotemberg e Woodford (1997, 1999), ou mesmo ser uma outra função de bem estar *ad hoc* considerada conveniente. A solução deste problema de otimização fornece as trajetórias ótimas para as variáveis endógenas relevantes e os instrumentos de política, de maneira que uma determinada regra de política monetária é julgada pela sua capacidade em reproduzir o comportamento ótimo encontrado para a taxa de juros nominal.

Giannoni e Woodford argumentam que esta regra deve possuir três propriedades fundamentais, a saber, implementar um equilíbrio determinado, independer das propriedades estatísticas dos choques exógenos e ser ótima de acordo com uma perspectiva atemporal. Os autores desenvolvem um método geral

para encontrar regras de política monetária ótimas com essas características e discutem as suas principais propriedades.

A aplicação deste método a modelos concretos é imediata e os autores fornecem uma série de exemplos ilustrativos. Em termos práticos o princípio é tentar eliminar os multiplicadores de Lagrange das restrições do problema de maximização para obter uma expressão relacionando a taxa de juros nominal e as demais variáveis endógenas da economia (por exemplo, as defasagens do instrumento, o hiato do produto, a inflação e assim por diante). Ao proceder desta maneira a expressão encontrada naturalmente satisfaz um dado sub-conjunto das condições de primeira ordem do problema de otimização.

A aplicação desse procedimento ao modelo de economia aberta da Seção 4.2 (ou seja, sem a inclusão do instrumento auxiliar de estabilização ($\hat{\lambda}_t = 0$ para todo t)) começa com a utilização de (4-24) para calcular $M_{2,t}$ e $M_{2,t-1}$ como função de \hat{i}_t e \hat{i}_{t-1} , respectivamente. O segundo passo é lançar mão de (4-22) e dos valores encontrados para $M_{2,t}$ e $M_{2,t-1}$ para expressar $M_{1,t}$ como função de \hat{x}_t , \hat{i}_t e \hat{i}_{t-1} . Em seguida as mesmas fontes são utilizadas para expressar $M_{1,t-1}$ como função de \hat{x}_{t-1} , \hat{i}_{t-1} e \hat{i}_{t-2} . O passo derradeiro consiste em substituir os valores encontrados para $M_{1,t}$, $M_{1,t-1}$ e $M_{2,t-1}$ em (4-23) para, após alguma álgebra, encontrar a regra de política ótima (4-27). Esta regra, juntamente com as equações (3-39) (IS intertemporal), (3-41) (Curva de Phillips com a condição $\hat{\lambda}_t = 0$ para todo t) e a caracterização estocástica dos choques ((4-7) a (4-9)), forma um sistema em expectativas racionais cuja solução é precisamente o conjunto de trajetórias ótimas que encontramos ao resolver o problema (4-21).

Alguns comentários adicionais são necessários. Em primeiro lugar, a regra de política monetária indicada em (4-27) continua sendo ótima para os casos estudados nas Seções 4.3 e 4.4, isto porque as equações (4-22), (4-23) e (4-24) também estão presentes no conjunto formado pelas condições de 1ª ordem dos problemas (4-48) e (4-56). O mesmo não ocorre, porém, com o modelo de economia estudado na Seção 4.5. Repare também que as regras pertencentes às famílias (4-28) e (4-29) podem ser vistas como versões simplificadas da regra ótima (4-27). Na primeira família a taxa de juros nominal depende apenas da

inflação corrente, enquanto que na segunda ela também depende da sua primeira defasagem.

Cabe perguntar porque escolhemos estas famílias para construir as referências de desempenho que precisamos para julgar os ganhos de se utilizar o instrumento alternativo. O ponto de partida para a sua motivação é a conhecida regra de Taylor, segundo a qual a taxa de juros nominal responde à última informação disponível acerca da inflação e do nível de produto. Nas regras que contemplamos, o nível de produto é excluído porque não é, na verdade, um indicador muito útil da medida do nível de atividade que é relevante para a dinâmica da inflação e para o bem estar social – o hiato do produto, definido em relação a um produto potencial que flutua ao sabor dos choques que atingem a economia (ver Rotemberg e Woodford (1997, 1999)). Uma alternativa seria incluir na função de reação da autoridade monetária a medida correta do hiato do produto, mas essa é uma variável de difícil mensuração por envolver um elemento não observável, o produto potencial a cada período. Por isso excluimos as variáveis de atividade das famílias de regras que contemplamos.

Adicionalmente, a dependência com relação à primeira defasagem da taxa de juros nominal é razoável pelas razões discutidas em Woodford (1999), Rotemberg e Woodford (1999) e Giannoni e Woodford (2002b). Segundo os autores, regras de política monetária ótimas possuiriam algum grau de *history dependence*, ou seja, especificariam que o valor assumido pelo instrumento no presente deveria depender dos seus valores passados; os autores alegam que isto permitiria influir positivamente no processo de formação das expectativas dos agentes, e demonstram também que regras com *feedback* desta natureza tendem a apresentar melhores resultados de estabilização.

Encerraremos este Apêndice com uma breve discussão dos resultados encontrados para os coeficientes das regras ótimas de política monetária pertencentes às famílias (4-28) e (4-29). Em primeiro lugar vamos analisar as escolhas ótimas associadas ao modelo estudado na Seção 4.2.

A Tabela 16 mostra os coeficientes ótimos calculados para valores crescentes do parâmetro λ_t . A coluna designada por (A) traz os resultados para a família (4-28), enquanto que as colunas identificadas por (B1) e (B2) trazem os

pesos ótimos associados à família (4-29) (as colunas (B1) e (B2) informam os valores ótimos encontrados para os pesos ϕ_π e ϕ_i , respectivamente).

Em se tratando dos resultados indicados em (A), repare que todos os pesos são negativos e sua magnitude diminui à medida que o valor de λ_i aumenta. Este último resultado já era esperado, pois valores mais elevados de λ_i estão associados a maiores dificuldades para ajustar a taxa de juros nominal; desta maneira é natural que a intensidade da reação do instrumento se adapte, tornando-se mais moderada.

Já o sinal negativo dos pesos ϕ_π ótimos pode provocar algum estranhamento, porém é comum obter valores ótimos negativos para alguns dos pesos presentes nas principais famílias de regras de política monetária; de fato este tipo de resultado é encontrado, por exemplo, em Woodford (1999) e Calixto (2003).

Observando a coluna (B1), por sua vez, percebe-se que o peso ótimo ϕ_i cresce à medida que o valor de λ_i aumenta. A intuição deste resultado é simples. Quando o valor de λ_i aumenta, as restrições ao ajuste da taxa de juros nominal se tornam mais intensas e o comportamento ótimo do instrumento deve necessariamente envolver uma menor volatilidade. Este objetivo é atingido quando o valor de ϕ_i aumenta, pois assim conseguimos adicionar mais persistência à trajetória do instrumento e também potencializar os efeitos de movimentos de menor amplitude para fins de estabilização.

A Tabela 17 mostra os pesos ótimos encontrados para o modelo discutido na Seção 4.3. Como anteriormente, a coluna designada por (A) traz os resultados obtidos para a família (4-28), enquanto que as colunas (B1) e (B2) indicam os pesos ótimos relacionados à família (4-29). O quadro que emerge da observação de (A) pode ser considerado intrigante na medida em que os pesos ótimos obtidos são, a princípio, negativos, e depois se tornam positivos quando o parâmetro λ_i assume valores mais elevados.

Esta descontinuidade no mapeamento de λ_i para o valor ótimo do parâmetro ϕ_π pode ser entendida se observamos atentamente as Figuras 35 a 38. Cada uma delas traz a perda L^* definida em (4-26) como função do valor assumido pelo

peso ϕ_π ; o que muda em cada um é o valor assumido pelo parâmetro λ_i , que se torna cada vez maior. Repare que, à medida que o valor de λ_i aumenta, a porção do gráfico relativa a valores negativos de ϕ_π vai perdendo o seu formato (aproximado) de “U”, enquanto que a porção relacionada com valores positivos de ϕ_π vai ganhando uma curvatura cada vez maior. A partir de um determinado ponto os papéis se invertem e é a porção envolvendo pesos ϕ_π positivos que passa a exibir um formato aproximado de “U”; desta maneira, o mínimo global muda de posição e passa a estar nesta parte do gráfico. Em suma, o sinal do peso ótimo ϕ_π muda bruscamente, porém esta mudança reflete um movimento suave do gráfico $L^* \times \phi_\pi$.

A observação da coluna (B1) permite concluir que o perfil dos valores ótimos calculados para ϕ_i é o mesmo, ou seja, seu valor cresce à medida que λ_i aumenta; isto ocorre pelos mesmos motivos já discutidos anteriormente.

As Tabelas 18 e 19 mostram os pesos ótimos encontrados para os modelos discutidos nas Seções 4.4 e 4.5. A primeira tabela diz respeito à presença da restrição fiscal (4-78), enquanto que a segunda está associada à restrição fiscal (4-51). Como antes as colunas designadas por (A) trazem os resultados obtidos para a família (4-28), enquanto que as colunas (B1) e (B2) indicam os pesos ótimos encontrados para a família (4-29). Conforme já ocorria anteriormente, a coluna (A) mostra que os pesos ótimos ϕ_π obtidos são, a princípio, negativos, e se tornam positivos à medida que λ_i assume valores mais elevados. Também em conformidade com os resultados do caso anterior, a coluna (B1) indica que o valor ótimo do peso ϕ_i cresce à medida que λ_i aumenta. As interpretações destes fatos seguem as mesmas linhas já delineadas para os modelos anteriores.

λ_i	(A)	(B1): ϕ_π	(B2): ϕ_i
0	$+(-)\infty$	$+(-)\infty$	-
2	-75,3	226,5	23,1
4	-37,6	114,6	23,3
8	-18,7	57,3	23,3
16	-9,3	24,5	19,8
32	-4,7	14,3	23,1
64	-2,8	4,8	15,5
128	-2,8	3,6	22,9

Tabela 16: Pesos ótimos encontrados para regras de política monetária pertencentes às famílias (4-28) e (4-29). O modelo discutido é o da seção 4.2.

λ_i	(A)	(B1): ϕ_π	(B2): ϕ_i
0	11,2	8,2	0,8
2	13,1	6,8	1,5
4	15,8	5,8	2,0
8	26,8	4,5	2,7
16	-66,2	3,2	3,4
32	-8,4	2,0	4,0
64	-3,0	1,1	4,5
128	-2,8	0,6	4,8

Tabela 17: Pesos ótimos encontrados para regras de política monetária pertencentes às famílias (4-28) e (4-29). O modelo discutido é o da seção 4.3.

λ_i	(A)	(B1): ϕ_π	(B2): ϕ_i
0	8,3	5,8	0,9
2	9,3	4,8	1,4
4	10,6	4,2	1,7
8	14,7	3,3	2,2
16	62,4	2,3	2,7
32	-11,4	1,5	3,2
64	-3,4	0,8	3,6
128	-2,8	0,5	3,8

Tabela 18: Pesos ótimos encontrados para regras de política monetária pertencentes às famílias (4-28) e (4-29). O modelo discutido é o da Seção 4.4.

λ_i	(A)	(B1): ϕ_π	(B2): ϕ_i
0	4,5	3,9	0,9
2	4,8	3,5	0,7
4	5,1	3,2	1,0
8	6,1	2,6	1,4
16	9,8	2,0	1,9
32	-32,5	1,3	2,5
64	-3,1	0,8	2,9
128	-1,8	0,4	3,2

Tabela 19: Pesos ótimos encontrados para regras de política monetária pertencentes às famílias (4.28) e (4.29). O modelo é o discutido na Seção 4.5.

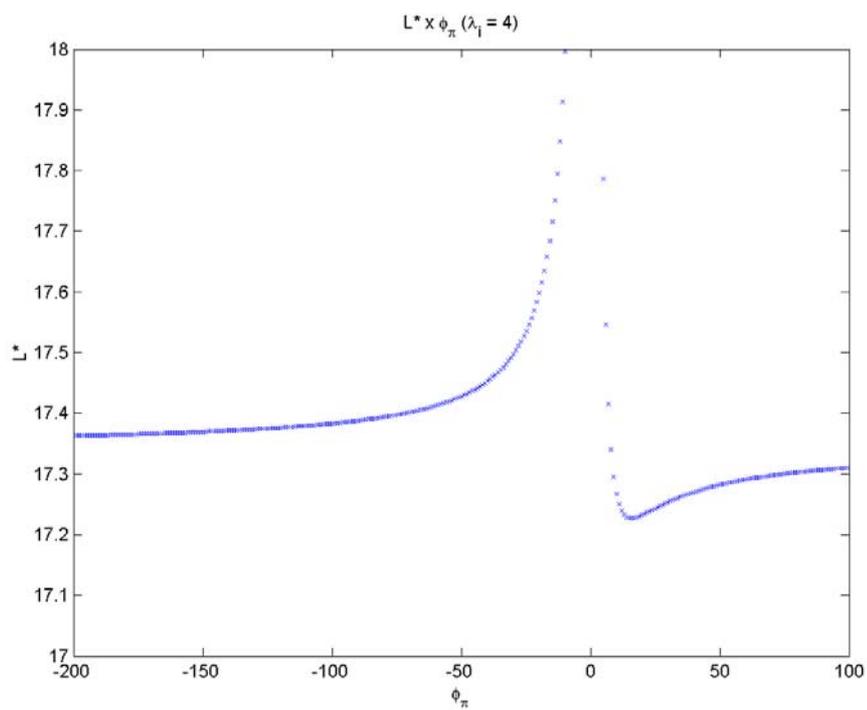


Figura 35: $L^* \times \phi_\pi (\lambda_i = 4)$.

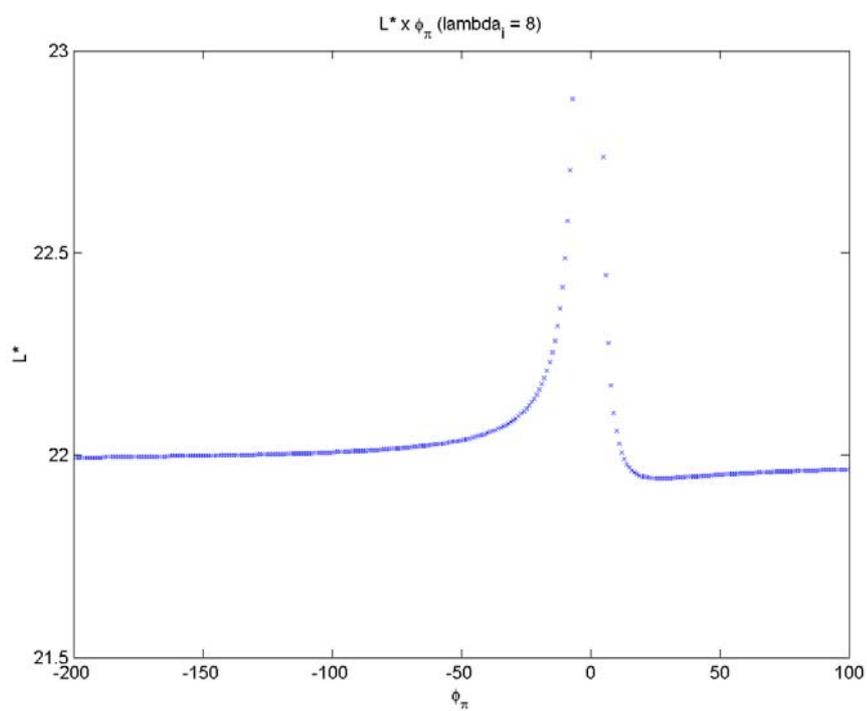


Figura 36: $L^* \times \phi_\pi (\lambda_i = 8)$.

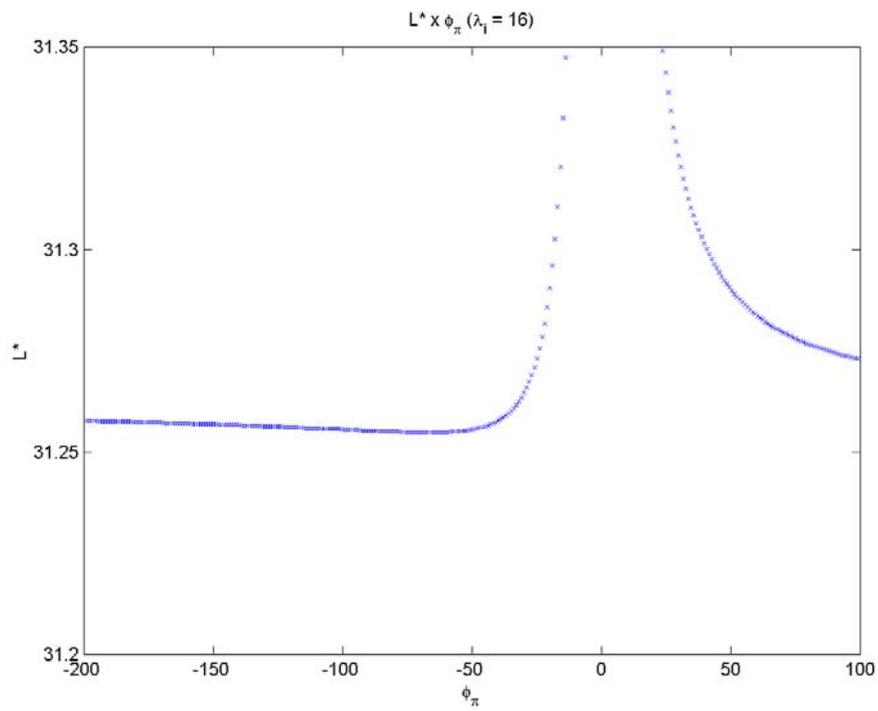


Figura 37: $L^* \times \phi_\pi (\lambda_i = 16)$.

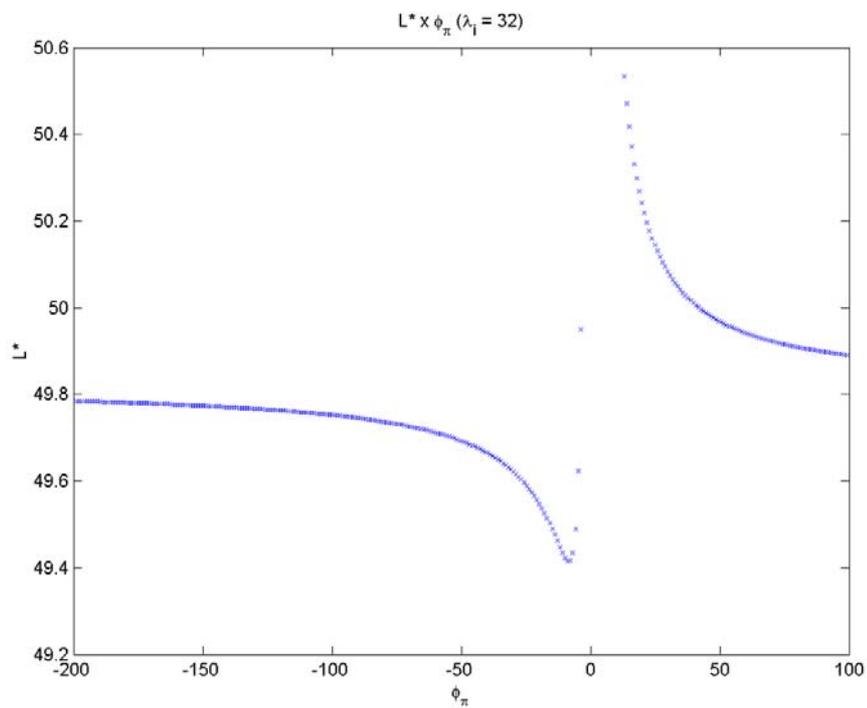


Figura 38: $L^* \times \phi_\pi (\lambda_i = 32)$.