



Simulação de Sistemas Dinâmicos

Prof^a Vivian Suzano Medeiros

PUC-Rio

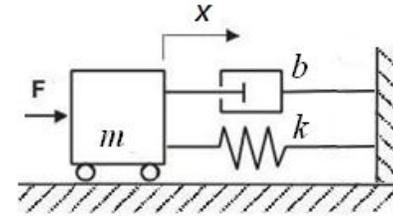
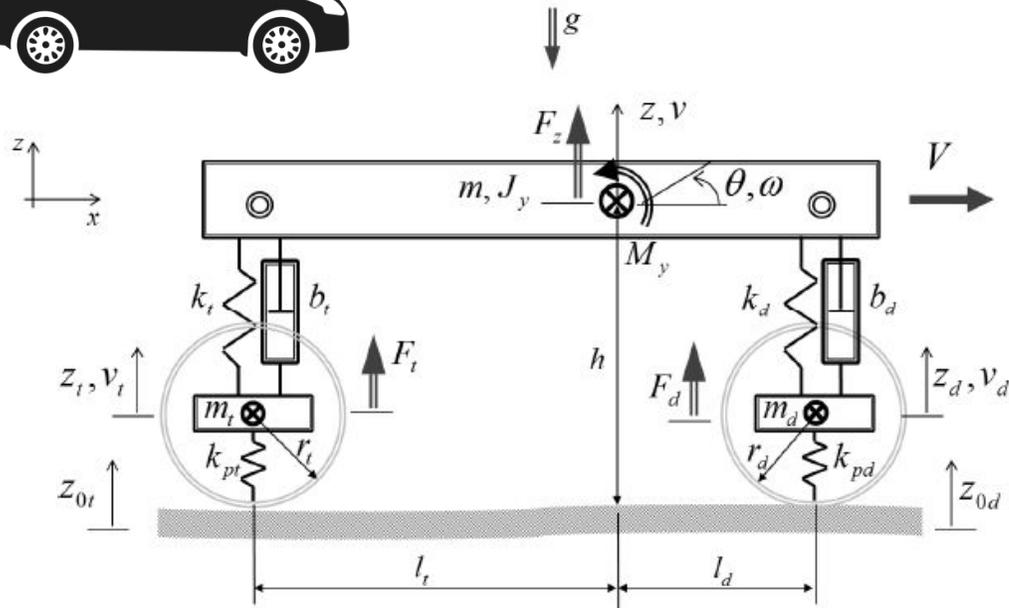
Modelagem de Sistemas

- Equação diferencial que descreve o comportamento do sistema.
- Utilizado para analisar e simular sistemas dinâmicos.
- Métodos:
 - Equação de Newton-Euler (vetorial, somatório de forças e momentos) -> Sistemas mecânicos, robóticos
 - Equação de Lagrange (somatório de energias cinética e potencial) -> Genérico
 - Leis de Kirchoff -> Sistemas Elétricos
 - Grafos de ligação -> Genérico e Modular

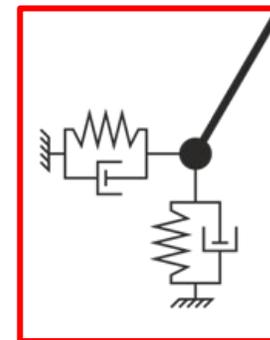
Sistema MMA

- Exemplo: Sistema massa-mola-amortecedor

Aplicações: Modelagem da suspensão de um veículo



Aplicações: Modelar o contato com o solo de um robô com pernas

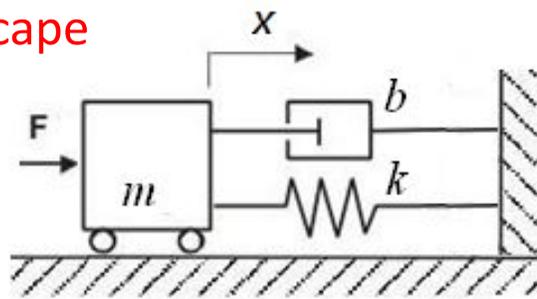


Robô Spot Mini, Boston Dynamics
<https://www.bostondynamics.com/spot>

Modelagem

- Exemplo: Sistema massa-mola-amortecedor

Simscape



ode45

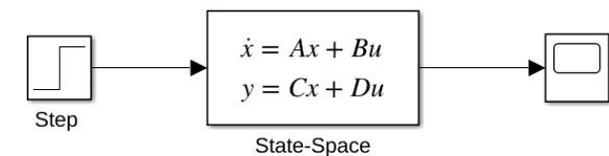
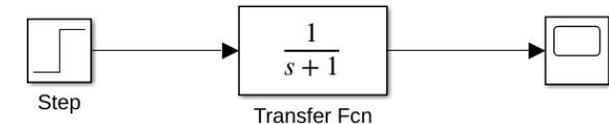
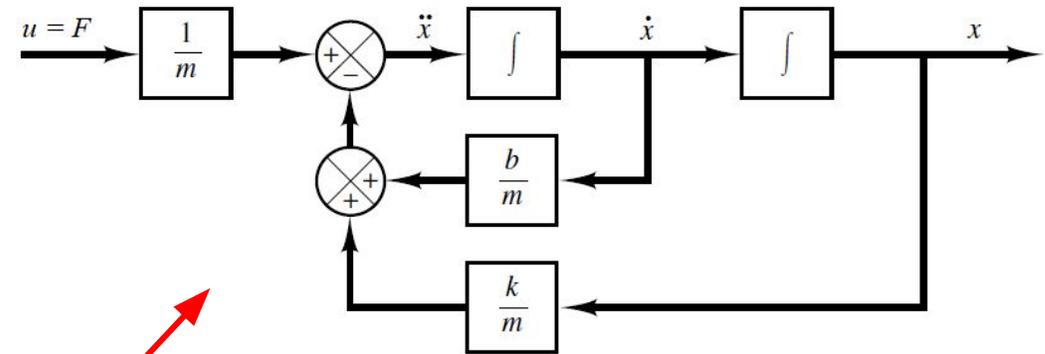
$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

$$F - kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$F = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

MATLAB

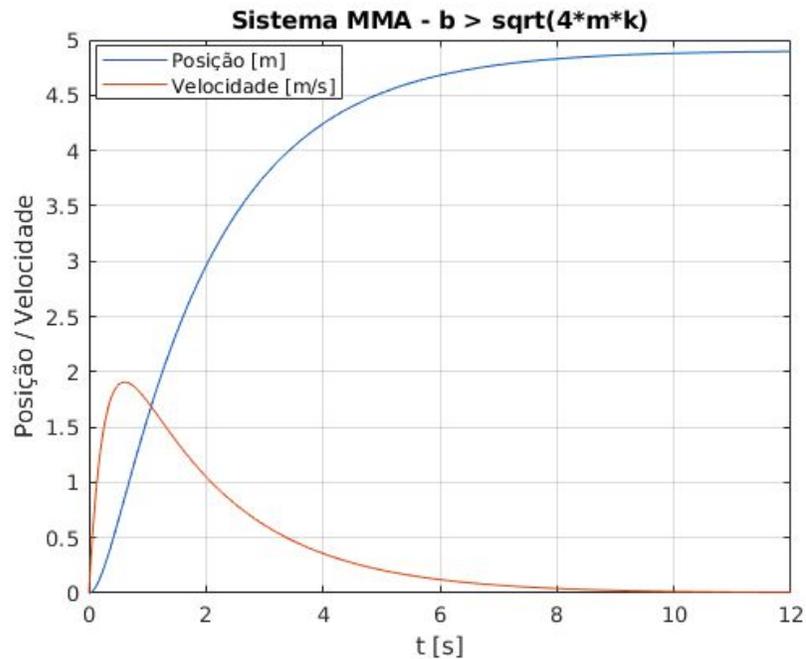
Simulink



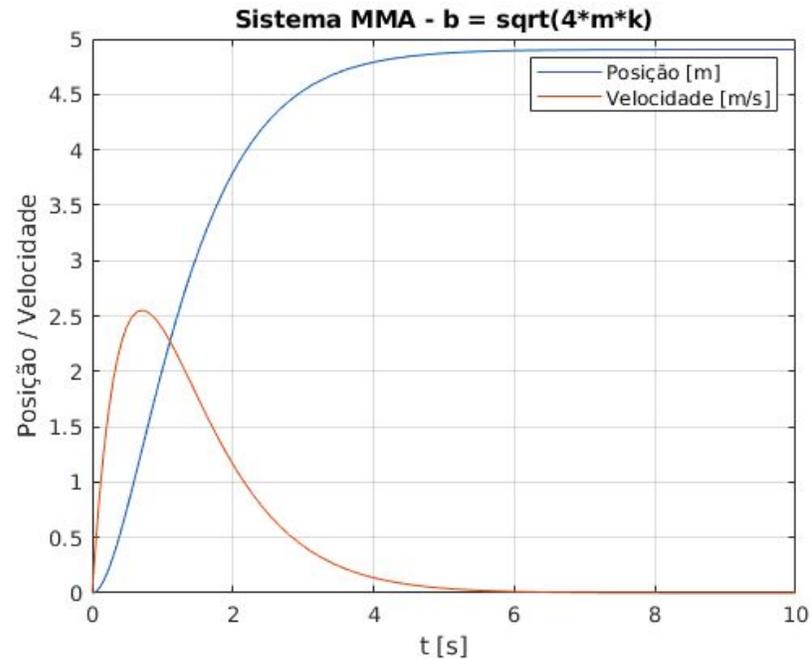
Simulação Dinâmica

- Exemplo: Sistema massa-mola-amortecedor

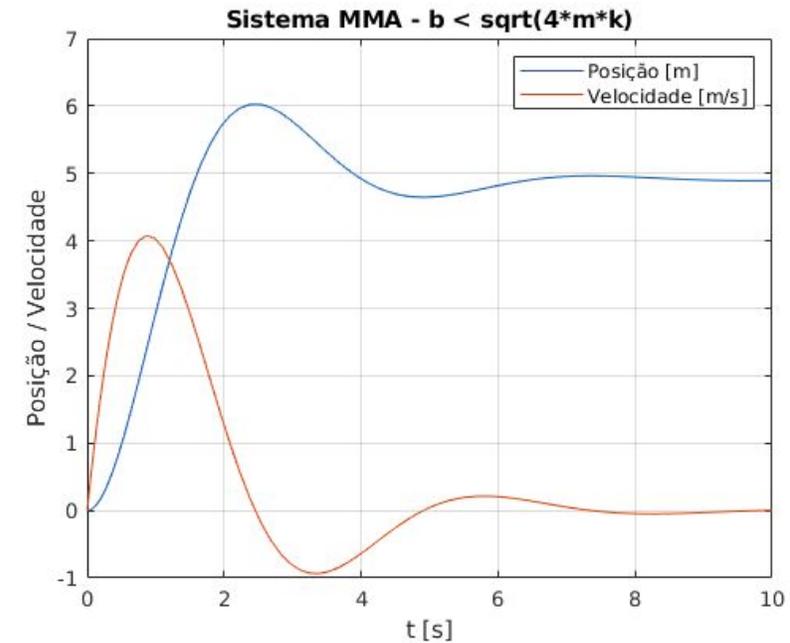
Não oscila!



Ponto crítico



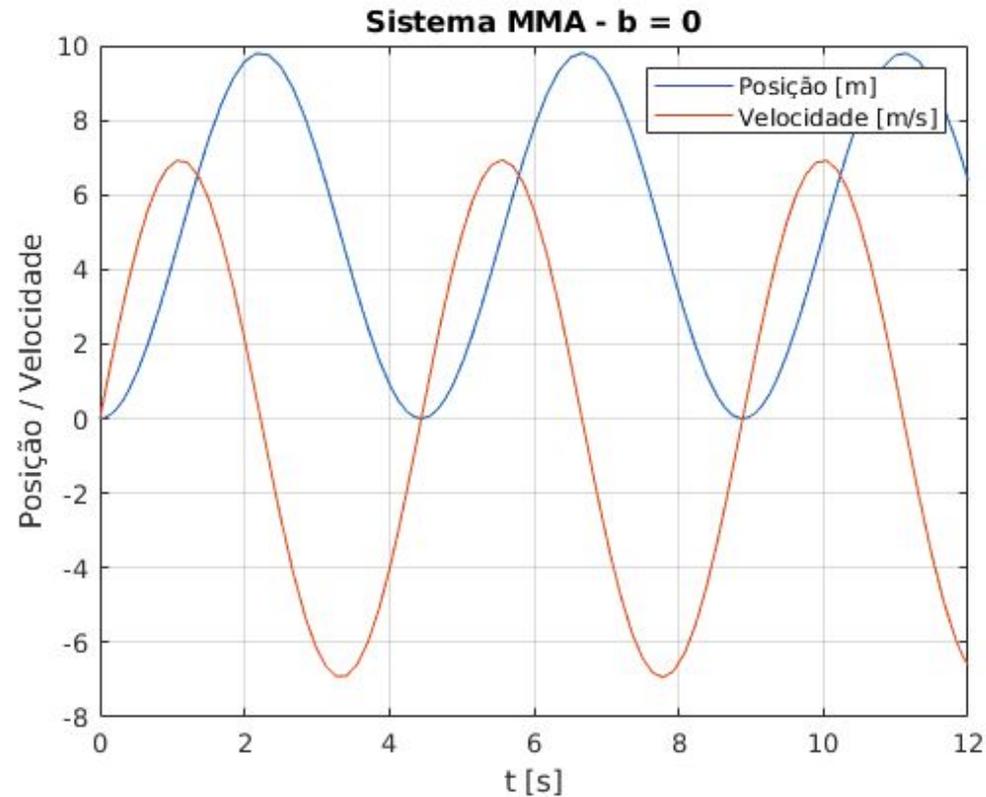
Oscila!



Simulação Dinâmica

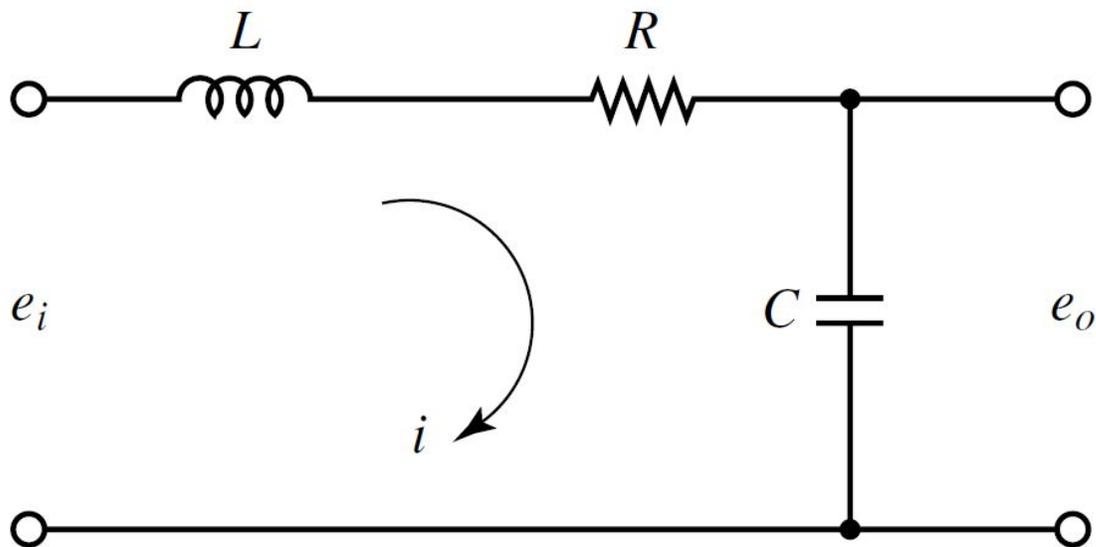
- Exemplo: Sistema massa-mola-amortecedor

b = 0:
Sem amortecimento, oscila para sempre.



Circuito RLC

- Exemplo: Circuito RLC série (resistor-indutor-capacitor)



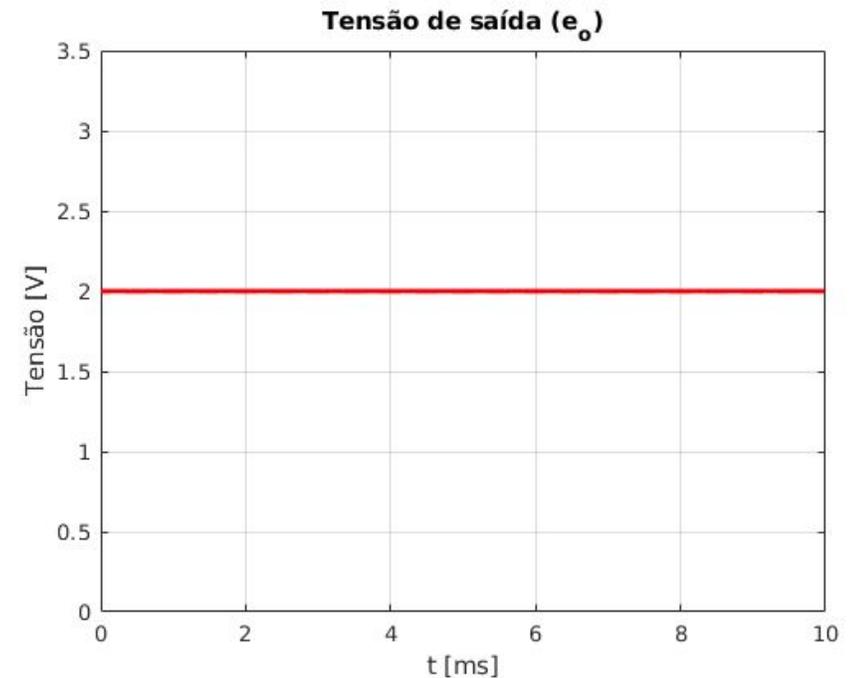
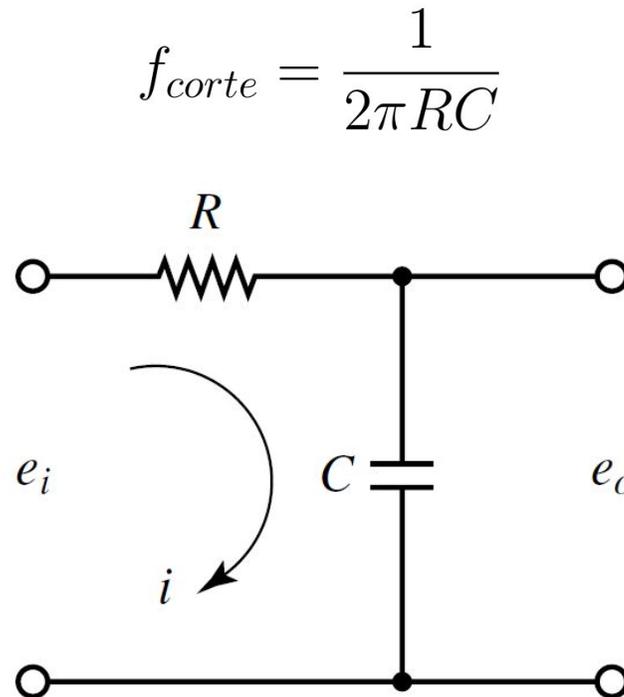
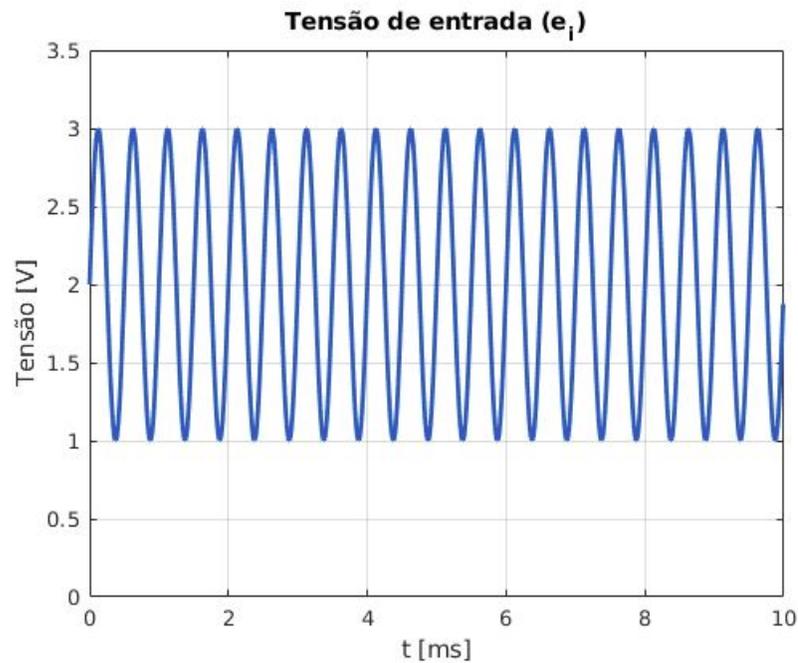
Aplicações:

- Sistemas de rádio e comunicações: seleção de uma certa faixa de frequências de ondas de rádio.
- Circuitos osciladores para geração de ondas periódicas.
- Pode ser rearranjado (série-paralelo) para implementar filtros passa-faixa, passa-baixa ou passa-alta.

Circuito RLC

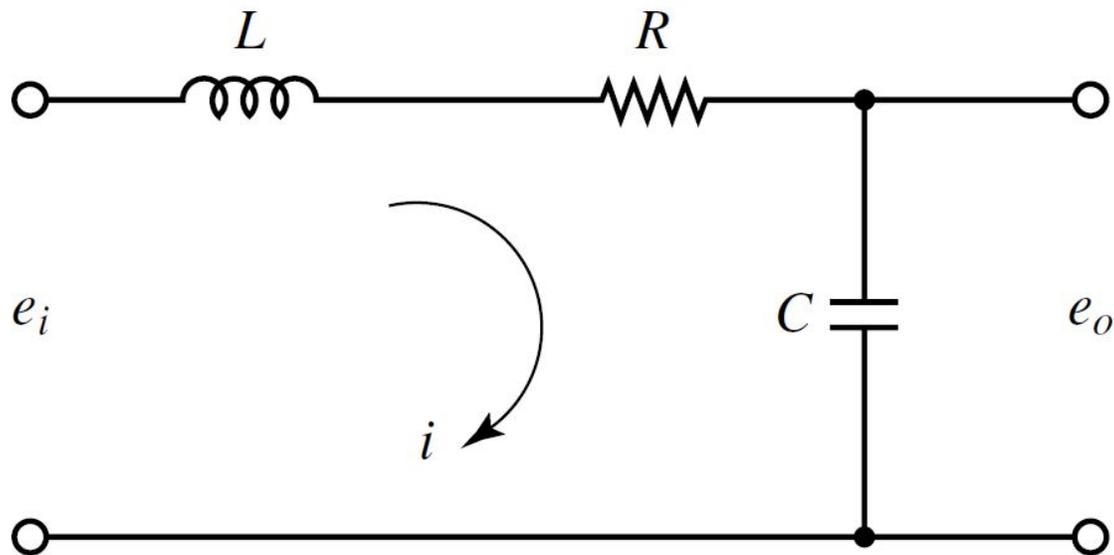
- Exemplo: Circuito RLC série (resistor-indutor-capacitor)

Circuito passa-baixa: rejeita altas frequências



Modelagem

- Exemplo: Circuito RLC série (resistor-indutor-capacitor)



Tensão no indutor

$$V_i = L \frac{di}{dt}$$

Tensão no capacitor

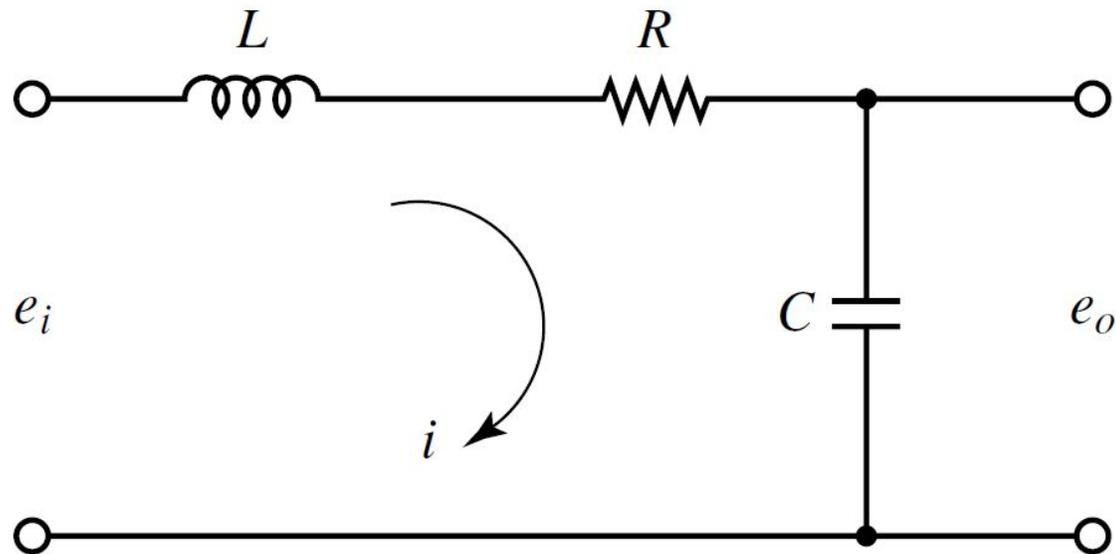
$$V_c = \frac{1}{C} \int i dt$$

Lei das malhas (Kirchoff)

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i$$

Modelagem

- Exemplo: Circuito RLC série (resistor-indutor-capacitor)



Tensão no indutor

$$V_i = L \frac{di}{dt}$$

Tensão no capacitor

$$V_c = \frac{1}{C} \int i dt$$

Lei das malhas (Kirchoff)

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i$$

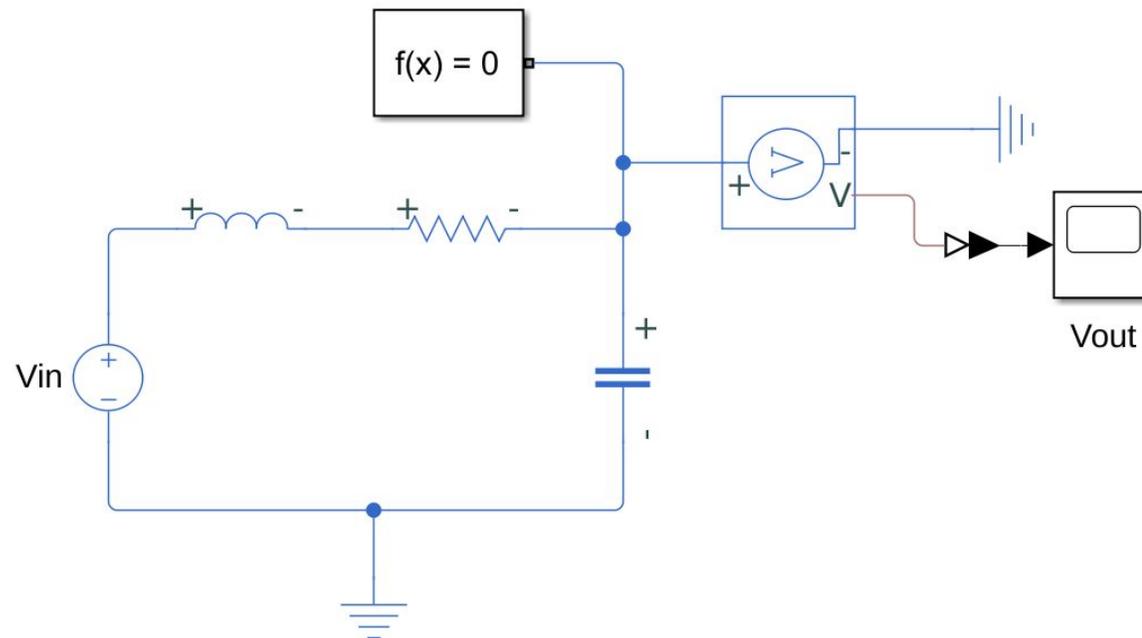
$$\frac{1}{C} \int i dt = e_o$$



Simulação Dinâmica

- Exemplo: Circuito RLC série (resistor-indutor-capacitor)

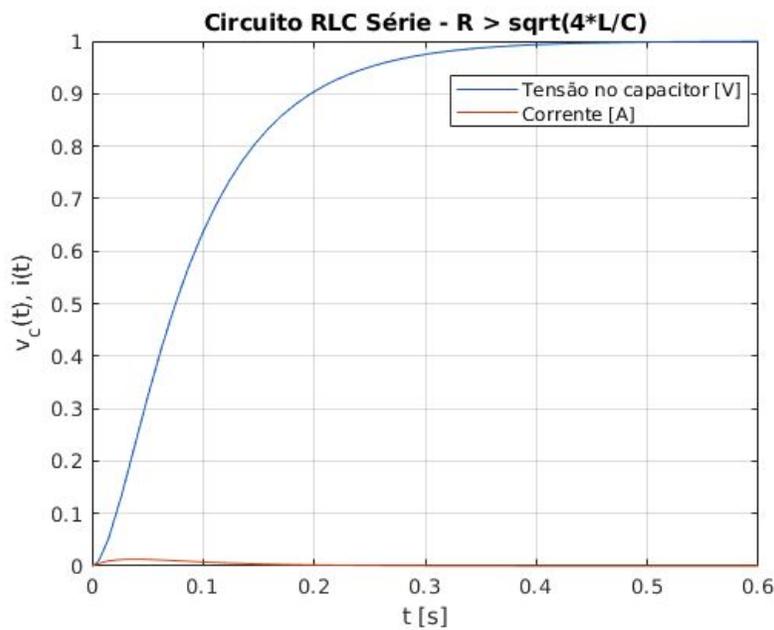
Simscape



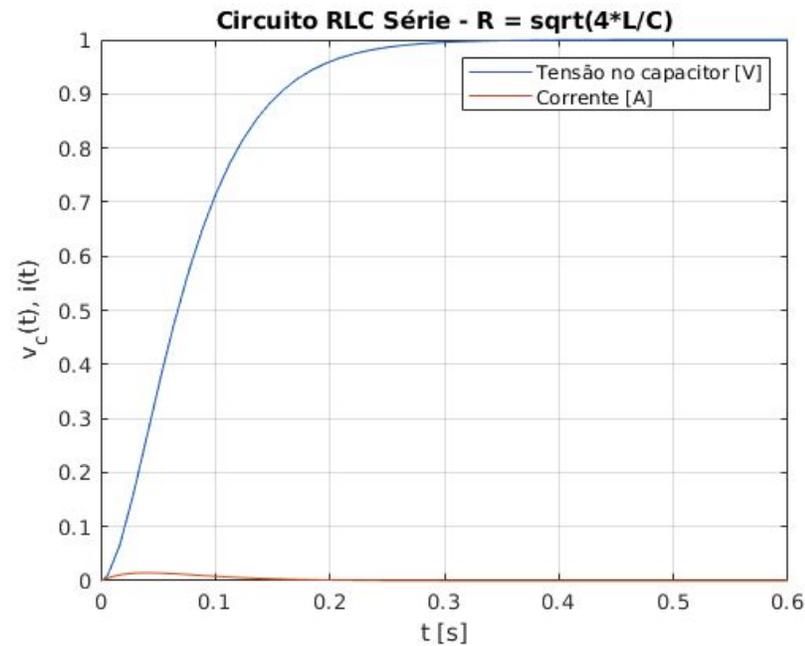
Simulação Dinâmica

- Exemplo: Circuito RLC série (resistor-indutor-capacitor)

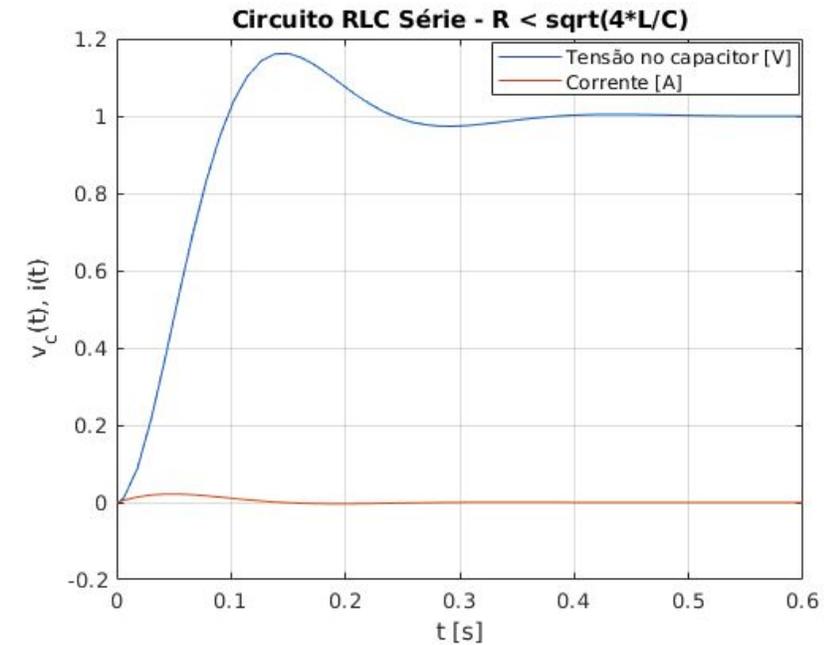
Não oscila!



Ponto crítico



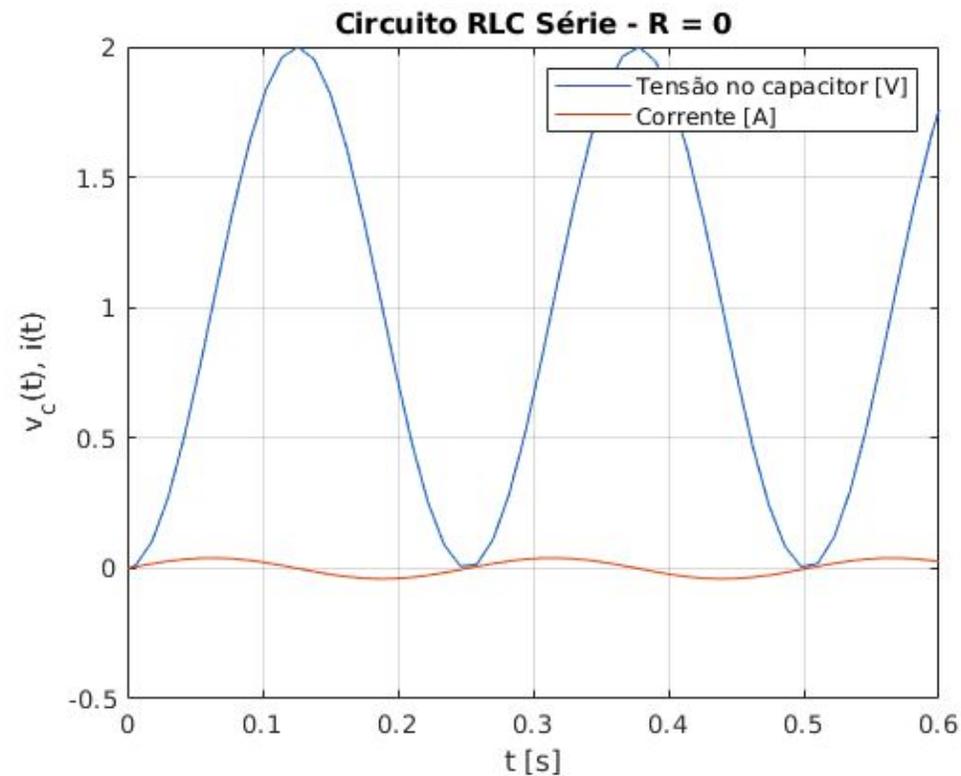
Oscila!



Simulação Dinâmica

- Exemplo: Circuito RLC série (resistor-indutor-capacitor)

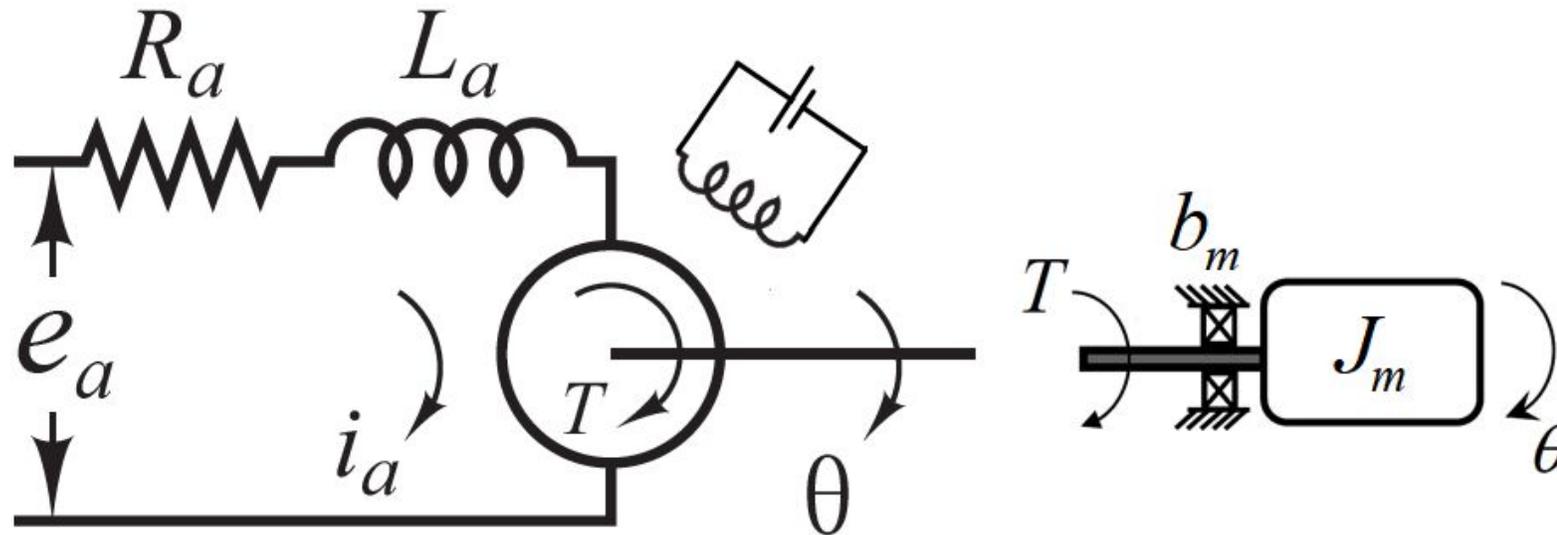
R = 0:
Circuito oscilador com
frequência $f = \sqrt{1/LC}$



Motor DC com Escovas

- Modelagem:

Motor de corrente contínua com campo constante controlado pela corrente de armadura:



Motor DC com Escovas

- Parâmetros (exemplo):

Constante de velocidade do motor:

$$K_v = \frac{\omega_{\text{no-load}}}{V}$$

$$K_e = \frac{1}{K_v}$$

Constante de torque do motor:

$$K_t = \frac{T_{\text{stall}} R_a}{V}$$

			Order Number			
			118749	118750	118751	118752
Motor Data						
1	Assigned power rating	W	20	20	20	20
2	Nominal voltage	Volt	9.0	15.0	18.0	24.0
3	No load speed	rpm	10100	9760	10300	9660
4	Stall torque	mNm	229	222	218	240
5	Speed / torque gradient	rpm / mNm	47.6	45.7	49.0	41.2
6	No load current	mA	111	62	55	37
7	Starting current	mA	29100	15700	13500	10300
8	Terminal resistance	Ohm	0.309	0.953	1.33	2.32
9	Max. permissible speed	rpm	11000	11000	11000	11000
10	Max. continuous current	mA	1500	1500	1500	1230
11	Max. continuous torque	mNm	11.8	21.2	24.2	28.4
12	Max. power output at nominal voltage	mW	52800	52900	55600	58400
13	Max. efficiency	%	77	82	83	85
14	Torque constant	mNm / A	7.88	14.1	16.1	23.2
15	Speed constant	rpm / V	1210	677	592	412
16	Mechanical time constant	ms	6	5	5	5
17	Rotor inertia	gcm ²	11.3	10.00	9.11	10.3
18	Terminal inductance	mH	0.03	0.09	0.12	0.24
19	Thermal resistance housing-ambient	K / W	14	14	14	14
20	Thermal resistance rotor-housing	K / W	3.1	3.1	3.1	3.1
21	Thermal time constant winding	s	13	11	10	12

R_a →

K_t →

K_v →

J_m →

L_a →

Motor DC com Escovas

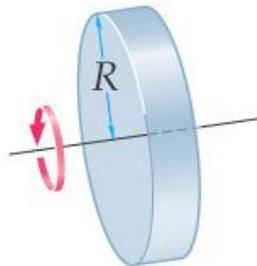
- Modelagem:

Inércia da carga (exemplos):

- Vex wheel diâmetro 127 mm: $I_w = 0.00051 \text{ kg m}^2$



- Disco de alumínio de raio 60 mm e massa 306 g:

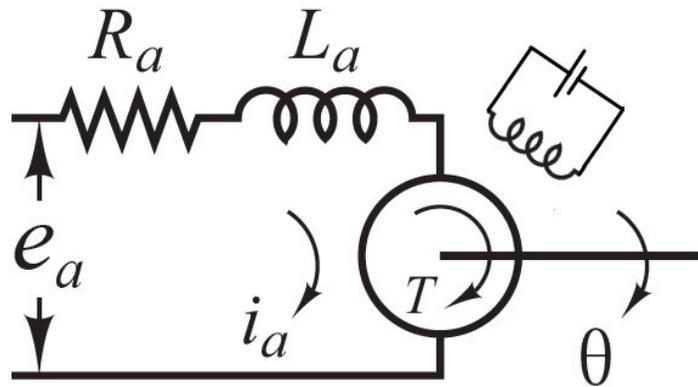


$$I_d = \frac{1}{2}MR^2 = 0.00055 \text{ kg m}^2$$

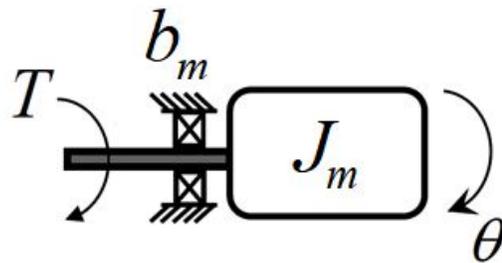
Motor DC com Escovas

- Modelagem:

Motor de corrente contínua com campo constante controlado pela corrente de armadura:



$$L_a \frac{di_a}{dt} = e_a - R_a i_a - K_e \frac{d\theta}{dt}$$

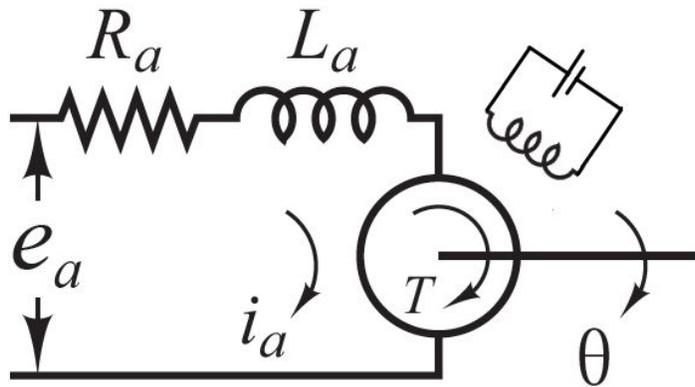


$$J_m \frac{d^2\theta}{dt^2} = T - b_m \frac{d\theta}{dt} = K_t i_a - b_m \frac{d\theta}{dt}$$

Motor DC com Escovas

- Modelagem em espaço de estados:

Motor de corrente contínua com campo constante controlado pela corrente de armadura:



Variáveis de estado:

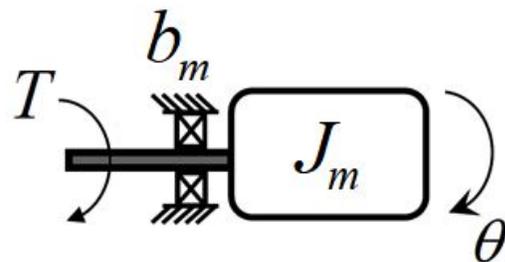
$$x_1(t) = i_a(t)$$

$$x_2(t) = \theta(t)$$

$$x_3(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Variável de entrada: $e_a(t)$

Variável de saída: $\theta(t)$



Modelagem em espaço de estados:

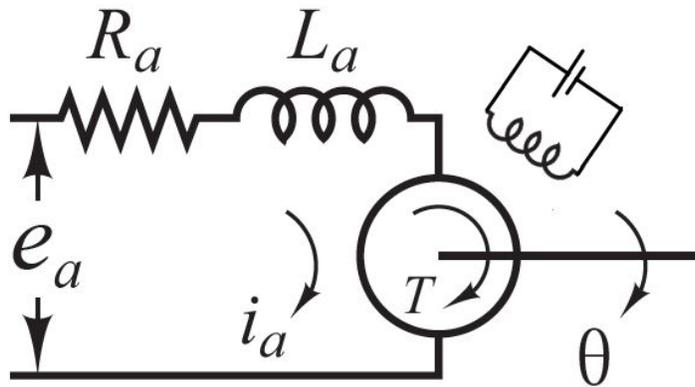
$$\frac{d\underline{X}}{dt} = \underline{A} \underline{X} + \underline{B} \underline{U}$$

$$\underline{Y} = \underline{C} \underline{X} + \underline{D} \underline{U}$$

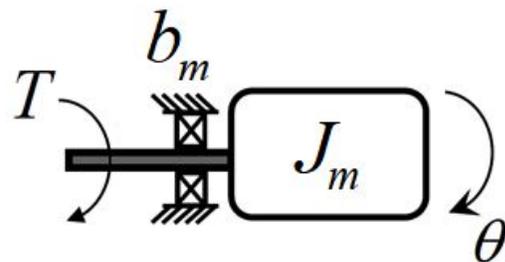
Motor DC com Escovas

- Modelagem em espaço de estados:

Motor de corrente contínua com campo constante controlado pela corrente de armadura:



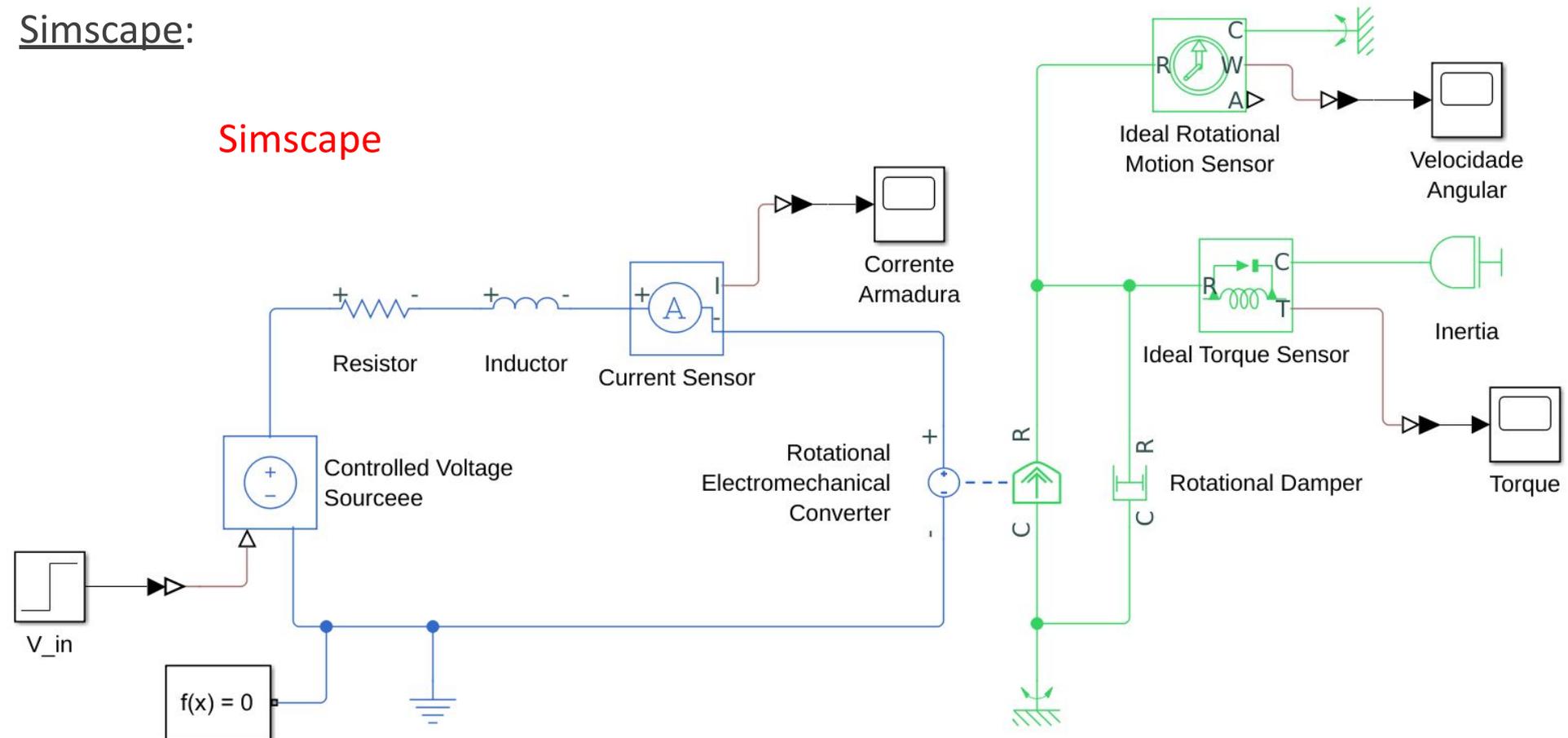
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_e}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_t}{J_m} & 0 & -\frac{b_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [e_a(t)]$$



$$[\theta(t)] = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + [0] [e_a(t)]$$

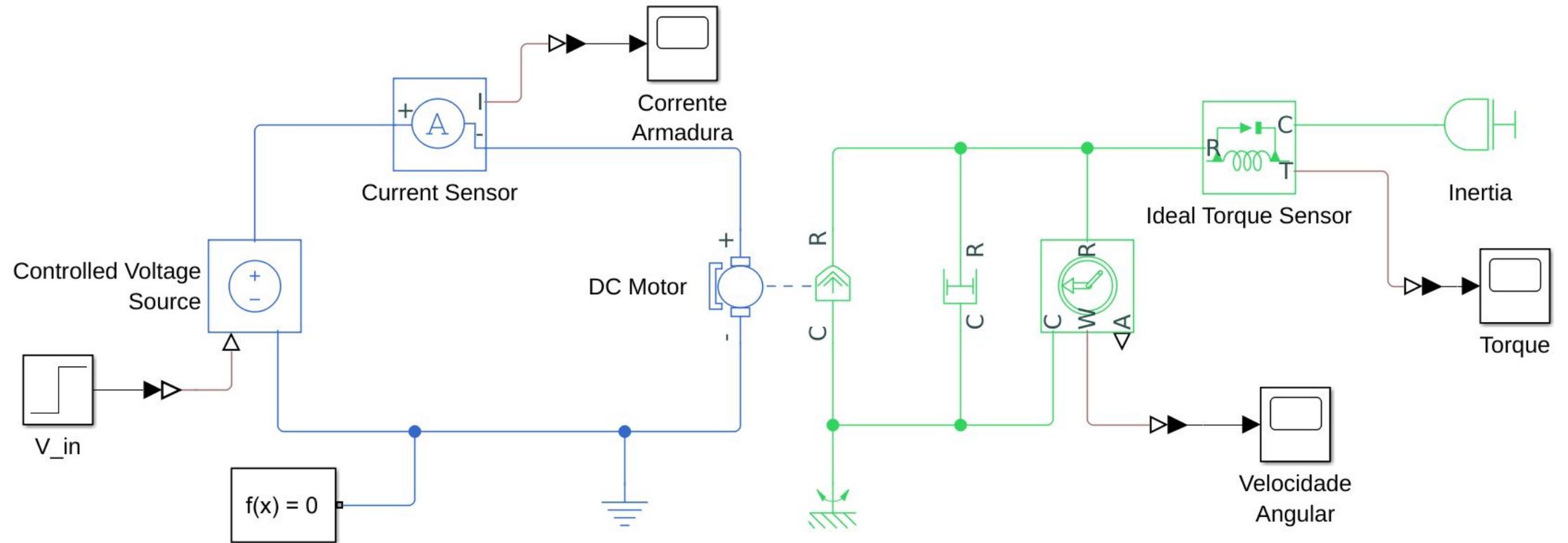
Simulação Dinâmica

- Simscape:



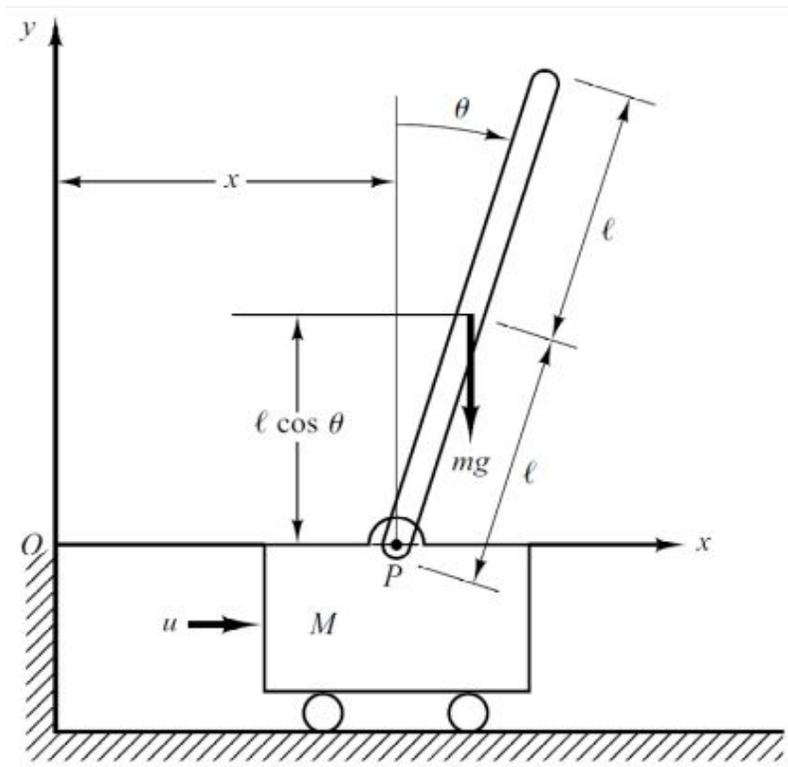
Simulação Dinâmica

- Simscape:



Pêndulo Invertido

- Exemplo: Pêndulo invertido



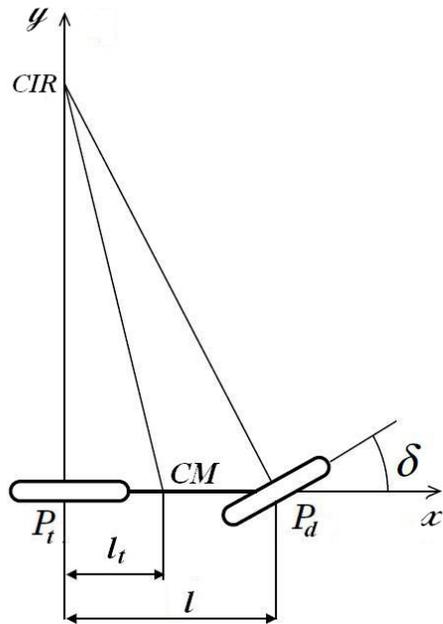
Pêndulo Invertido

- Exemplo: Pêndulo invertido

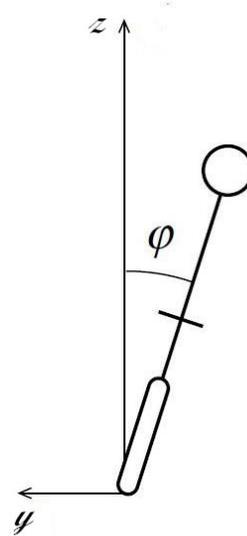
Aplicações:



Segway



Deslocamento lateral de uma motocicleta

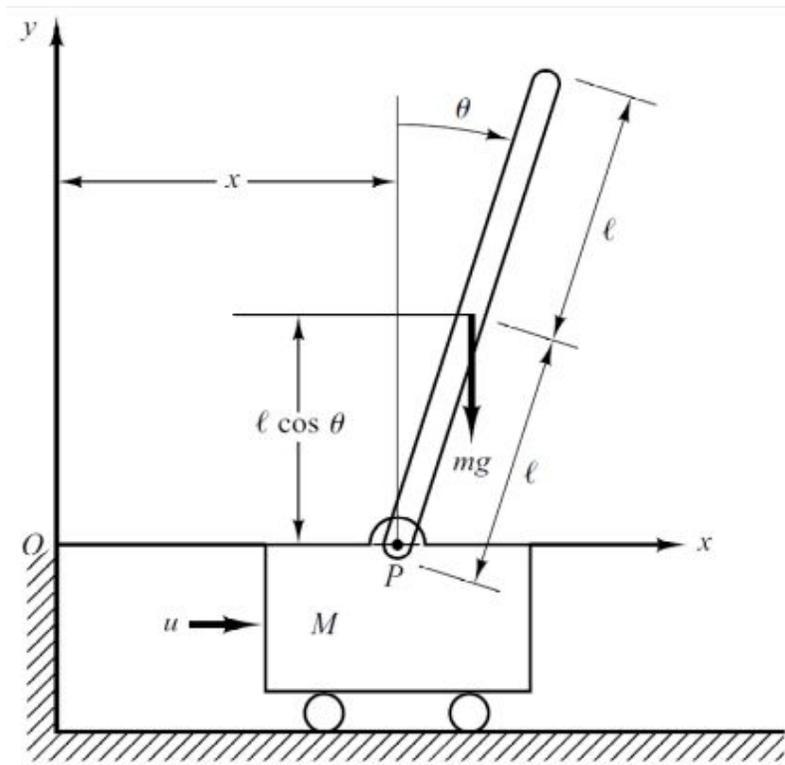


Robô para delivery **bizero pika**:

<https://bizero.com.tr/pika/>

Modelagem

- Exemplo: Pêndulo invertido



$$\sum F_x = m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = H$$

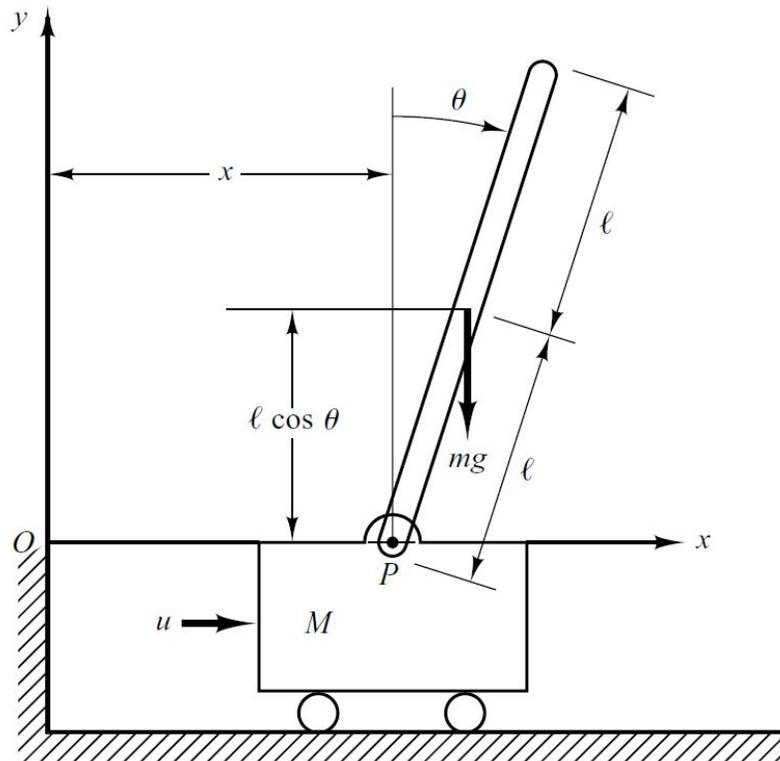
$$\sum F_z = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = V - mg$$

$$\sum M_z = I \ddot{\theta} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta$$

$$\sum F_x = M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H$$

Modelagem

- Exemplo: Pêndulo invertido



Considerando que o ângulo θ será pequeno o suficiente, temos:

$$\cos \theta \approx 1, \quad \sin \theta \approx \theta$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H$$

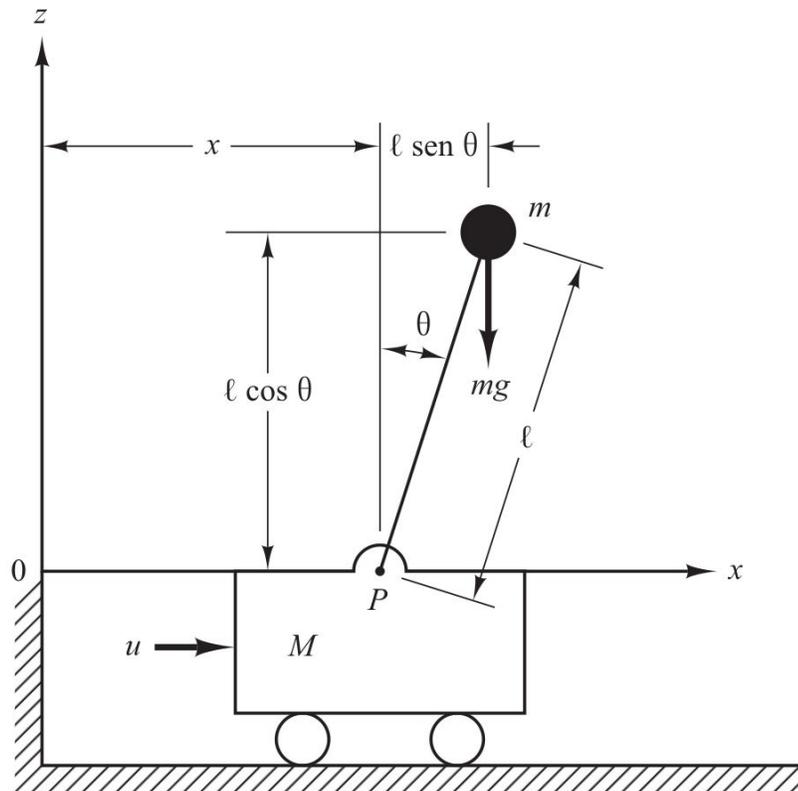
$$V = mg$$



$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \\ (I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \end{cases}$$

Modelagem

- Exemplo: Pêndulo invertido



Considerando que a massa está concentrada no topo da haste, o momento de inércia do pêndulo é pequeno e podemos supor que $I = 0$:

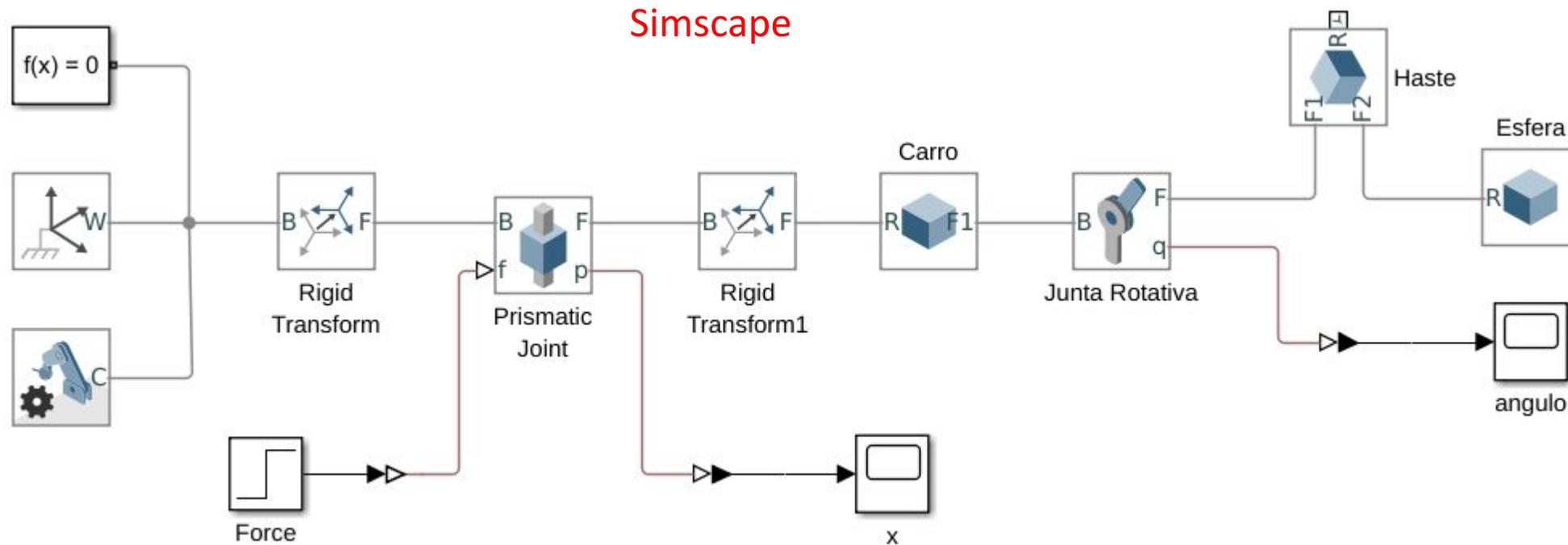
$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \\ (I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\dot{x} = mgl\theta \end{cases}$$



$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= u \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\dot{x} &= mgl\theta \end{aligned}$$

Simulação Dinâmica

- Exemplo: Pêndulo invertido



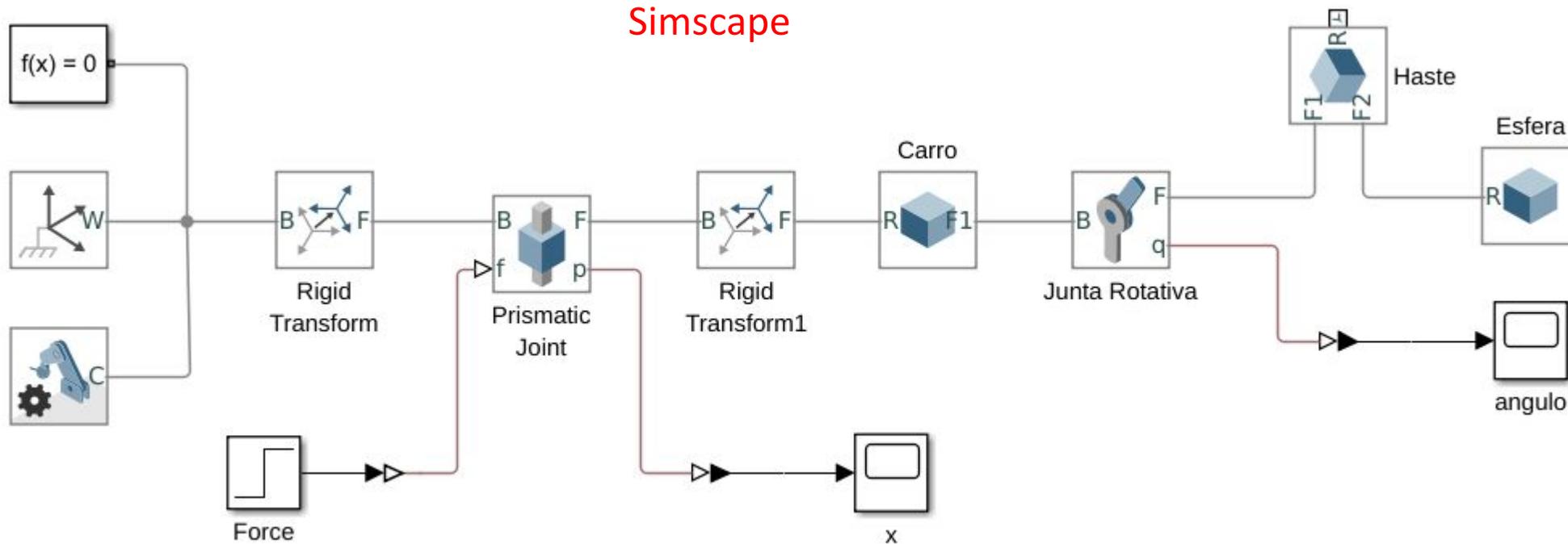
Link útil: <https://www.mathworks.com/help/control/ug/control-of-an-inverted-pendulum-on-a-cart.html>

Simulação Dinâmica

- Exemplo: Pêndulo invertido



Sistema instável sem controle!!



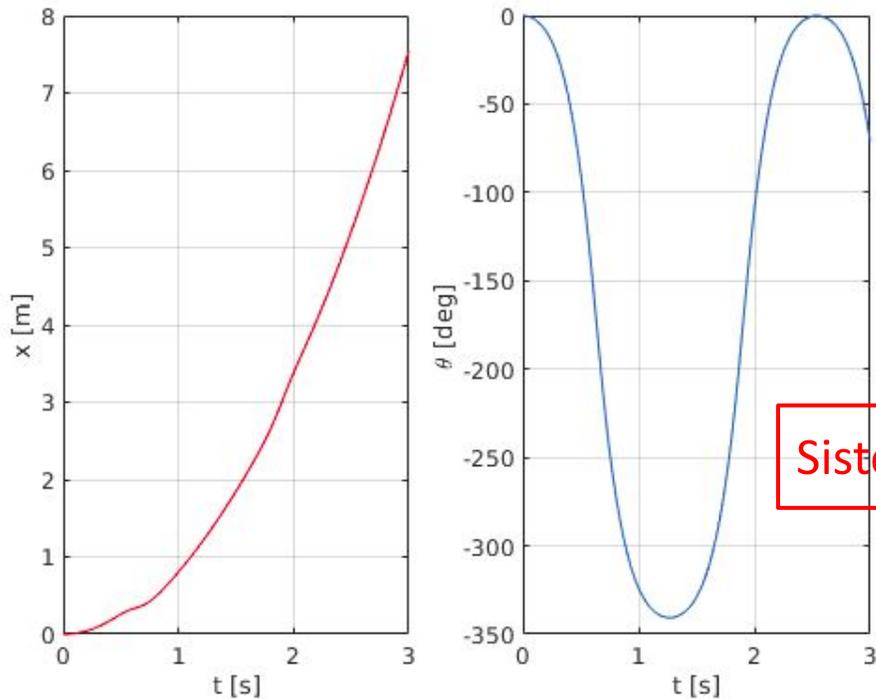
Link útil: <https://www.mathworks.com/help/control/ug/control-of-an-inverted-pendulum-on-a-cart.html>

Simulação Dinâmica

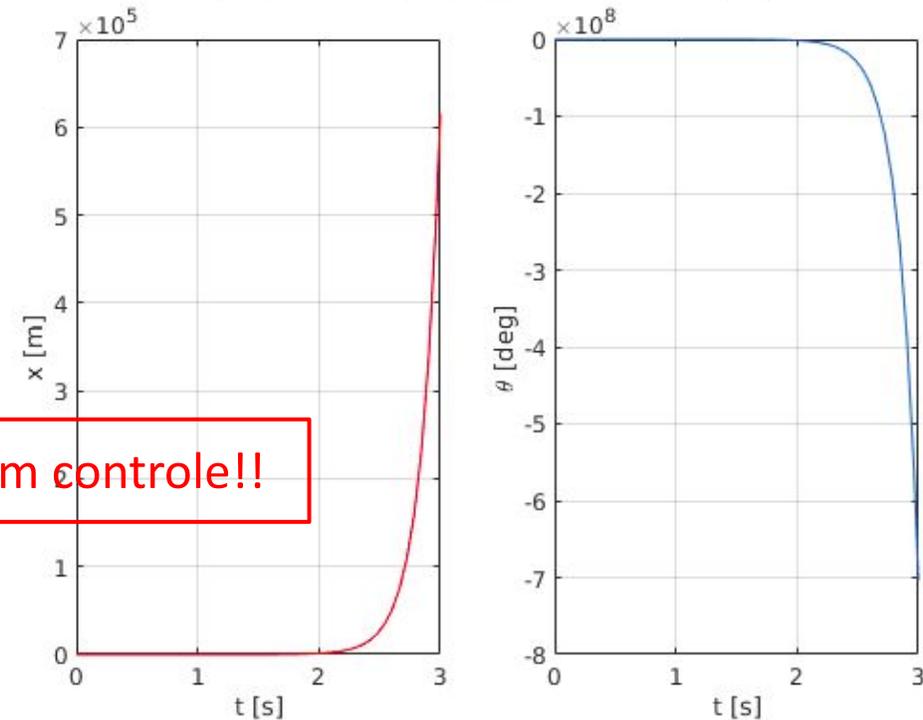
- Exemplo: Pêndulo invertido

Modelo linear só é acurado em torno do ponto $\theta = 0^\circ$

Pêndulo Invertido (Simscape)



Pêndulo Invertido (Simulink Linear)



Sistema instável sem controle!!